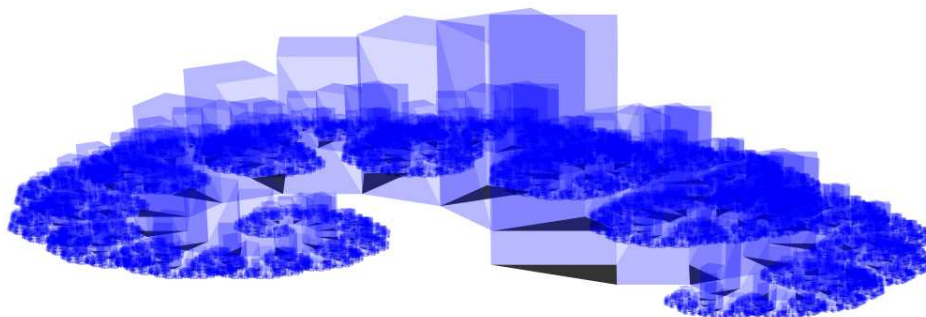




APPUNTI . . . QUASI UN LIBRO

MATERIALI CHE CRESCONO ED EVOLVONO IN MODO DINAMICO

Autore:
Gianpaolo GASPARIN

Prima edizione 13 settembre 2011
ultima revisione 4 maggio 2026

I diritti d'autore sull'opera appartengono a Gianpaolo Gasparin e sono disciplinati nei termini della licenza Creative Commons Attribuzione - non commerciale 3.0 Italia.



il cui testo integrale è disponibile al sito <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/it/>.

Indice

1	Note iniziali	1
1.1	Come si usa “librappunti”	1
1.2	I software usati	1
1.3	Convenzioni usate	2
1.4	Esercizi	2
1.5	Etimologia delle parole	2
1.6	Approfondimenti	2
2	Prima di iniziare ... i primi due anni di scuola	3
2.1	Premesse	3
2.2	Primo anno	3
2.2.1	I testi dei compiti	3
2.2.2	Appunti	17
2.3	Secondo anno	22
2.3.1	I testi dei compiti	22
2.3.2	Tra un panettone e un pandoro, un po' di esercizi	32
3	Test ... “on your mark”	35
4	Geometria sintetica	37
4.1	Da dove si parte?	37
4.1.1	Gli elementi di Euclide	37
4.1.2	Un grande balzo ... Hilbert	39
4.2	Le isometrie	41
4.2.1	Omotetie	43
4.3	Il teorema di Talete	43
4.4	Proprietà delle bisettrici di un triangolo	45
4.5	Proprietà delle secanti e delle tangenti ad una circonferenza	47
4.6	La sezione aurea	48
4.6.1	Costruzione del segmento aureo	49
4.6.2	Pentagono e decagono	50
4.7	Figure equi estese	52
4.7.1	Applicazioni ... teoremi da capire e dimostrare	52
4.8	Trapezio «meraviglioso»	55
4.8.1	HM	55
4.8.2	GM	56
4.8.3	AM	56
4.8.4	QM	56
4.9	La formula di Erone: una dimostrazione geometrica	57
4.9.1	Commento finale	59
5	Algebra lineare e geometria analitica	60
5.1	Elementi di algebra lineare	60
5.1.1	Equazioni lineari	60
5.1.2	Determinanti	61
5.1.3	Sistemi lineari	63
5.1.4	Vettori del piano	65
5.1.5	Basi e basi canoniche	71
5.2	Geometria analitica	72
5.2.1	Riferimento cartesiano	72
5.2.2	Equazioni della retta	72
5.3	Curve nel piano	74
5.3.1	Generalità sulla rappresentazione delle curve piane	74
5.4	Le Coniche	75
5.4.1	Le coniche come luoghi geometrici del piano	76

5.4.2	Le coniche dal punto di vista della geometria analitica	79
5.4.3	Coordinate omogenee nel piano	80
5.5	Con Python	81
5.5.1	Matrici in python	81
5.5.2	Coniche e... non solo	84
6	Aritmetica modulare	89
6.1	Diamo ... i numeri	89
6.1.1	L'insieme $\mathbb{N}$	90
6.2	L'insieme $\mathbb{Z}$	91
6.2.1	Aritmetica in $\mathbb{Z}$	91
6.3	Algoritmo euclideo per il calcolo del massimo comun divisore	93
6.4	Terne pitagoriche	94
6.5	Ricavare le terne pitagoriche con la geometria analitica	95
6.6	Con Python	95
6.6.1	Algoritmo di Euclide: calcolo del massimo comun divisore (gcd)	95
6.6.2	Aritmetica con sympy	96
6.6.3	Terne pitagoriche primitive	97
7	Calcolo discreto	99
7.1	Calcolo discreto ... ovvero matematica ricreativa	99
7.1.1	Permutazioni	99
7.1.2	Permutazioni con ripetizione	100
7.1.3	Una definizione di probabilità senza tanti «fronzoli»	101
7.1.4	Disposizioni e combinazioni	101
7.1.5	Il superEnalotto	102
7.1.6	Combinazioni con ripetizione	104
7.2	“... ma è possibile che mi sieda più di una volta nello stesso banco?”	105
7.2.1	Principio di inclusione esclusione	105
7.3	Con Python	108
7.3.1	Calcolo combinatorio con sympy	108
8	Goniometria	111
8.1	Angoli e loro misura	111
8.1.1	Unità di misura degli angoli	112
8.2	Funzioni goniometriche	114
8.2.1	Definizione di funzione, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche	114
8.2.2	Funzioni goniometriche fondamentali: $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$	115
8.3	Archi associati	123
8.4	Formule di addizione, sottrazione, bisezione, duplicazione e prostaferesi	124
8.4.1	Formule di addizione e sottrazione	124
8.5	Equazioni goniometriche	127
8.5.1	Equazioni elementari	127
8.5.2	Equazioni generiche	128
8.6	Costruzione dell'equazione di un luogo geometrico	132
8.6.1	La versiera di Agnesi	132
8.7	Diseguazioni goniometriche	134
8.7.1	Diseguazioni elementari	134
8.8	Con Python	137
8.8.1	Diseguazioni goniometriche con sympy	137
9	Una proposta di recupero	142
9.1	Taxi Geometria	142
9.1.1	Teoria I	142
9.1.2	esercizi	144
9.1.3	esercizi	147
9.1.4	Teoria II	147
9.2	Con Python	149
9.2.1	Taxi con python	149
10	Trigonometria	157
10.1	Teoremi sui triangoli rettangoli	157
10.2	Teoremi su un triangolo qualunque	159
10.2.1	Teorema dei seni	160
10.2.2	Teorema del coseno	161
11	*Geometria: allineamento e intersezione	162
11.1	Teorema di Ceva	162
11.1.1	Forma Trigonometrica del Teorema di Ceva	163
11.2	Figure in prospettiva	163
11.2.1	Casi limite	165

12 Le trasformazioni nel piano cartesiano	167
12.1 Le trasformazioni del piano in sé	167
12.1.1 Punti uniti	168
12.1.2 Figure unite	168
12.1.3 Affinità	168
12.1.4 Similitudini	169
12.1.5 Isometrie	170
12.1.6 Omotetie	173
12.1.7 *Affinità qualche idea in più	173
13 *Gruppi e grafi	176
13.1 I Gruppi prime idee	176
13.2 Gli assiomi dei gruppi	176
13.3 Esempio di gruppo	176
13.4 Le tavole di moltiplicazione	178
13.4.1 Gruppo non commutativo	180
13.4.2 Struttura della tavola di moltiplicazione di un gruppo	183
13.5 Generatori di un gruppo	185
13.5.1 Gruppi ciclici	186
13.6 Grafo di un gruppo	187
13.6.1 Un gruppo con due generatori	188
13.7 Gruppi di permutazioni	191
13.7.1 Permutazioni rappresentate come cicli	192
13.7.2 Un gruppo finito è isomorfo con un gruppo di permutazioni	194
13.7.3 Il gruppo tetraedrico	197
13.7.4 Relazioni di definizione del gruppo tetraedrico A_4	199
14 *Trasformazioni lineari	201
14.1 Rappresentare nel piano un oggetto	201
14.2 Scopi della Geometria descrittiva	201
14.3 Principi generali	203
14.4 Assonometria	207
14.5 Il programma di Erlangen	212
14.5.1 Applicazione della teoria dei gruppi alla geometria	213
15 Introduzione assiomatica di $\mathbb{R}$	222
15.1 Il campo $\mathbb{R}$	222
15.1.1 $\mathbb{R}$ è con la somma un gruppo abeliano	222
15.1.2 $\mathbb{R}^*$ è con il prodotto un gruppo abeliano	222
15.1.3 $\mathbb{R}$ è un campo	222
15.2 $\mathbb{R}$ è un campo ordinato	223
15.3 $\mathbb{R}$ è completo	223
15.4 L'algebra di $\mathbb{R}$ in sintesi	224
15.5 Definizione di anello	224
15.5.1 $\mathbb{Z}$ è un anello	224
16 Topologia di $\mathbb{R}^n$	226
16.1 La metrica di $\mathbb{R}^n$	226
16.2 Gli intorno $\mathbb{R}^n$	226
16.2.1 Osservazione	227
17 Funzione esponenziale e logaritmo	228
17.1 Le proprietà delle potenze	228
17.2 Costruzione di un isomorfismo	228
17.2.1 Prime conseguenze	229
17.3 La funzione esponenziale	229
17.3.1 Non tutte le basi sono uguali	230
17.4 La funzione logaritmo	234
17.4.1 Alcune formule aggiuntive per i logaritmi	234
17.4.2 Algoritmo per il calcolo del logaritmo in base 10	235
17.4.3 Dove troviamo i logaritmi	236
18 Cenni di Analisi NonStandard	238
18.1 Problemi ... nonStandard	238
18.1.1 Problema uno	238
18.1.2 Problema due	239
18.1.3 Affrontiamo i problemi in modo NonStandard	240
18.1.4 Mettiamo alla prova le idee in "ambienti noti"	243
18.1.5 Alla ricerca di una regola	243
18.1.6 Calcoli con l'operatore che ad f associa m	244
18.1.7 Un po' di storia	245
18.1.8 Problema due: solo un esempietto	247
18.1.9 Le formule usate in 18.1	247

18.2	Calcoli con le derivate	249
18.2.1	Nuove formule	249
18.3	Applicazioni . . . fisiche e non solo	250
18.3.1	Moto di una massa in un fluido viscoso	250
19	Le equazioni di terzo grado	254
19.1	I personaggi in scena	254
19.2	Le soluzioni . . . storiche	254
19.3	L'equazioni di 3° « oggi »	256
19.3.1	L'equazione $x^3 + px + q = 0$	256
19.3.2	Alla caccia della soluzione	258
20	L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi	259
20.1	$\mathbb{C}$. . . con disinvoltura	259
20.1.1	Costruzione di $\mathbb{C}$	259
20.1.2	Proprietà algebriche di $\mathbb{C}$	260
20.1.3	Interpretazione geometrica: il piano di Gauss	260
20.1.4	Rotazioni e numeri complessi	262
20.1.5	Come scrivere un numero complesso	264
20.1.6	Radici n-esime	265
20.2	Con Python	267
20.2.1	Numeri complessi con sympy	267
20.2.2	Trasformazioni in $\mathbb{C}$	268
21	Geometria solida I	273
21.1	I personaggi	273
21.1.1	Bonaventura Francesco Cavalieri	273
21.1.2	Leonhard Euler	273
21.1.3	Galileo Galilei	273
21.2	Dal Piano allo Spazio:	273
21.2.1	Posizioni delle rette nello spazio:	274
21.2.2	Perpendicolarità	274
21.2.3	Dal concetto di angolo nel piano al diedro nello spazio	275
21.2.4	Angoloidi	276
21.2.5	Piramidi e prismi	278
21.2.6	Poliedri	278
21.3	Proprietà dei poliedri	279
21.3.1	Costruire i poliedri regolari	279
21.4	La formula di Eulero	280
21.5	La storia ci insegna: Il Principio di Cavalieri	283
21.5.1	Calcolo del volume della scodella e da questa il volume della sfera.	287
21.5.2	Lasciamo la parola a Galileo che presenta un interessante problema legato all'infinito:	288
21.5.3	Problemi . . . svolti	290
22	Geometria analitica nello spazio	292
22.1	Premessa	292
22.2	I punti nello spazio	292
22.2.1	Piani paralleli	293
22.2.2	Distanza tra due punti	294
22.2.3	Punto medio di un segmento	294
22.2.4	Baricentro di un triangolo e di un tetraedro	294
22.2.5	Il prodotto vettore	295
22.2.6	Calcolo della direzione normale ad un piano	296
22.2.7	Area di un triangolo e volume di un tetraedro	297
22.2.8	La sezione del cubo	297
22.3	Con Python	298
22.3.1	Sezione del cubo	298
23	Geometria solida II	301
23.1	Poliedri proprietà legate a "p" e "q"	301
23.1.1	Proprietà generali dei poliedri	301
23.1.2	Ancora "teoremini" sui poliedri	301
23.2	I pentagoni del pallone da calcio	303
23.2.1	Formule utili	303
23.3	I poliedri uniformi	304
23.3.1	Osservazioni preliminare	304
23.3.2	Quanti sono i poliedri uniformi e come sono fatti	304
23.3.3	Struttura dei poliedri uniformi	305
23.3.4	Un esempio	306
23.4	Con Python	307
23.4.1	Costruzione poliedri uniformi	307
23.4.2	(3,6,6)	310

24 Funzioni continue	313
24.1 Il problema della continuità di una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	313
24.2 La continuità delle funzioni elementari	314
24.3 Continuità delle "operazioni"	314
24.4 Conclusioni	316
25 L'operatore Limite	317
25.1 Il limite come strumento per estendere la continuità	317
25.2 L'operatore Limite	317
25.2.1 Unicità del limite	318
25.3 Limiti «infiniti» e all'«infinito»	319
25.3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$	319
25.3.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	319
25.3.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$	319
25.3.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$	319
25.4 Teoremi sui limiti	319
26 Successioni e limiti notevoli	321
26.1 I limiti delle successioni	321
26.2 Successioni monotone	321
26.3 Un limite veramente «notevole»	322
26.4 Alcuni importanti limiti	323
26.4.1 Dalle successioni alle funzioni	323
26.4.2 Limiti ... «quasi notevoli»	323
26.5 Un interessante definizione di limite*	323
26.6 Ancora un limite ... veramente notevole	324
26.6.1 I cammini continui	324
26.6.2 La lunghezza di un cammino	325
26.6.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	329
26.7 Un bel quesito per ripassare ... pensando*	329
27 Le Derivate	332
27.1 Il rapporto incrementale.	333
27.2 La derivata di una funzione.	334
27.3 Interpretazione geometrica	335
27.4 La funzione derivata	335
27.4.1 Esempio ... estremo	336
27.5 Regole di derivazione	338
27.5.1 Derivate delle principali (o meglio più interessanti) funzioni	339
27.6 Funzioni crescenti localmente, funzioni crescenti in un intervallo	340
28 Proprietà delle funzioni continue su un intervallo	342
28.1 Zeri delle funzioni continue	342
28.1.1 Un po' di storia	342
28.1.2 Osservazione	344
29 Funzioni derivabili su intervalli	346
29.1 Premessa	346
29.1.1 Esempio	348
29.1.2 Conseguenze del Teorema di Lagrange	349
30 Confronto di infiniti ed infinitesimi mediante derivazione	350
30.1 Esame di stato 2017 sessione ordinaria	350
30.2 I teoremi de L'Hôpital	351
30.2.1 Osservazione	352
30.2.2 Raccomandazioni	352
31 Approssimazione delle funzioni mediante polinomi	354
31.1 Sul significato delle approssimazioni	354
31.2 Approssimazioni di una funzione.	355
31.3 Approssimazione delle funzione con polinomi	357
31.3.1 Proprietà dei polinomi	357
31.3.2 Esempio "guida"	357
31.3.3 Esempi	359
31.3.4 Esercizio svolto	360
31.4 Calcolo degli zeri di una funzione	361
32 Convessità, concavità e punti di flesso	362
32.1 Prime definizioni	362
32.2 Convessità globale e locale	363

32.2.1	Controesempi	364
32.3	Convessità e concavità legame con la derivata seconda	364
32.3.1	Osservazione	367
33	Strumenti Python per l'Analisi	368
33.1	Istruzioni per l'uso	368
33.2	Analisi con SymPy	368
33.2.1	senza *	368
33.2.2	Gli strumenti base	368
33.2.3	Esercizi * ... per pensare	371
34	Probabilità I	376
34.1	Deduzione ed induzione	376
34.2	Probabilità e conoscenza	377
34.3	La formula di Bayes	378
34.4	Il progresso della conoscenza	379
34.4.1	Esercizio svolto	379
34.4.2	Problemi ... risolti ... solo Bayes	380
34.5	Con Python	382
34.5.1	Scommetti sulla composizione del contenitore	382
35	Variabili aleatorie discrete	389
35.1	Le variabili aleatorie	389
35.1.1	V.a. vettoriali	389
35.1.2	Valore medio	390
35.1.3	Somme e prodotti di v.a.	391
35.2	La varianza	391
35.2.1	Esempio	391
35.2.2	Esempio	392
35.3	La legge di Poisson	393
35.3.1	Per iniziare un esempio	393
35.4	Media e Varianza di una v.a. poissoniana	395
35.5	Esercizi	396
35.6	Con Python	397
35.6.1	La porta degli zombie	397
36	Teoria della misura	400
36.1	Definizioni iniziali	400
36.1.1	Figura geometrica	400
36.2	Costruzione di una funzione misura	400
36.2.1	Conseguenze	401
36.3	L'area	401
36.3.1	Insiemi misurabili	401
36.3.2	Osservazione	402
36.3.3	Un insieme non misurabile	403
37	Integrale definito	404
37.1	Integrale secondo Riemann-Stieltjes	404
37.1.1	L'integrale di funzioni definite positive	404
37.1.2	Le funzioni integrabili	404
37.1.3	Esempi di funzioni integrabili	405
37.2	Il teorema delle piccole oscillazioni	406
37.3	Le funzioni uniformemente continue sono integrabili	407
37.4	L'integrale generalizzato	407
38	Integrale indefinito	410
38.1	Le funzioni primitive	410
38.2	Proprietà dell'integrale indefinito	411
38.2.1	Esercizi	412
38.2.2	Regola di integrazione per sostituzione	412
38.2.3	Integrali ... importanti	414
38.2.4	Regola di integrazione per parti	415
38.2.5	Proprietà delle funzioni iperboliche	416
39	*Teorema di Caccioppoli Banach	418
39.0.1	Successioni di Cauchy	420
40	Integrale ... uno sguardo d'insieme	422
40.1	L'integrazione come operazione indipendente dalla derivazione: l'integrale di Cauchy	422
40.1.1	A. L. Cauchy <i>Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal</i>	423
40.2	L'integrale di Riemann	423
40.2.1	B. Riemann <i>Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe</i>	425

41	Integrale ... la sintesi	426
41.1	Teorema fondamentale del calcolo integrale	426
41.2	Applicazioni	427
41.2.1	Esempi	427
41.3	Ricerca del resto nella formula di Taylor con l'uso degli integrali	428
41.3.1	Un primo passo	428
41.3.2	Formula generale	429
41.3.3	Stima di $E_n(x)$	430
41.4	Con Python	431
41.4.1	Integrali	431
42	*Lunghezza di un arco di curva	434
42.1	Un po' di teoria ... alla mano	434
42.2	Esempi	434
42.2.1	Lunghezza della circonferenza di raggio R	434
42.2.2	Lunghezza dell'asteroide	435
42.2.3	Lunghezza di un arco di cicloide	435
42.2.4	Lunghezza di una curva data in coordinate polari	437
43	Il volume dei solidi	438
43.1	Ricordando il principio di Bonaventura Cavalieri	438
43.1.1	Esempio ... interessante	439
43.2	Volume dei solidi di rotazione	439
43.3	Con Python	440
43.3.1	Solidi di rotazione: una semplice parabola	440
43.3.2	Solidi di rotazione: solido iperbolico acuto (E. Torricelli)	441
43.3.3	Solidi di rotazione: il toro	442
44	Integrale improprio	444
44.1	Alcuni esempi	444
44.1.1	Osservazione	444
45	Le serie	446
45.1	Proprietà delle serie convergenti	446
45.1.1	Linearità	446
45.1.2	Serie telescopiche	446
45.2	La serie geometrica	447
45.3	La rappresentazione decimale dei numeri reali	448
45.3.1	Osservazione	448
45.4	Criteri di convergenza	448
45.4.1	Serie a termini non negativi	449
45.4.2	Esercizio ... interessante	451
46	Calcolo numerico degli integrali definiti	452
46.1	Il metodo dei rettangoli	452
46.1.1	Esempio: calcolo di $\log(2)$	453
46.2	Il metodo delle tangenti	454
46.2.1	Esempio: calcolo di $\log(2)$	454
46.3	Il metodo di Cavalieri Simpson	455
46.3.1	Esempio: calcolo di $\log(2)$	455
46.4	Approfondimento	456
46.4.1	Le formule di quadratura	456
47	Le equazioni differenziali	458
47.1	Equazioni differenziali del primo ordine	458
47.1.1	Soluzione dell'equazione omogenea	458
47.1.2	Soluzione dell'equazione non omogenea	459
47.2	Equazioni differenziali del secondo ordine	459
47.2.1	Caso $b = c = 0$ e $R(x) = 0$	459
47.2.2	Caso $b = 0$, $c \neq 0$ e $R(x) = 0$	460
47.2.3	Caso $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $R(x) = 0$	460
47.2.4	Equazione non omogenea	461
47.3	Applicazioni	462
47.3.1	Decadimento radioattivo	462
47.3.2	Caduta di un grave in un fluido viscoso	462
47.3.3	Il problema della catenaria	463
47.3.4	Lancio di un razzo	464
48	Costruzione dell'insieme $\mathbb{R}$	465
48.1	I numeri reali	465
48.1.1	La teoria di Cantor	467
48.1.2	La teoria di Dedekind	474
48.1.3	Confronto delle due teorie	477

48.1.4	Unicità del sistema dei numeri reali	479
49	Probabilità II	483
49.1	Premesse . . . richiami	483
49.2	Definizioni preliminari	483
49.3	Veniamo alla “realtà”	485
49.4	Distribuzioni di probabilità continue	486
49.4.1	Distribuzione uniforme	487
49.4.2	Distribuzione esponenziale	487
49.4.3	Distribuzione normale	489
49.4.4	“Costruzione” della distribuzione normale	489
49.4.5	Con Python	493
49.5	Il teorema del limite centrale	495
49.6	Applicazioni numeriche	495
49.6.1	Esempi	496
50	Esercizi svolti	498
50.1	Probabilità e statistica	498
A	Raggi cosmici	504
B	Un esercizio in dettaglio	506
C	Il metodo di esaustione	507
C.1	Le quadrature e il cosiddetto « metodo di esaustione »	507
D	Un integrale un po’ . . .	510
E	Numeri algebrici e numeri trascendenti	512
E.1	Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del cerchio	512
E.1.1	Problemi algebrici e trascendenti	512
E.2	Numeri algebrici	515
E.3	Numeri trascendenti	515
E.3.1	La dimostrazione di I. Liouville dell’esistenza di numeri trascendenti	515
E.3.2	Le dimostrazioni di G. Cantor dell’esistenza di numeri trascendenti	518
E.3.3	La trascendenza di e	519
E.3.4	La trascendenza di π	521
F	Probabilità e geometria	523
F.1	La probabilità discreta	524
F.2	La probabilità continua	524
F.2.1	L’ago sul parquet	525
F.2.2	Sperimentare il caso	526
F.3	Ancora probabilità “geometrica”	527
F.3.1	Risolviamo il seguente quesito	527
F.3.2	Facciamoci aiutare da una simulazione con Python	527
F.3.3	Mappiamo ora la “simulazione”	528
G	Un esercizio storico	531
G.1	La «furbizia» delle api	531
G.1.1	Soluzione del problema di minimo	532
G.1.2	Soluzione inclinazione dei rombi	533
H	Le curve antiche	536
H.1	Incipit	536
H.2	Osservazione	537
H.3	La costruzione	537
H.3.1	La concoide	538
I	Costruzione geometrica di una parabola date sue quattro tangenti	540
J	Quesiti “interessanti”	544
J.1	Quesiti proposti in simulazioni di seconda prova	544
K	Il contenitore del latte anni sessanta	547
K.1	Vecchi ricordi . . . il cartone del latte a forma di tetraedro	547
K.1.1	La storia	547
K.2	Dato il rettangolo trovare il volume	547
K.3	Dato il volume trovare il rettangolo per costruire il tetraedro regolare	549
L	Una particolare successione	551
L.1	La successione dei numeri di Fibonacci	551
L.2	Costruzione della funzione generatrice di F_n	552

M	Una “bella” lezione di geometria	555
M.1	I teoremi di Ceva	555
M.1.1	Applicazioni dei teoremi di Ceva	559
N	Gli involuppi	563
N.1	Una definizione “operativa”	563
N.1.1	La nefroide	563
N.1.2	Lumache di Pascal	564
N.2	Primo passo, un esempio	564
N.2.1	Alla ricerca dell’equazione	565
N.2.2	Cosa abbiamo fatto	566
N.3	Le verifiche	567
N.3.1	L’Asteroide	567
N.3.2	La Nefroide	568
N.3.3	La Cardioide	569
N.3.4	La Strofoide	570
O	Il “mio” logo	571
O.1	Da dove arriva la figura	571
O.2	Indicazioni per la costruzione	572
P	Funzioni e simboli: pratiche d’uso	575
	Bibliografia e Sitografia	577

Elenco dei teoremi e delle definizioni

1	Definizione (Segmento)	40
2	Definizione (Isometria)	41
3	Definizione (Punto unito)	41
4	Definizione (Simmetria)	41
5	Definizione (Traslazione)	41
6	Definizione (Rotazione)	41
7	Definizione (Composizione di isometrie)	42
1	Teorema (proprietà delle isometrie I)	42
2	Teorema (proprietà delle isometrie II)	42
3	Teorema (proprietà delle isometrie III)	42
4	Teorema (proprietà delle isometrie IV)	42
5	Teorema (proprietà delle isometrie V)	42
6	Teorema (proprietà delle isometrie VI)	42
7	Teorema (proprietà delle isometrie VII)	42
8	Definizione (Glisso simmetria)	42
9	Definizione (Omotetia)	43
10	Definizione (Similitudine)	43
11	Definizione (Fascio di rette improprio)	43
8	Teorema (di Talete)	43
1	Corollario (Talete per triangoli)	44
9	Teorema (inverso di Talete per i triangoli)	45
10	Teorema (della bisettrice del triangolo)	45
11	Teorema (delle due corde)	47
12	Teorema (delle due secanti)	47
13	Teorema (della secante e della tangente)	48
12	Definizione (Sezione aurea)	48
13	Definizione (Poligoni equiscomponibili)	52
14	Definizione (poligono di Pick)	53
14	Teorema (di Pick)	53
15	Teorema (trapezio HM)	55
16	Teorema (trapezio GM)	56
17	Teorema (trapezio AM)	56
18	Teorema (trapezio QM)	56
19	Teorema (Formula di Erone)	57
15	Definizione (Vettore)	66
16	Definizione (Prodotto fra vettore e scalare)	67
17	Definizione (Vettori paralleli)	67
18	Definizione (Spazio vettoriale)	68
19	Definizione (Sottospazio Vettoriale)	68
20	Definizione (Combinazione lineare di vettori)	68
21	Definizione (Sistema di generatori)	68
22	Definizione (Vettori linearmente dipendenti)	69
23	Definizione (Base di uno spazio vettoriale)	69
24	Definizione (Dimensione)	69
25	Definizione (Angolo di due vettori non nulli)	69
26	Definizione (Prodotto scalare)	69
27	Definizione (Prodotto vettoriale)	70
28	Definizione (Modulo di un vettore in E_2)	72
29	Definizione (Modulo di un vettore in E_n)	72
30	Definizione (Baricentro)	72
31	Definizione (Curva algebrica)	75
32	Definizione (Conica)	75
20	Teorema (dell'eccentricità di una conica)	78

ELENCO DEI TEOREMI E DELLE DEFINIZIONI

33	Definizione (Congruenza)	91
21	Teorema (di Bézout)	93
34	Definizione (Fattoriale di n)	99
35	Definizione (Disposizioni di n oggetti presi a k a k)	101
36	Definizione (Combinazione di n oggetti presi a k a k)	102
22	Teorema (di inclusione esclusione)	105
23	Teorema (di inclusione esclusione “affermativo”)	107
37	Definizione (Angolo piano convesso)	111
38	Definizione (Grado)	112
39	Definizione (Radiante)	114
40	Definizione (Funzione)	114
41	Definizione (Funzione pari)	115
42	Definizione (Funzione dispari)	115
43	Definizione (Funzione periodica)	115
44	Definizione (Seno dell’angolo orientato)	116
45	Definizione (Coseno dell’angolo orientato)	116
46	Definizione (Tangente)	118
47	Definizione (Cotangente)	119
48	Definizione (Secante)	119
49	Definizione (Cosecante)	119
50	Definizione (Funzione invertibile)	120
51	Definizione (Funzione arcotangente)	122
24	Teorema (Angoli supplementari)	123
25	Teorema (Angoli esplementari)	123
26	Teorema (Angoli opposti)	124
27	Teorema (Angoli complementari)	124
28	Teorema (Coseno delle differenza)	124
29	Teorema (Coseno delle somma)	125
30	Teorema (Seno delle somma)	125
31	Teorema (Seno delle differenza)	126
32	Teorema (Seno del doppio dell’angolo)	126
33	Teorema (Coseno del doppio dell’angolo)	126
34	Teorema (Formula parametrica per il coseno e il seno)	126
35	Teorema (Somma e differenza di seni)	126
52	Definizione (Equazione goniometrica)	127
36	Teorema (sui triangoli rettangoli I)	158
37	Teorema (sui triangoli rettangoli II)	158
38	Teorema (sui triangoli rettangoli III)	158
39	Teorema (sui triangoli rettangoli IV)	158
40	Teorema (della corda)	159
41	Teorema (dei seni)	160
42	Teorema (del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo)	160
43	Teorema (del coseno)	161
44	Teorema (di Ceva)	162
45	Teorema (di Menelao)	163
46	Teorema (di Desargues)	163
47	Teorema (di Pappo)	164
48	Teorema (di Pascal)	164
53	Definizione (Figura unita)	168
54	Definizione (Affinità)	168
55	Definizione (Similitudine)	169
49	Teorema (della tavola di moltiplicazione di un gruppo)	184
50	Teorema (di isomorfismo con il gruppo di permutazione)	194
56	Definizione (Rapporto semplice)	204
57	Definizione (Birapporto)	204
58	Definizione (Quaterna armonica)	205
59	Definizione (Estremo superiore)	223
60	Definizione (Metrica pitagorica)	226
61	Definizione (Disco di centro P e raggio δ)	226
62	Definizione (Intorno)	227
63	Definizione (Famiglia degli intorni)	227
64	Definizione (Punto aderente)	227

65	Definizione (Punto di accumulazione)	227
66	Definizione (Insieme denso)	227
67	Definizione (Insieme chiuso)	227
68	Definizione (Insieme aperto)	227
69	Definizione (Omomorfismo fra gruppi)	228
70	Definizione (Tangente ad una curva)	239
71	Definizione (Infinitesimo)	241
72	Definizione (Monade)	241
73	Definizione (Galassia)	241
74	Definizione (Derivata)	244
51	Teorema (Somma)	244
52	Teorema (Prodotto)	244
53	Teorema (Derivata della composta di due funzioni)	249
54	Teorema (il prodotto di complessi come rotazione)	262
75	Definizione (Rette parallele nello spazio)	274
55	Teorema (sulle rette incidenti)	274
56	Teorema (Il teorema delle tre perpendicolari)	274
57	Teorema (sulle rette perpendicolari)	275
76	Definizione (Diedro convesso)	275
77	Definizione (Sezione normale)	276
78	Definizione (Distanza punto piano)	276
79	Definizione (Angoloide)	276
58	Teorema (somma delle facce di un triedro)	277
80	Definizione (Piramide)	278
81	Definizione (Piramide retta)	278
82	Definizione (Prisma indefinito)	278
83	Definizione (Prisma)	278
84	Definizione (prisma retto, prisma regolare)	278
85	Definizione (Poliedro)	278
86	Definizione (Poliedro regolare)	279
87	Definizione (p: numero medio dei lati dei poligoni)	279
88	Definizione (q: valenza)	279
59	Teorema (della somma degli angoli delle facce)	282
60	Teorema (di Eulero ($F + V - S = 2$))	282
61	Teorema (Teorema I. Proposizione I)	284
62	Teorema (Teorema I. proposizione I)	286
63	Teorema (proprietà di p e q)	301
64	Teorema (proprietà di V ed F)	301
89	Definizione (Poliedro uniforme)	304
90	Definizione (Funzione continua in un suo punto)	313
91	Definizione (Funzione continua in un intervallo)	314
65	Teorema (Continuità della composizione di due funzioni)	315
66	Teorema (continuità del quoziente)	315
92	Definizione (Limite di una funzione in un suo punto)	317
67	Teorema (unicità del limite)	318
68	Teorema (Permanenza del segno)	319
69	Teorema (il limite è un operatore lineare)	319
70	Teorema (del confronto o « due carabinieri »)	320
71	Teorema (esistenza del limite per successioni monotone)	321
72	Teorema (esistenza del limite: condizione di Cauchy)	323
93	Definizione (Cammino continuo localmente)	324
94	Definizione (Cammino continuo globalmente)	325
95	Definizione (Lunghezza di un cammino)	325
73	Teorema (legame fra circonferenza e poligoni inscritti e circoscritti)	326
1	Lemma (del teorema sul legame fra circonferenza e poligoni inscritti e circoscritti)	326
96	Definizione (Derivata in un punto)	334
97	Definizione (Derivata infinita)	334
74	Teorema (condizione necessaria per l'esistenza della derivata)	334
98	Definizione (Grafico di una funzione)	335
75	Teorema (se f è derivabile allora è continua)	335
76	Teorema (derivabilità di $cf(x)$)	338
77	Teorema (derivata della somma)	338

78	Teorema (derivata del prodotto)	338
79	Teorema (derivata del quoziente)	338
80	Teorema (derivata della funzione composta)	338
81	Teorema (derivata dell'inversa)	339
99	Definizione (Funzione crescente localmente)	340
100	Definizione (Funzione crescente su di un intervallo)	340
82	Teorema (funzione crescente in un punto)	341
83	Teorema (di Fermat sui punti stazionari)	341
84	Teorema (funzione crescente in un intervallo)	341
85	Teorema (condizione sufficiente affinché una funzione sia crescente in un intervallo)	341
86	Teorema (di Bernhard Bolzano)	342
87	Teorema (dell'estremo di una grandezza)	343
2	Corollario (del teorema di Bolzano)	343
88	Teorema (Limitatezza delle funzioni continue)	344
89	Teorema (di Weierstraß)	345
90	Teorema (di Rolle)	346
91	Teorema (di Cauchy)	346
92	Teorema (di Cauchy debole)	347
93	Teorema (di Lagrange)	348
94	Teorema (derivata nulla funzione costante)	349
95	Teorema (derivata positiva funzione crescente)	349
96	Teorema (del limite della derivata)	349
97	Teorema (de L'Hôpital caso $\frac{0}{0}$)	351
98	Teorema (Limite della derivata prima)	351
99	Teorema (de L'Hôpital caso $\frac{\infty}{\infty}$)	351
100	Teorema (di Taylor resto di Lagrange)	358
101	Teorema (di Taylor resto di Peano)	359
2	Lemma (di Peano)	360
101	Definizione (Funzione convessa)	362
102	Definizione (Funzione concava)	362
103	Definizione (Funzione convessa I)	362
104	Definizione (Funzione concava I)	363
102	Teorema (da convessità globale a locale)	363
103	Teorema (da convessità locale a globale)	363
105	Definizione (Punto di flesso)	364
104	Teorema (convessità e derivate)	364
105	Teorema (convessità e derivate I)	365
106	Definizione (Derivata simmetrica)	367
106	Teorema (da derivata simmetrica a derivata)	367
107	Definizione (Variabile aleatoria discreta)	389
108	Definizione (Media di una v.a. discreta)	390
109	Definizione (Varianza di una v.a. discreta)	391
110	Definizione (deviazione standard σ)	391
111	Definizione (Figure coincidenti)	400
112	Definizione (Figure congruenti)	400
113	Definizione (Intersezione di figure)	400
114	Definizione (Funzione additiva d'insieme)	401
107	Teorema ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$)	403
115	Definizione (Sottografico di una funzione)	404
116	Definizione (Integrale di funzioni definite positive)	404
117	Definizione (Oscillazione di f)	406
108	Teorema (Piccole oscillazioni)	407
118	Definizione (Funzione integrabile)	408
119	Definizione (Primitiva di una funzione)	410
120	Definizione (Integrale indefinito)	410
109	Teorema (l'operatore integrale è lineare)	411
121	Definizione (Successione di Cauchy)	420
122	Definizione (Insieme completo)	420
110	Teorema (Caccioppoli-Banach per funzioni di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)	420

111	Teorema (della media integrale)	426
112	Teorema (fondamentale del calcolo integrale)	426
113	Teorema (Formula di Taylor con resto integrale)	429
114	Teorema (di Bonaventura Cavalieri)	438
123	Definizione (Solido di rotazione)	439
115	Teorema (del volume di un solido di rotazione)	440
124	Definizione (Integrale improprio in un intervallo)	444
125	Definizione (Integrale improprio in una semiretta)	444
126	Definizione (Serie)	446
116	Teorema (convergenza delle serie telescopiche)	446
117	Teorema (condizione necessaria per la convergenza di una serie)	449
118	Teorema (condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie)	449
119	Teorema (convergenza di una serie dominata da una serie convergente)	449
120	Teorema (convergenza di una serie dominata da un'integrale)	449
121	Teorema (Criterio della radice)	450
122	Teorema (Criterio del rapporto)	450
123	Teorema (il problema di Cauchy primo ordine)	458
127	Definizione ($L(f) = f'' + bf' + cf$)	461
124	Teorema ($L(f) = f'' + bf' + cf$ è lineare)	461
128	Definizione (Zero-successione)	467
125	Teorema (dell'opposta di una zero-successione)	467
126	Teorema (della somma di zero-successioni)	467
129	Definizione (Successioni uguali)	467
130	Definizione (Successione positiva)	467
127	Teorema (sulla natura delle successioni)	467
128	Teorema (Successioni: disgiunzione completa)	468
129	Teorema (proprietà delle successioni positive I)	468
130	Teorema (proprietà delle successioni positive II)	468
131	Teorema (proprietà delle successioni positive III)	468
131	Definizione ($(a_n) > (b_n)$)	468
132	Definizione ($(a_n) < (b_n)$)	468
132	Teorema (sistema ordinato delle successioni convergenti)	469
133	Teorema (Bolzano-Weierstraß)	472
133	Definizione (Partizioni uguali)	475
134	Definizione (Confronto di partizioni)	476
135	Definizione (Partizione positiva)	476
136	Definizione (Partizione negativa)	476
137	Definizione (Partizione nulla)	476
138	Definizione (Somma di partizioni)	476
134	Teorema (partizioni del campo reale)	476
135	Teorema (Teorema di completezza)	480
136	Teorema (Teorema di unicità)	480
139	Definizione (Numero aleatorio o variabile aleatoria)	483
140	Definizione (Numero aleatorio continuo)	483
141	Definizione (Funzione di ripartizione)	483
142	Definizione (Previsione, valore atteso, media)	484
143	Definizione (Varianza)	484
144	Definizione (Distribuzioni di probabilità continua)	486
145	Definizione (Distribuzione uniforme)	487
146	Definizione (Distribuzione esponenziale)	489
147	Definizione (Distribuzione normale)	490
137	Teorema (del Limite Centrale)	495
138	Teorema (del limite centrale classico)	495
139	Teorema (prima proprietà delle tangenti)	540
140	Teorema (seconda proprietà delle tangenti)	540
148	Definizione (Ceviana)	558
149	Definizione (Concorrenza)	558
141	Teorema (di Ceva)	558
142	Teorema (di Ceva inverso)	558
143	Teorema (della concorrenza delle altezze di un triangolo)	559
144	Teorema (delle bisettrici degli angoli interni)	560
145	Teorema (delle bisettrici degli angoli esterni)	560
146	Teorema (delle mediane)	561

ELENCO DEI TEOREMI E DELLE DEFINIZIONI

147	Teorema (di Eulero)	562
150	Definizione (Inviluppo)	563

Capitolo 1

Note iniziali

« Proprio come i giovani animali giocano per prepararsi alle situazioni che fronteggiano da adulti, anche la matematica potrebbe essere in larga misura un insieme di giochi, e forse anche l'unico modo per cambiare la mente individuale e collettiva in preparazione di un futuro che nessuno oggi può immaginare»

Stanislaw M. Ulam Further Applications of Mathematics in the Natural Sciences

1.1 Come si usa “librappunti”

Questa raccolta di appunti è in un certo senso un libro di testo. I suoi contenuti devono assieme a quanto sviluppato a scuola costituire base per lo studio quotidiano.

Subiranno continue modifiche, e pertanto limitatevi, se è necessario, a stampare solo gli argomenti su cui si lavora.

1.2 I software usati

Nel testo troverete indicazioni ad attività da sviluppare con diversi software applicativi:

- *GeoGebra* 2002 per la geometria sintetica e analitica; con questo software sono costruite gran parte delle figure del testo;
- *wxMaxima* 2002 i listati del programma sono riportati in modo possiate provare i comandi utilizzati, apprezzando così la potenza di questo software. In verità ho inserito queste parti, perché mi sono utili per ricordare quali comandi ho usato e come;
- *Eclipse* 2001 viene riportato qualche semplice listato in Java, è opportuno fissare l'attenzione sugli algoritmi; dal 2020 molti listati sono stati “tradotti” in python utilizzando le piattaforme: *PyCharm* 2020 e *Jupyter* 2024;
- nel 2024 ho iniziato ad integrare alcuni capitoli con un paragrafo finale **Con Python** in cui sono riportate integralmente le pagine dei listati sviluppati con JupyterLab (*Jupyter* 2024).
- *Texmaker (free cross platform latex editor)* 2003 editor per L^AT_EX, con questo software sono stati editati questi appunti;

- *LibreOffice 2011* o *OpenOffice 1999* come foglio di calcolo, database o editor di testo, per leggere documenti di diversi formati.

1.3 Convenzioni usate

Nel testo si sono utilizzate le seguenti scritture:

- goniometria funzioni dirette: $\sin(\cdot)$ indica il seno; $\operatorname{tg}(\cdot)$ indica la tangente; $\operatorname{cotg}(\cdot)$ la cotangente; $\operatorname{cosec}(\cdot)$ la cosecante;
- goniometria funzioni inverse: $\operatorname{arctg}(\cdot)$ indica l'inversa della tangente (arco tangente);
- esponenziali e logaritmi: e^x indica l'esponenziale con base il numero di Neper; $\log(\cdot)$ indica il logaritmo in base e , in tutti gli altri casi la base è indicata $\log_{10}(\cdot)$, $\log_2(\cdot)$...
- i vettori sono indicati con una freccia sopra, ad esempio: $\vec{u}$ o $\overrightarrow{OP}$;
- la misura di un segmento è, in genere, indicata con un tratto continuo sopra gli estremi, esempio $\overline{AB}$
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ rappresentano, rispettivamente, l'insieme dei numeri naturali, degli interi, dei razionali e dei reali;
- con $\mathbb{R}^*$ si indica l'insieme dei numeri reali privato dello zero: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- con $\mathbb{R}^+$ si indica l'insieme dei numeri reali positivi: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- con $\mathbb{R}_0^+$ si indica l'insieme dei numeri reali non negativi: $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

1.4 Esercizi

Il testo più che esercizi, propone, una riflessione sui contenuti, spesso si richiede di dimostrare teoremi non completamente sviluppati o di completare delle parti. È importante svolgere queste attività con la massima attenzione.

gli esercizi hanno questa formattazione

1.5 Etimologia delle parole

Spesso nelle note a piè di pagina è riportata l'etimologia di alcuni termini, ricavata da *Treccani.it l'enciclopedia italiana 1999*

1.6 Approfondimenti

I nomi dei capitoli o dei paragrafi preceduti dall'asterisco "*" sono approfondimenti: questo non significa che non debbano essere analizzati con cura.

Capitolo 2

Prima di iniziare . . . i primi due anni di scuola

2.1 Premesse

Ho qui raccolto i compiti assegnati negli anni 2008 e 2009 ad una classe del PNI che ho portato dalla prima alla quinta.

Gli esercizi tracciano un percorso e, in qualche modo, un'idea nel “fare matematica”.

2.2 Primo anno

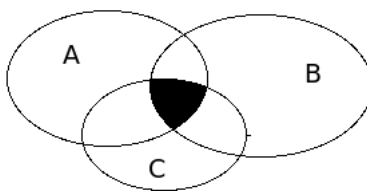
2.2.1 I test dei compiti

Compito 1. 1) Risolvi le seguenti espressioni:

$$\text{a) } \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} : (-2)^3} + \frac{\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{5}\right) \frac{5}{9}\right]^{-1}}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right) \left\{ \frac{5}{9} : \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{5}{3}\right) \left(-\frac{6}{13}\right) \right]^2 - \frac{23}{9} \right\}^3$$

2) Indica in notazione insiemistica l'insieme “nero” di figura:



- 3) Detto H l'insieme dei numeri che si possono leggere sul quadrante dell'orologio, rappresenta per elencazione l'insieme: $A = \{x : x \in H \text{ ed } x \text{ è un numero dispari}\}$
- 4) Dati gli insiemi: $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ scrivi per elencazione $\overline{A \cap B}$
- 5) Dopo aver enunciato le formule di De Morgan, dimostra:

a) $\overline{(\overline{A \cap B} \cup \overline{X})} = B \cap X \cap \overline{A}$

- 6) I ragazzi delle famiglie che trascorrono le vacanze ospiti della pensione Gabriella, si ritrovano tutti i pomeriggi al centro sportivo. Di essi 14 sanno giocare a calcio, 11 a pallavolo e 10 a tennis. Uno solo pratica tutti e tre gli sport, mentre per ogni coppia di sport 3 sono i ragazzi che li praticano entrambi.

a) Quanti sono in tutto i ragazzi?

b) Descrivi con un diagramma di Eulero-Venn la situazione.

- 7) Dato l'insieme $G = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ costruisci $P(G) = \{\text{l'insieme delle parti di } G\}$ (puoi usare la seguente simbologia: $\clubsuit=f, \heartsuit=c, \spadesuit=p$)

- 8) Siano $F = \{2, \otimes\}$ e $H = \{\oplus, x, \}$, costruisci $F \times H$

... se avanza tempo e comunque per casa

- 9) In una scatola ci sono 33 giocattoli o di legno o di colore rosso. Sapendo che 27 sono rossi e 28 sono di legno, stabilisci, dopo aver costruito un diagramma di Eulero-Venn, quanti sono i giocattoli di legno rossi.
- 10) Sia $A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ ed } n \text{ è minore di } 1000\}$ sia $B = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ ed } n \text{ è divisibile per } 5\}$ $C = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ ed } n \text{ è divisibile per } 7\}$ cosa rappresenta $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$?

Compito 2. 1) Data l'equazione:

a) $\frac{5(a+x)}{2a} - \frac{4(b+x)}{3b} = 5\frac{b}{a} + \frac{6b-4a}{b}$ si verifichi che $2b+3a$ è una soluzione.

b) $x = 2b+3a$ è soluzione $\forall a, b \in \mathbb{Q}$? (motivare le risposte)

- 2) Quale valore si deve attribuire alla lettera b affinché l'equazione: $(x-2b)^2 + (bx+1)(x+2) + 4x = 0$ risulti di primo grado in x ?

- 3) Risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni:

a) $3\left(x - \frac{1}{4}\right) - 4\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}(x+1) - \frac{1}{2}(x+3)$

b) $\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1-6x}{3} = x + \frac{1}{3}(2x+5)$

4) Semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{5x-2+\frac{25x^2+12}{5x+2}}{5\frac{x}{5x-2}-\frac{2}{5x+2}+\frac{25x^2+4}{25x^2-4}}$$

$$\frac{\frac{6b-4a}{a^2-b^2}}{\frac{4a^2+9b^2-12ab}{\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{\frac{3ab-2a^2}{a^3-a^2b}}}}$$

5) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

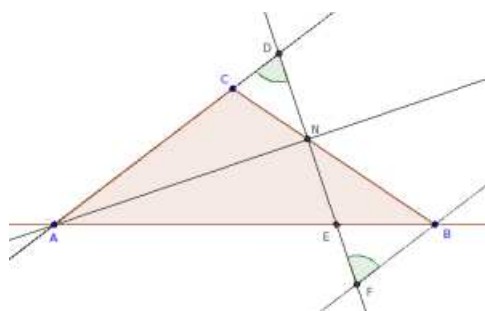
$$\frac{16-x^2}{x^2(x+1)} \geq 0$$

$$x-3 \leq \frac{5}{3-x}$$

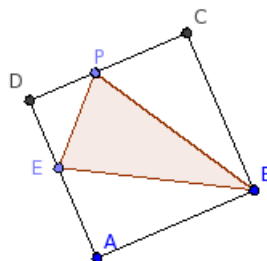
$$\frac{4x^2-x^4}{x(x^2-1)} \geq 0$$

$$\frac{27-x^3}{x^2-4x-3} \leq 0$$

- 6) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.
- 7) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.
- 8) Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezioni con AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostrare che i triangoli ADE, BEF sono isosceli e che i loro angoli sono a due a due congruenti.



- 9) Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo, esso viene scomposto in quattro triangoli fra loro congruenti.



- 10) Dato il quadrato ABCD sia $\overline{DE} = b$ e $\overline{DA} = a$. Determinare la posizione di P affinché l'area del triangolo PEB sia metà dell'area del quadrato ABCD

Compito 3. 1) Considera l'insieme $\mathcal{T}$ formato dalle terne di numeri interi ($\mathbb{Z}$) (ad esempio $(1, 0, -2)$ è un elemento di $\mathcal{T}$). In $\mathcal{T}$ definiamo l'operazione $\cdot$ in questo modo: $(x, y, z) \cdot (u, v, w) = (xu, yv, zw)$

2) **dimostra** che $\cdot$ è commutativa, associativa e ammette elemento neutro.

3) che tipo di insieme è $\mathcal{T}$, e come può essere scritto?

4) Risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti espressioni:

a) $(-1)^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{95} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^{97} + \left(\frac{1}{2}\right)^{190} \left(1 - \frac{1}{2^4}\right)$

b) $-\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{13}{6}\right) + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 : \left(1 + \frac{1}{2}\right)^5\right] + \frac{1}{9}$

5) Qui sotto sono riportate la tabellina del prodotto e della somma nella base 5

$\cdot$	0	1	2	3	4	+	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4
1	0	0	1	2	3	4	1	1	2	3	10
2	0	2	2	4	11	13	2	2	3	4	10
3	0	3	11	14	22	3	3	4	10	11	12
4	0	4	13	22	31	4	4	10	11	12	13

6) Calcola $(234)_5 \cdot (3)_5$ descrivi il procedimento usato.

7) Costruisci la tabellina della somma e del prodotto nella base 7

8) Dopo aver spiegato che cosa si intende per dimostrazione per assurdo, **dimostra** che i numeri primi sono infiniti.

9) Qual è la negazione della frase “ogni studente della 1L ha almeno due cugini”?

10) A quale numero fra 0 e 12 è congruo modulo 13 il prodotto: $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 113$?

11) **Verifica**, con almeno **due** esempi, che: se p è un numero primo non divisore di a allora $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

12) Descrivi l'insieme A degli $n \in \mathbb{Z}$ per cui $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Se $m \in \mathbb{Z} - A$ quanto vale $m^2 \pmod{4}$?

13) Le seguenti istruzioni cosa producono in output? (**spiega!!**) // esercizio verifica

```
int x=3;
```

```
while (x<=6)
```

```
{
if(x%2==0)
{
x--;
}
else
{
x=x+3;
}
System.out.println("x vale : "+x);
}
```

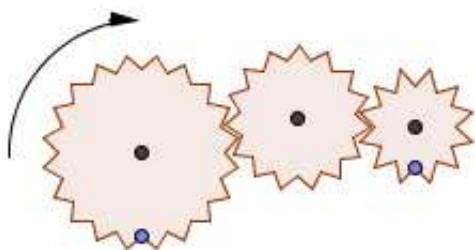


Figura 2.1: realizzato con GeoGebra

- 14) Tre ingranaggi sono collegati fra loro come nella figura, essi hanno 20, 15 e 12 denti. Il primo e il terzo ingranaggio portano entrambi dei segni che all'inizio si trovano nel punto più basso. L'ingranaggio da 20 denti è mosso da un motore. Dopo quanti giri del motore i segni ritornano nella posizione più bassa? **Spiega** il procedimento usato.

Compito 4. 1) Dopo aver elencato le proprietà dell'insieme $\mathbb{Z}_6$, considera le operazioni elencate, esegui quelle permesse in $\mathbb{Z}_6$, spiegando, per le altre, perché non si possono svolgere.

2) $3 + 3$	5) $7 + 3$
3) $5 \cdot 6$	6) $3 + (-3)$
4) $0 + 3$	7) $6 \cdot (-1)$

- 8) Dei seguenti monomi calcola gcd ed lcd:

a) x^4y^2z ; $x^2y^4z^2$

b) ab^3c^2 ; a^3d^2

c) $121n^4m^2$; $11m^3n^3$

- 9) Espressioni:

- a) $\left[(2xy - 3xy)^3 - (5xy - 3xy) : (-4xy) + (2x^5y^5) : \left(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy\right)^2\right] : \left(-\frac{1}{2}x\right)^3$
- b) $\left[(x^{2n+1} : x^{5n-1})x^{3n+2} + (x^{2n+1} : x^{n+1}) : x^{3n-1}\right]^3 : x^8$ con $n \in \mathbb{N}$
- c) $(2a + a^2)^3 - a^5(a + 5) - 4a^3(2 + 3a) - (a^3 - a)^2 : a$
- d) $(2x - 1)^3 - (x - 2)^3 + 6x(x + 1) - 7(x^3 + 1)$
- 10) Sapendo che $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a = 2b$ semplifica:
- a) $(-1)^3(b - a)^{95} - (a - b)^{97} + (a)^{190}(1 - b^4)$
- 11) Scrivi le seguenti proposizioni utilizzando il formalismo della logica, e poi, sia in modo formale che in modo discorsivo, scrivi la negazione:
- a) “*ci sono studenti che durante il compito non pensano*”
- b) “*tutte le ragazze della 1L hanno le trecce*”
- 12) In cosa consiste una dimostrazione per assurdo?
- 13) Calcola $\gcd(3n + 1, 2n + 1)$ con $n \in \mathbb{N}$
- 14) Esegui le seguenti operazioni nelle basi indicate:
- a) $(1220)_5 : (122)_5$
- b) $(2321)_4 : (112)_4$
- 15) Sapendo che: $(1632)_n : (601)_n = (15)_n$ quanto vale n ? (ovviamente $n \in \mathbb{N}$)
- 16) Le terne pitagoriche sono infinite? Giustifica la risposta.
- 17) Si stima che la superficie del capo umano portante capelli è di 775 cm^2 ⁽¹⁾ e che ogni cm^2 contiene al massimo 165 capelli. Dimostrare che in una città di 150 000 abitanti vi sono almeno due persone che hanno lo stesso numero di capelli.
- 18) Un generale cinese aveva un esercito di 1000 uomini. Ci fu una battaglia e il generale condusse il suo esercito alla vittoria. Tornato all'accampamento, il generale sapeva di aver perso un numero assai esiguo di soldati e di questo si rallegrava; si chiedeva però anche se potesse rapidamente stabilire quanti fossero effettivamente i caduti. Il generale pensò allora di far disporre i sopravvissuti in riga prima per 5, poi per 7 e infine per 9; così facendo, riscontrò che nell'ultima riga restavano rispettivamente 2, 3 e 7 soldati, e fu quindi certo sul numero dei soldati caduti. Quanti sono i soldati sopravvissuti alla battaglia?
- Compito 5.** 1) Dopo aver elencato le proprietà dell'insieme $\mathbb{Z}_5$, considera le operazioni elencate, esegui quelle permesse in $\mathbb{Z}_5$ spiegando, per le altre, perché non si possono svolgere.
- a) $3 + 3$ d) $4 + 3$
- b) $5 \cdot 3$ e) $3 + (-3)$
- c) $0 + 3$ f) $2 \cdot (-1)$
- 2) Dei seguenti monomi calcola gcd (massimo comun divisore) ed lcd (minimo comune multiplo):
- a) $x^3y^4z^2; x^4y^2z^4$

¹Non vuol dire che lo scrivente non sia UMANO!

b) $ab^3c^2d^2$; a^3d^5

c) $144n^3m^5$; $36m^3n^3$

3) Espressioni:

a) $(2x - y)^2 - (2x + y)^2 - 4x(-2y)(2x + y)^0$

b) $\left[(x^{2n+1} : x^{5n-1}) x^{3n+2} + (x^{2n+1} : x^{n+1}) : x^{3n-1} \right]^3 : x^8$ con $n \in \mathbb{N}$

c) $(a - b)^2(a + b + 1)(a + b - 1) - (a + b)^2(a - b + 2)(a - b - 2) - 3(a^2 + b^2)$

d) $\{[(a + b) : (a - b) : ((a - b)^2 : (a + b))][(a - b) : ((a + b) : (a - b) + ((a + b) : (a - b))^2)]\} 2a$

4) Nell'operazione indicata qui sotto ogni lettera rappresenta una cifra: lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse; inoltre nessuna lettera rappresenta la cifra 0. ORE+ ORE+ ORE= VIVE Quanto vale il risultato? (motivare la risposta)

5) Esegui le seguenti operazioni nelle basi indicate:

(a) $(123)_4 \cdot (321)_4$

(b) $(343)_5 + (242)_5$

6) Sapendo che: $(11615)_n : (601)_n = (15)_n$ quanto vale n ? (ovviamente $n \in \mathbb{N}$)

7) Analizza la seguente porzione di codice: ...

```
double a;
int c=-1;
while(c!=3)
a=Math.random();
c=(int)(a*5)+1;
System.out.println(c);
...
```

a) quando si arresta il ciclo?

b) Quali sono i possibili valori che può assumere la variabile c?

8) Dimostrare che se $k + 1 = x^2$ e $2k + 1 = y^2$ con $x, y \in \mathbb{N}$ allora x e y sono entrambi dispari.

9) Si scriva $\left(\frac{1}{3}\right)$ in base 3 e $\left(\frac{8}{7}\right)$ in base 7, cosa si può osservare?

10) Mamma Giuditta compera una scatola di zucchero in zollette. Cristina mangia lo strato superficiale, cioè 77 zollette; di quello che resta mangia lo strato laterale, che consiste in 55 zollette; infine Cristina mangia lo strato frontale. Quante zollette sono rimaste nella scatola?

Compito 6. 1. Espressioni:

a) $(a + b^2)^2(a - b^2)^2 - (a^2 - b^4)^2$

b) $(a + b)(a + b)^2 - (a + b)(a^2 - ab - b^2) - 3ab(a + b)$

c) $(x + y)(x - y + a)(x - y - a) + 10a^2x + (x - y)(x + y - 3a)(3a + y + x) - 2x(x - y)(x + y) - 8a^2y$

2. Presi i numeri naturali ≤ 20 , rappresenta in un grafico cartesiano la relazione "x è divisibile per y"

3. Nell'insieme dei razionali positivi ($\mathbb{Q}^+$) considera la relazione S: "ha la stessa parte intera⁽²⁾ di". Dire se la relazione è di equivalenza e in caso affermativo definire l'insieme quoziente.
4. Dati gli insiemi $A = \{0, 1\}$ e $B = \{a, b\}$, utilizzando una rappresentazione sagittale costruisci tutte le possibili funzioni di A in B.
5. Si consideri la funzione $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $f(x) = ax + b$ come devono essere scelti $a, b \in \mathbb{Z}$ affinché f risulti biiettiva?
6. Trovare $g \circ f$ e $f \circ g$
 - a) $f(x) = x + 1; g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
 - b) $f(x) = \frac{3x + 1}{2x + 1}; g(x) = \frac{3x - 4}{2x + 3}$
7. Sia $h(x) = 3x + x^2; k(x) = x - 1$. Esiste un valore di x per cui si ha: $f(g(x)) = g(f(x))$?
8. Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele ABC, si riportino due segmenti AD ed AE fra loro congruenti. Condotti i segmenti BE e CD che si intersecano in F, dimostrare che il triangolo BCF è isoscele.
9. Sui prolungamenti della base BC di un triangolo isoscele ABC si riportino i segmenti congruenti BD e CE. Dimostrare che il triangolo ADE è isoscele
10. Scrivi in linguaggio *Java* le seguenti istruzioni (le variabili si possono pensare già assegnate ed indicizzate):



- a) incrementa la variabile x di 3 se x è divisibile per 3 scrivi "OK" altrimenti "avanti!" ,
ripeti le operazioni fino a che x non supera 27.

...se avanza tempo e ... comunque per casa

11. Sapendo che le due funzioni f e g sono invertibili nello stesso insieme, dimostra che $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
12. Dato un triangolo ABC si prolunghino i lati AB e AC dalla parte di A, rispettivamente dei segmenti AD=AC e AE=AB. Sia F l'intersezione delle rette DE e CB. Dimostrare che il triangolo BEF è isoscele e che la retta FA è la bisettrice dell'angolo $\widehat{EFB}$
13. Il sig. Rossi, il sig. Bianchi e il sig. Neri hanno i capelli di uno di questi colori {rossi, bianchi, neri}. Ciascuno li ha di un colore diverso dal suo cognome. Il sig. Rossi non è il più vecchio. Di che colore sono i capelli dei tre signori?

Compito 7. 1) Dopo aver posto le opportune condizioni di esistenza risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti espressioni:

²la funzione parte intera è la funzione definita come segue: per un numero reale x, la parte intera di x, indicata con $\text{int}(x)$ o $\text{floor}(x)$ è il più grande intero minore od uguale a x. Per esempio $\text{int}(2.9)=2$, $\text{int}(-2) = -2$ e $\text{int}(-3.3) = -3$.

$$\text{a) } \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)^3}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a-b)^2}{a+b}} \frac{a-b}{\frac{a+b}{a-b} \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2}$$

$$\text{b) } \frac{-1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x+y} + 2\frac{y}{x^2-y^2} - 2\frac{y^3}{x^4-y^4} - \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2y-2x}$$

2) Dato un angolo convesso XOY , si riportino sul lato OX due segmenti OA e OB e sul lato OY i due segmenti $OC = OA$ e $OD = OB$, Dimostrare:

a) che $AD = BC$

b) che, indicato con E il punto comune ai segmenti AD, BC si ha $AE = CE$

3) Dato un triangolo isoscele OAB di base AB , si prolunghino i lati dalla parte della base di due segmenti congruenti AC e BD . Dimostrare che il punto E di intersezione dei segmenti BC e AD appartiene alla bisettrice dell'angolo O .

4) Dimostrare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari

5) Scrivi in linguaggio *Java* le seguenti istruzioni (le variabili si possono pensare già assegnate ed indicizzate):

a) se x positivo scrivi x altrimenti $-x$

b) assegna alla variabile n il valore già posseduto per m , fino a che n non supera k .

6) Sia $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$ un polinomio di grado n , sapendo che ammette n radici naturali ($x_1, x_2, \dots, x_n$) quanto vale $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$?

7) Un extraterrestre sbarca sulla terra, trova un foglietto su cui c'è scritto: $11675 : 243 =$, prende la penna e scrive 37. Sapendo che l'extraterrestre ha due mani con lo stesso numero di dita, quante dita ha in una mano?

Compito 8. 1) Dopo aver posto le opportune condizioni di esistenza risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti espressioni:

$$\text{a) } \left(x - \frac{xy}{x+y}\right)^2 \left(y - \frac{xy}{x+y}\right)^2 : \left(\frac{x^2y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)$$

$$\text{b) } a + b - \frac{a^2}{a-b}$$

$$\text{c) } \frac{x^2+4}{x^3-x^2} - \frac{x-3}{x^2-x} - \frac{3x^2+4}{x^4-x^3}$$

$$\text{d) } \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \left(1 + \frac{2b}{a-b}\right) \frac{a^2+b^2-2ab}{b^2-a^2} : \left(1 + \frac{2ab}{a^2+b^2-ab}\right)$$

2) Dato un triangolo ABC , si conducano le bisettrici degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e sia D il loro punto comune. Condotta per D il segmento EF parallelo a BC (con E su AB ed F su AC). Si dimostri che $EF = BE + CF$.

- 3) Per gli estremi A, B di un segmento si conducano le rette parallele a, b non perpendicolari ad AB . Sia C l'intersezione della perpendicolare ad AB nel suo punto medio M con la retta a . Dimostrare che la semiretta BA è la bisettrice di uno degli angoli che la retta b forma con la semiretta BC
- 4) Sia AN la bisettrice relativa all'angolo $\hat{A}$ del triangolo ABC . Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezioni con la retta AC , con la retta AB e con la parallela ad AC per B . Dimostrare che i triangoli ADE e BEF sono isosceli.
- 5) Per gli estremi di un segmento AB si conducano due semirette parallele AX e BY , giacenti sui due semipiani opposti di origine AB . Fissati su AX due punti C e D e detto M il punto medio di AB , si conducano le rette CM e DM che intersecano BY in E ed F . Dimostrare che i segmenti CD ed EF sono congruenti.
- 6) È data la funzione $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad n \rightarrow -\frac{1}{n^2 + 1}$
 - a) calcola $m(\mathbb{N})$
 - b) la funzione è suriettiva? (motiva la risposta)
 - c) La funzione è iniettiva? (motiva la risposta)
 - d) è possibile individuare due numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha \leq m(n) \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$? (motiva la risposta)
- 7) Scrivi in linguaggio *Java* le seguenti istruzioni (le variabili si possono pensare già assegnate ed indicizzate): incrementa la variabile x di un valore k (fissato >1) quando x supera 50, incrementa x ancora due volte, poi scrivi il valore ottenuto.
- 8) Un rubinetto può riempire una vasca in x ore; un secondo la può riempire in y ore. In quanto tempo possono riempire la vasca i due rubinetti aperti assieme?
- 9) Preso un numero intero, moltiplicalo per il numero che si ottiene aggiungendo ad esso 2; al prodotto così ottenuto aggiungi sempre 1. Ad esempio: $3 \cdot 5 + 1 = 16$, $7 \cdot 9 + 1 = 64$. Si nota che il risultato è sempre un quadrato perfetto. Sapresti dimostrarlo in generale?
- 10) Due punti A e B distano 12cm. Un punto P ha distanza dal punto A tripla della distanza dal punto B , fra quali limiti può variare la distanza fra P e B ?

Compito 9. 1) Esegui le seguenti divisioni:

- a)
$$\frac{3k^5 - 7k^4 - 6k^3 + 17k^2 - 10k + 12}{3k - 7}$$
- b)
$$\frac{x^3y^4 - x^4y^3 + xy^2 - 3xy^2y - 2x^2y + 3xxy^2 + x^3}{y - x} \text{ variabile } x$$
- c)
$$\frac{a^4x^5 + b^4x^4 - a^3bx^4 - ab^3x^5 - 2ab^3x^3 + a^5x^3 + 2b^4x^2 - a^4bx^2 + abx^2 + a^2x^2 - b^2x - abx}{ax - b} \text{ variabile } x$$

- 2) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB , si costruiscano esternamente ad esso sui lati CB e CA due triangoli equilateri ACN e BCQ . Si dimostri che N e Q sono equidistanti dalla retta CH , essendo H il piede dell'altezza relativa alla base del triangolo.
- 3) In un quadrilatero convesso $ABCD$, i lati AB e AD sono congruenti e la diagonale AC biseca l'angolo BAD . Sui lati AB e AD si riportino i segmenti congruenti AM e AN . Dimostrare che i triangoli MCB e NCD sono congruenti.

4) Sia ABC un triangolo isoscele di base AB , dette AH e BK le altezze relative ai lati congruenti, sia E il punto di incontro di tali altezze. Dimostra che la retta CE è l'asse di AB .

5) Semplifica in $\mathbb{Q}$ le seguenti espressioni:

a) $\frac{a}{x^2 + ax + a^2} + \frac{1}{x - a} - \frac{x^2}{x^3 - a^3}$

b) $\frac{1 + \frac{2}{x-1}}{\frac{x^2 + x}{2x-2}}$

c) $\frac{a^{2n}}{a^n b^n - b^{2n}} - \frac{a^{2n} + b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n}} - \frac{b^{2n}}{a^n b^n + b^{2n}} \quad n \in \mathbb{N}$

d) $\frac{\frac{x^3 + 1 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 5x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$

6) Sia $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ con $x, y \in \mathbb{R}$

a) spiega perché f è una funzione.

b) indica dominio e insieme delle immagini di f

c) f è iniettiva? (motivare tutte le risposte date)

7) Spiega il significato delle seguenti istruzioni:

a) `spazioGrafico pannello=new spazioGrafico(); mainPanel.add(pannello);`

b) `pannello.centroQx=x;`

8) Utilizzando le formule studiate verifica che: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

9) 5 (T, M, G, B, P) giocatori seduti ad un tavolo utilizzano le seguenti carte 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K e A nei quattro usuali semi $\heartsuit \diamondsuit \clubsuit \spadesuit$, T distribuisce 5 carte iniziando da B. Calcola la probabilità che B riceva 5 carte di cuori $\heartsuit$

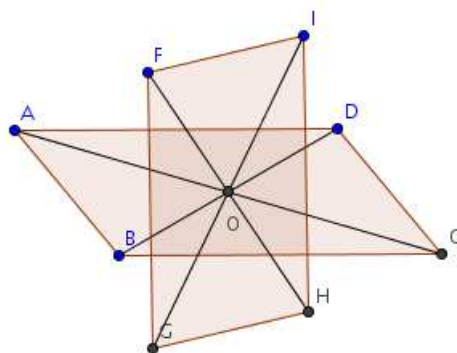
10) (Dedicato alle “nostre giocatrici”) Quattro amiche giocano a briscola (40 carte: numerate da 1 a 7 più un *fante*, un *cavallo* e un *re*, in quattro semi: *denari*, *spade*, *bastoni* e *coppe*.) Per prima viene scoperta una carta che indica la “briscola”, esce il 5 di danari, qual è la probabilità che la prima giocatrice riceva l'Asso, il Tre e il Re di denari?



Compito 10. 1) Esegui le seguenti equazioni:

a) $\frac{1}{5}(x - 11) - 2x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4}x - 2 - x - \frac{x}{60}$

- b) $\frac{5}{3} + x - \frac{x+2}{3} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)^2 - \frac{9}{4}$
- c) $\frac{(2x+2)(1-x)}{3} = \frac{2(1-2x)^2 - 6(x-1)^2}{2} - 3 + \frac{1}{3}(17-5x^2) - 2x$
- d) $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{5} - 2x\right) + \frac{5}{3} = \frac{x^2+1}{4} - 3x\left(2 + \frac{1}{12}x\right) - \frac{3}{5}(2-5x) + 2\frac{x}{5}$
- 2) Dato un trapezio $ABCD$, di basi AB (maggiore) e CD (minore), sapendo che $CD = CB$, sia r la retta per C perpendicolare alla diagonale DB , detta E l'intersezione di r con la base maggiore AB , si dimostri che il quadrilatero $DEBC$ è un rombo.
- 3) Per un punto P di un lato di un rettangolo si conducano le parallele alle diagonali. Dimostrare che il parallelogramma limitato da queste parallele e dalle diagonali ha perimetro congruente ad una diagonale.
- 4) Si considerino i parallelogrammi $ABCD$ e $FGHI$ aventi entrambi O come punto di intersezione delle diagonali.



- 5) Si dimostri che $BHDF$ è un parallelogramma.
- 6) Congiungendo opportunamente gli otto vertici dei due parallelogrammi è possibile costruire altri parallelogrammi? Se sì quali?
- 7) Come deve essere scelto a affinché l'equazione: $\frac{x}{a} + \frac{2x}{2-a} = \frac{a-x+2}{2a-a^2}$
- a) sia equivalente a $x = \frac{3}{4}$
- b) sia equivalente a $x = 0$
- 8) è possibile scegliere il parametro a in modo che l'equazione: $\frac{x}{a-3} + \frac{a+3}{(a-3)^2} - \frac{3}{(a-3)^2} = 1 + \frac{a}{(a-3)^2} - 5 + (2-a)(2+a) + a^2 + 1$ sia equivalente a $x = 0$? (giustifica la risposta svolgendo i calcoli)
- 9) Sia $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ con $x, y \in \mathbb{Q}$
- a) spiega perché f è una funzione.
- b) f è iniettiva? (motivare tutte le risposte date)

- 10) Utilizzando la formula $\binom{m}{h} = \frac{m!}{h!(m-h)!}$ verifica che: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- 11) Quanti sono i numeri di quattro cifre (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) tutte distinte, che non cominciano con lo zero? (motiva la risposta)

cenni di soluzioni, da integrare ed approfondire

1) Esegui le seguenti equazioni:

a) $\frac{1}{5}(x-11) - 2x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4}x - 2 - x - \frac{x}{60}$

b) $\frac{5}{3} + x - \frac{x+2}{3} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)^2 - \frac{9}{4}$

c) $\frac{(2x+2)(1-x)}{3} = \frac{2(1-2x)^2 - 6(x-1)^2}{2} - 3 + \frac{1}{3}(17-5x^2) - 2x$

d) $\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{5} - 2x\right) + \frac{5}{3} = \frac{x^2+1}{4} - 3x\left(2 + \frac{1}{12}x\right) - \frac{3}{5}(2-5x) + 2\frac{x}{5}$

(%i2) solve([1/5*(x-11)-2*x*(1/3 - 1/5) = 3/4*x -2-x-x/60], [x]);

(%o2) [x = 1]

(%i3) solve([5/3+x-(x+2)/3+(x-3/2)*(x+3/2)=(x+1)^2-9/4], [x]);

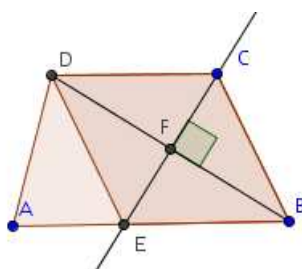
(%o3) [x = 0]

(%i5) solve([(2*x+2)*(1-x)/3 = (2*(1-2*x)^2 - 6*(x-1)^2)/2 - 3 + (1/3)*(17 - 5*x^2) - 2*x], [x]);

(%o5) [x = x]

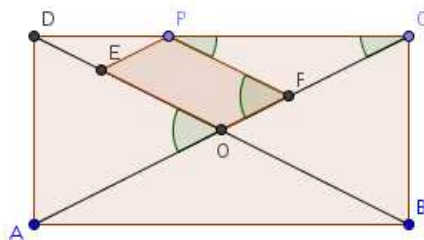
(%i6) solve([(2*x - 3/4)^2 + 2*x*(1/5 - 2*x) + 5/3 = (x^2+1)/4 - 3*x*(2 + 1/12*x) - 3/5*(2-5*x) + 2*x/5], [x]);

(%o6) []

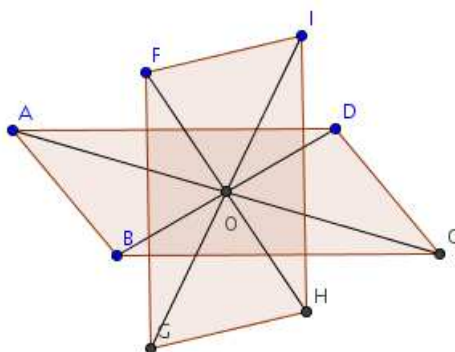


- 2) Dato un trapezio ABCD, di basi AB (maggiore) e CD (minore), sapendo che $CD=CB$, sia r la retta per C perpendicolare alla diagonale DB, detta E l'intersezione di r con la base maggiore AB, si dimostri che il quadrilatero DEBC è un rombo. *{visto in classe}* $DC=CB$, il triangolo DBC è isoscele, $\widehat{CDB} = \widehat{DBC}$ dato che $DC \parallel AB$ si ha che $\widehat{EBD} = \widehat{CDB}$ in quanto alterni interni, si ricava così che i triangoli CDF e EBF sono congruenti ed in particolare $EB=CB$. Facilmente si ricava che $DE=CB$ **q.e.d**

- 3) Per un punto P di un lato di un rettangolo si conducano le parallele alle diagonali. Dimostrare che il parallelogramma limitato da queste parallele e dalle diagonali ha perimetro congruente ad una diagonale. *{già assegnato}* Basta dimostrare che il triangolo PFC è isoscele, gli angoli $\widehat{AOD} = \widehat{OFP}$ in quanto corrispondenti, dato che $\widehat{CDO} = \widehat{OCD}$ ABCD è un rettangolo, si ha che $\widehat{DOA} = \widehat{CDO} + \widehat{OCD}$ da cui $\widehat{CPF} = \widehat{FCP}$ **q.e.d**



- 4) Si considerino i parallelogrammi ABCD e FGHI aventi entrambi O come unto di intersezione delle diagonali.



- a) Si dimostri che BHDF è un parallelogramma.
- b) Congiungendo opportunamente gli otto vertici dei due parallelogrammi è possibile costruire altri parallelogrammi? Se sì quali? a) *Basta osservare che le diagonali di BHDF sono BD ed FH, diagonali dei parallelogrammi di partenza e quindi si bisecano scambievolmente.* b) *BGDI, HCFA, HDFB, CIAG ...*

5) Come deve essere scelto a affinché l'equazione: $\frac{x}{a} + \frac{2x}{2-a} = \frac{a-x+2}{2a-a^2}$

6) sia equivalente a $x = \frac{3}{4}$

7) sia equivalente a $x = 0$

```
(%i1) solve([x/a + 2*x/(2-a) = (a-x+2)/(2*a-a^2)], [x]);
```

```
(%o1) [ x =  $\frac{a+2}{a+3}$  ]
```

```
(%i2) solve([(a+2)/(a+3)=3/4], [a]);
```

```
(%o2) [ a = 1 ]
```

```
(%i3) solve([(a+2)/(a+3)=0], [a]);
```

```
(%o3) [ a = - 2 ]
```

- 8) è possibile scegliere il parametro a in modo che l'equazione: $\frac{x}{a-3} + \frac{a+3}{(a-3)^2} - \frac{3}{(a-3)^2} = 1 + \frac{a}{(a-3)^2} - 5 + (2-a)(2+a) + a^2 + 1$ sia equivalente a $x=0$? (giustifica la risposta svolgendo i calcoli) *le condizioni di esistenza per $a \neq 0$*

... quindi

```
(%i8) solve([x/(a-3)+(a+3)/(a-3)^2 - 3/(a-3)^2 = 1 + a/(a-3)^2 - 5 + (2-a)*(2+a)+a^2+1 ], [x]);
```

```
(%o8) [ x = a - 3 ]
```

- 9) Sia $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ con $x, y \in \mathbb{Q}$

- 10) spiega perché f è una funzione. $\{...\}$

- 11) f è iniettiva? (motivare tutte le risposte date) $f(1, -1) = f(-1, 1) = 4$

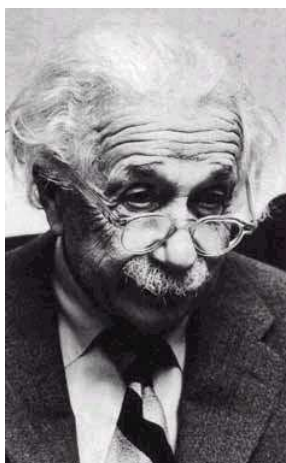
- 12) Utilizzando la formula $\binom{m}{h} = \frac{m!}{h!(m-h)!}$ verifica che: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- 13) Quanti sono i numeri di quattro cifre (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) tutte distinte, che non cominciano con lo zero? (motiva la risposta) *4536, la prima cifra può essere scelta fra 9 (non c'è lo zero) la seconda, avendo scelto la prima e "aggiunto" lo zero, in 9 modi, la terza in 8 e la quarta in 7, $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$*

2.2.2 Appunti

“Io non ho talenti straordinari. Sono solo appassionatamente curioso” Albert Einstein



$\frac{1}{3} = 0.3333\dots$ o meglio $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ ma in base 3 si ha $(1)_{10} = (1)_3$ e $(3)_{10} = (10)_3$ quindi $\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)_3$ eseguendo la divisione si ha: $\left(\frac{1}{10}\right)_3 = 0.1$ *provare per credere ...*

$\frac{8}{7} = 1.\overline{142857} (8)_{10} = (11)_7 (7)_{10} = (10)_7$ eseguendo la divisione si ha: $\left(\frac{11}{10}\right)_7 = 1.1$

Non solo numeri

...

Si è portati a pensare che, nel mondo quotidiano, se si fa uso di un qualche strumento al posto di un altro, il primo sia sicuramente il migliore. Altrimenti perché utilizzarlo? In realtà questa intuizione non sempre è vera e in alcuni casi fallisce miseramente.

Uno di questi esempi lo avete probabilmente davanti a voi in questo momento: la tastiera del vostro computer. Chiunque veda tale oggetto per la prima volta, penso si chieda perché le lettere non siano disposte secondo il loro solito ordine, alfabetico appunto, ma siano sparse senza un apparente filo logico.

E penso che ognuno di questi, liquidi il problema pensando che questa disposizione sia migliore per un qualche motivo irrilevante e che quindi non meriti ulteriori indagini. In realtà tale disposizione è una delle peggiori, se non la peggiore.

I primi a trovarsi di fronte una tastiera non facevano utilizzo di un computer, bensì di una macchina da scrivere. E su tale macchina da scrivere le lettere erano disposte in ordine alfabetico, come logica vorrebbe. Ma ben presto insorse un problema: le dattilografe (tale lavoro era riservato solamente alle donne) diventarono presto capaci e veloci, e questo faceva incastrare i martelletti della macchina. Si doveva ricorrere quindi a uno stratagemma per rallentare la velocità di battitura delle suddette. Questo stratagemma fu, appunto, disordinare le lettere sulla tastiera, rendendo il loro ritrovamento meno logico e quindi più lento. Questo diede origine a vari tipi di tastiera e, visti i presupposti, quello sopravvissuto fino ad oggi è probabilmente il peggiore.

Ora questa disposizione dei tasti non ha più senso, le macchine moderne sono in grado di gestire tranquillamente qualsiasi velocità possa essere raggiunta da un essere umano. Eppure la dispo-

sizione dei tasti permane: oramai troppe persone sono abituate ad essa rendendo molto difficile il suo abbandono.

Tutti noi abbiamo imparato, sin da tenera età, a contare. La prima cosa che ci viene insegnata è contare fino a 10, che è la base del nostro sistema di numerazione e il numero delle cifre che abbiamo ereditato dagli arabi. Ma soprattutto è il numero delle dita presenti nelle nostre mani. Imparammo poco dopo che questo non è l'unico "modo di contare": il tempo, ad esempio, viene scandito da un sistema di numerazione diverso. I minuti, infatti, sono composti da 60 secondi e le ore da 60 minuti. Ci si abitua in fretta al sistema sessagesimale, ma questo non toglie che la prima volta che viene incontrato generi qualche perplessità.

Questo, però, non è un vero e proprio sistema di numerazione, perché i numeri vengono comunque espressi secondo il sistema usuale. Chi studia un po' di matematica o informatica viene però a scoprire che ci sono svariati sistemi di numerazione, tutti equivalenti fra loro. In pratica non è necessario utilizzare il numero 10 come base (in realtà sì, se leggiamo tale numero "uno zero" e non "dieci"), ma si può prendere un qualsiasi numero e utilizzarlo come base di numerazione. I sistemi più usati, legati soprattutto all'informatica, sono il binario (base 2), l'ottale (base 8) e l'esadecimale (base 16). In tali sistemi le cifre utilizzate sono sempre quelle a noi più familiari (tranne nell'esadecimale, dove le cifre non sono sufficienti e vengono usate le prime 6 lettere dell'alfabeto), ma nulla vieterebbe di inventare simboli completamente

nuovi per ogni sistema. Con una tale scelta di sistemi di numerazione, quindi, siamo di nuovo di fronte al classico quesito:

quale usare? La risposta, ovvia, è semplicemente: quello migliore. Ma, mentre il nostro sistema in base 10 è sicuramente il più comodo, non è invece il migliore dal punto di vista numerico. Secoli di storia hanno portato all'uso di tale sistema solo perché noi abbiamo dieci dita. Quando i bambini imparano a far di conto, infatti, il primo metodo che imparano è farlo con le dita. Avessimo avute 8 dita, il nostro sistema di numerazione sarebbe probabilmente diverso.

Ma qual è il sistema ottimale? Sicuramente, dato che l'evoluzione ha favorito nel cervello umano meccanismi riconoscitivi e non di calcolo, la scelta deve ricadere su un numero non eccessivamente grande.

Infatti, anche se basi di numerazioni maggiori permettono di scrivere i numeri in modo più compatto, esse causano una proliferazione di simboli (le cifre), dato che ne servono tanti quanto è il numero della base. Possiamo quindi affermare, senza timor di contraddizioni, che tale base ottimale non deve essere superiore a 20, in quanto già 20 simboli (cifre) diversi possono già essere eccessivi.

Se prendiamo in considerazione, quindi, i numeri compresi tra 1 e 20, la base migliore, ve lo svelo già ora, risulta poco più grande di quella comune. Essa è il numero 12. Il motivo è semplice: il 12 è il numero che, nel nostro "range" di ricerca, ha più divisori interi. Esso permette quindi di eseguire calcoli ed esprimere numeri ricorrendo a un numero minore di frazioni. Non a caso il numero 12 viene utilizzato in alcuni sistemi di numerazione: ad esempio il sistema monetario del Regno Unito, prima di venire sostituito dal decimale il 15 febbraio 1971, era duodecimale (in base 12). I sistemi di misurazione delle lunghezze nel Regno Unito e negli Stati Uniti includono tuttora sistemi duodecimali: 12 linee fanno un pollice e 12 pollici fanno un piede. Purtroppo sia il Regno Unito sia gli Stati Uniti hanno subito varie influenze e i loro sistemi (lunghezze, pesi e capacità) ora sono un miscuglio di sistemi diversi.

La verifica che il 12 è la base migliore è presto fatta: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19 sono numeri primi, quindi non hanno divisori (al di fuori di se stessi e 1 ovviamente, come, peraltro, tutti gli

altri numeri). 4 e 6 hanno rispettivamente 1 e 2 divisori e sono troppo piccoli come basi; i numeri avrebbero rappresentazioni troppo lunghe e scomode. 8, 10 e 14 hanno ancora 2 divisori; il 16 ne ha 3 ma sono tutti potenze (e quindi multipli) di 2, mentre converrebbe avere almeno anche il 3 come divisore, dato che è un piccolo numero primo. Il 18 sarebbe un buon candidato, perché ha 4 divisori e tra questi ha sia il 2 che il 3. Ma il 18 è già pericolosamente vicino al 20: se 20 cifre sono troppe, 18 non lo sono poi tanto di meno. Ci rimane quindi il 12, che ha 4 divisori, ha tra questi sia il 2 che il 3 ed è poco più grande della base a cui siamo già abituati, quindi ha dimensioni accettabili, costringendoci ad aggiungere sole due nuove cifre.

Che il sistema duodecimale generi meno frazioni discende dal fatto che ha 4 divisori della base, ben 2 in più che il sistema decimale. Inoltre include tra essi i primi 3 numeri naturali oltre a 1, che sono tra i più usati per le frazioni di tutti i giorni. La cosa diventa più evidente se facciamo un salto di ordine di grandezza. Uno strumento che siamo abituati ad usare tutti i giorni sono le percentuali. Dato che ci vengono molto comode le cifre tonde, poi, siamo abituati ad usare numeri grandi con più zeri possibile, come 100, 1000, 10000 e così via.

Prendiamo come esempio il numero 100, presente anche nelle percentuali. Nel sistema duodecimale, il corrispondente salto di ordine di grandezza a quello da 10 a 100 è dato dal numero 144 (ossia 12×12). Se vogliamo prendere la metà, ossia il 50%, di 100, abbiamo 50, un numero intero. Fin qua nessun problema. La metà di 144 è 72. Dato che siamo nel sistema

duodecimale, non possiamo più dire 50%, quindi il suo equivalente sarà $72/144$ (ricordo che 50% non è nient'altro che $50/100$, ossia $1/2$). Usiamo le frazioni perché non abbiamo un simbolo corrispondente a %). Il problema comincia quando si vuole un terzo del numero. Sicuramente è un problema davanti al quale vi sarete trovati più e più volte: $1/3$ di 100 dà infatti 33,3333... un numero periodico. Alquanto seccante: se lo si vuole scrivere in cifre, per intuirne la grandezza, si ha un numero con la virgola, infinito per giunta. L'unica altra soluzione è la frazione $100/3$, ma non ci aiuta molto intuitivamente: anche $500/15$ o $700/21$, ad esempio, danno lo stesso risultato, ma la loro equivalenza non è immediatamente visibile. In più, se vogliamo esprimere $1/3$ in percentuale dobbiamo accontentarci di 33%, che è approssimato e quindi non propriamente esatto, e in calcoli grandi o precisi può creare problemi. Vediamone il corrispondente duodecimale: 144 diviso 3 fa 48. In questo caso abbiamo, invece, un numero intero. Possiamo quindi esprimere la "percentuale duodecimale" come $48/144$, che è un numero intero (pensato come percentuale e non come frazione).

E così via, avremo molte più divisioni e percentuali che avranno come risultato un numero intero: questo si vede osservando i divisori dei due numeri: 100 ha 6 divisori (2, 5, 10, 20, 25, 50), 144 ne ha ben 12 (2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72). E facile intuire che seguendo gli ordini di grandezza successivi, tali divisori aumentino. Abbiamo perso, nella nuova base, la divisibilità per 5 ma abbiamo guadagnato quella per 3, molto più fruttuosa. So già qual'è l'obiezione che tutti quanti state per rivolgermi: sebbene si ottengano molti più numeri interi, questi sono molto più strani degli usuali, e meno tondi: al posto di 10, 100, 1000 abbiamo 12, 144, 1728, al posto di 50 abbiamo 72, al posto di 33 (anche se approssimato) abbiamo 48.

Il primo problema da risolvere, per dimostrare che il sistema duodecimale è tanto comodamente utilizzabile quanto il sistema decimale, è l'adozione dei simboli. Si potrebbero utilizzare le cifre già esistenti,

integrandole con 2 nuovi simboli, ma questo creerebbe confusione e ci ancorerebbe al vecchio sistema. Quindi adotteremo 12 simboli completamente nuovi. Per semplicità non inventeremo ex novo 12 grafemi, ma utilizzeremo le lettere greche già esistenti, in modo da avere già pronti all'utilizzo i simboli e i loro rispettivi nomi. Eccoli riassunti

0	ω	omega	6	ζ	zeta
1	α	alfa	7	η	eta
2	β	beta	8	θ	teta
3	γ	gamma	9	ι	iota
4	δ	delta	10	κ	kappa
5	ε	epsilon	11	λ	lambda

La scelta di ω come 0 è semplicemente per la similitudine dei simboli. In questo modo le altre lettere possono mantenere il valore relativo alla loro posizione nell'alfabeto.

Ora che abbiamo i simboli abbiamo un altro problema da risolvere: i numeri, nel sistema decimale, hanno nomi relativi al sistema. I multipli di 10 hanno nomi propri (venti, trenta ecc.) e i numeri intermedi si ottengono per composizione tra questi e i nomi delle cifre, a parte i numeri tra 10 e 20, per motivi linguistici (ventidue, trentacinque, ecc.). Ad ogni passaggio di multiplo, quindi, abbiamo un cambio di nome. Ma nel nostro sistema questi nomi non vanno bene. Il numero 11 qua è una cifra e ha già un nome, il numero 12 è il passaggio è la base, potremmo chiamarla "dieci", ma genererebbe confusione, il numero 13 deve avere un nome composto. Peschiamo di nuovo tra le cose già esistenti: per evitare confusione con i numeri normali, pur mantenendo una certa intuitività, utilizzeremo gli avverbi numerali latini: semel, bis, ter, quater, quinquies, sexies, septies, octies, novies, decies, undecies. Questi rappresenteranno i multipli consecutivi di 12 (compreso) come accade nei numeri normali per i multipli di 10: avremo quindi semel = 12, bis = 24, ter = 36, eccetera. Usiamo ancora vices per 144, la seconda potenza di 12 (come 100 lo è per 10), e tricies per la terza (il corrispondente di 1000.) I numeri intermedi si otterranno ovviamente per composizione: ad esempio $\delta\iota$ sarà quateriota, $\eta\eta$ sarà septieseta, $\beta\varepsilon$ sarà bisepsilon. Volendo con i numerali cardinali latini si possono creare anche dei cardinali per il nostro sistema (per dare nomi alle frazioni). Ora abbiamo tutto ciò che ci serve.

Ora che i due sistemi sono equivalenti sia dal punto di vista simbolico che da quello "linguistico", possono essere confrontati direttamente. Innanzitutto notiamo che la base, cioè il numero 12 (semel nel nuovo sistema), è rappresentata dai simboli $\alpha\omega$, cioè l'1 e lo 0 proprio come 10. Questa è una caratteristica comune a tutti i sistemi di numerazione. Vices (144 in decimale) sarà quindi $\alpha\omega\omega$ e tricies (1728 in decimale) sarà $\alpha\omega\omega\omega$ proprio come 100 e 1000. Anche i nomi sono semplici: al dieci, cento e mille abbiamo "sostituito" semel, vices e tricies (e non più dodici, centoquarantaquattro e millesettecentoventotto). La metà di $\alpha\omega\omega$ (vices) sarà $\zeta\omega$ (sexies, 72 in decimale). Anche qui abbiamo un numero di due cifre con un nome semplice, proprio come cinquanta (e non più settantadue). Se vogliamo calcolare $1/3$ (pardon, α/γ) di vices, otteniamo $\delta\omega$ (quater, 48 in decimale). Qui troviamo la differenza: il numero è intero, a differenza di $100/3$, e ha anche un nome più semplice. Questo può sembrare complicato, ovviamente sono nomi e simboli ai quali non siamo abituati. Ma se la nostra specie avesse 12 dita, saremmo stati abituati ad utilizzarlo dalla nascita e la cosa ci sembrerebbe naturale, mentre il sistema decimale ci apparirebbe complicato quanto questo. Con la differenza che questo nuovo sistema di numerazione sarebbe migliore e riusciremmo tutti a riconoscerlo tranquillamente.

...

tratto da un articolo di Matteo Manfredini università di Parma

2.3 Secondo anno

2.3.1 I testi dei compiti

Compito 11. 1) Data l'equazione:

i) $\frac{5(a+x)}{2}a - \frac{4(b+x)}{3}b = 5\frac{b}{a} + \frac{6b-4a}{b}$ si verifichi che $2b+3a$ è una soluzione.

ii) $x = 2b + 3a$ è soluzione $\forall a, b \in \mathbb{Q}$? (motivare le risposte)

2) Quale valore si deve attribuire alla lettera b affinché l'equazione: $(x-2b)^2 + (bx+1)(x+2) + 4x = 0$ risulti di primo grado in x ?

3) Risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni:

i) $3\left(x - \frac{1}{4}\right) - 4\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}(x+1) - \frac{1}{2}(x+3)$

ii) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1-6x}{3} = x + \frac{1}{3}(2x+5)$

4) Semplifica le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{l} \frac{5x-2+\frac{25x^2+12}{5x+2}}{5\frac{x}{5x-2}-\frac{2}{5x+2}+\frac{25x^2+4}{25x^2-4}} \qquad \frac{\frac{6b-4a}{a^2-b^2}}{\frac{4a^2+9b^2-12ab}{a^3-2a^2b+ab^2}} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{3ab-2a^2}{a^3-a^2b} \end{array}$$

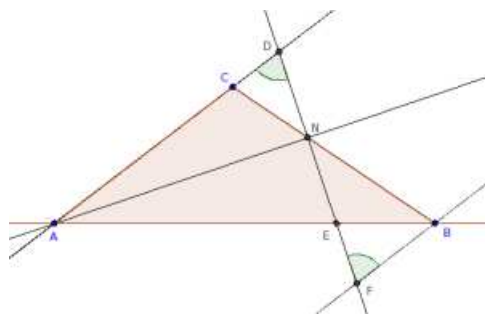
5) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\begin{array}{l} \frac{16-x^2}{x^2(x+1)} \geq 0 \qquad \qquad \qquad x-3 \leq \frac{5}{3-x} \\ \frac{4x^2-x^4}{x(x^2-1)} \geq 0 \qquad \qquad \qquad \frac{27-x^3}{x^2-4x-3} \leq 0 \end{array}$$

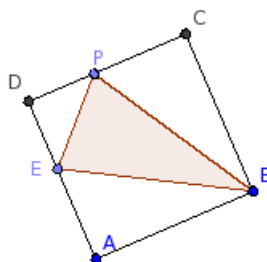
6) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.

7) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.

8) Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezioni con AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostrare che i triangoli ADE, BEF sono isosceli e che i loro angoli sono a due a due congruenti.



- 9) Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo, esso viene scomposto in quattro triangoli fra loro congruenti.



- 10) Dato il quadrato ABCD sia $\overline{DE} = b$ e $\overline{DA} = a$. Determinare la posizione di P affinché l'area del triangolo PEB sia metà dell'area del quadrato ABCD

Compito 12. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto ad $a \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $3 \frac{x}{3-a} = \frac{a-x+2}{3a-a^2} - \frac{x}{a}$

b) $\frac{3x+a}{a^2-4} + \frac{6x}{a-2} = 5 \frac{x}{a+2}$

- 2) Trova tre numeri naturali consecutivi sapendo che, aggiungendo al doppio del primo metà del secondo si ottiene il triplo del terzo diminuito di $\frac{25}{2}$
- 3) Un ipermercato ha acquistato lo scorso anno una certa quantità di jeans. Ne ha venduti ogni mese, per i primi quattro mesi dell'anno, il 15%; nei mesi successivi ne ha venduti 140 ogni mese e alla fine dell'anno ha avuto una rimanenza di $\frac{2}{19}$ dei jeans acquistati. Quanti erano i jeans in tutto?
- 4) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\left(\frac{x}{4} + 1\right)^2 - \frac{x}{2}(x+4) + \frac{7x^2}{16} \leq \frac{3}{2}(x+4) + 7$

b) $2x + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < x \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x-1}{2}$

c) $\frac{a-x}{b} - \frac{x-b}{a} \geq \frac{(a-b)^2}{ab}$ con $a > b > 0$

d) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} \geq \frac{a}{b^3} - \frac{b}{a^3} \quad a > b > 0$

$$\text{e) } \frac{(x-1)(3-x)}{3+x} \leq 0$$

f) $\frac{(x-2)(2-x)}{(3+x)(3-x)} \geq 0$

- 5) Due circonferenze sono secanti nei punti A e B. Dimostrare che, condotti i loro diametri AC e AD, i tre punti C, B, D sono allineati.
- 6) Sono date due circonferenze di centri C ed O tangenti esternamente nel punto A e tangenti alla retta r nei punti T e Q. Detto M il punto di intersezione della tangente in A con la retta r dimostrare:
 - a) che M è il punto medio di TQ
 - b) l'angolo $\widehat{CMO}$ è retto
- 7) Dimostra che l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza.
- 8) Dati un cerchio ed una retta ad esso esterna, qual è l'insieme dei punti che hanno uguale distanza dal cerchio e dalla retta.

Compito 13. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \frac{16 - x^2}{x^2(x + 1)} \geq 0$$

$$\text{b) } x - 3 \leq \frac{5}{3 - x}$$

- 2) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+3}{2} - \frac{2}{3} < \frac{x-1}{6} - 1 \\ 2x-2 > x+1 \end{cases}$$

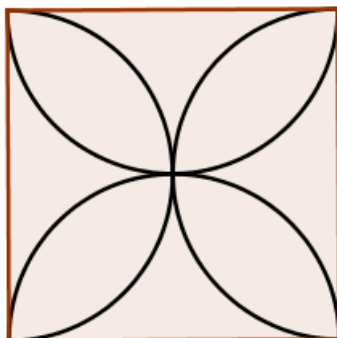
$$\text{b) } \begin{cases} \frac{2x-3}{x-5} \leq 0 \\ \frac{13}{x} - 5 < 21 \end{cases}$$

- 3) Disegna nel piano cartesiano le seguenti leggi:

$$\text{a) } y = \frac{|x^2 + x|}{x} - x - 3$$

b) $y = \frac{|x^2 - x|}{x - 1} + |x|$

c) $|y| = |x + 1| + |x| + 1$



- 4) Per ricamare un quadrato con dentro quattro semicirconferenze, (vedi figura) sono disponibili 7.14m di filo colorato.
- a) Quali possibili dimensioni deve avere il quadrato affinché sia realizzabile il ricamo? (utilizzare $\pi = 3.14$)
- b) * Qual è l'area del fiore, nel caso in cui si utilizzi tutto il filo?
- 5) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.
- 6) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.
- 7) Spiega il seguente codice: `public static void main(String[] args) {`
`double vetA[]=new double[2];`



```
double vetB[]=new double[2];
double pScal=1;
vetA[0]=Math.random();
vetA[1]=Math.random();
vetB[0]=Math.random();
vetB[1]=Math.random();
pScal=vetA[0]*vetB[0]+vetA[1]*vetB[1];

String          testo="("+String.valueOf(vetA[0])+","+String.valueOf(vetA[1])+")
("+String.valueOf(vetB[0])      +","+String.valueOf(vetB[1])+")";

System.out.print(testo);

}
```

- 8) Costruisci nel TaxiPiano il luogo geometrico dei punti P la cui differenza delle distanze dai punti $A = (-2, 0)$ e $B = (2, 0)$ è pari a 2.
- 9) Quanti sono gli “anagrammi” distinti della parola JOAOGAS. Se ordiniamo tutti gli “anagrammi” in ordine alfabetico crescente (**A**-B...G...I-**J**...N-**O**...R-**S**...) quale posizione occupa l’anagramma GAASOJO

Compito 14. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$

b) $3x^2 - 5x + 10 = 0$

- 2) Determina i valori di $m \in \mathbb{R}$ per cui l’equazione $mx^2 + 2mx + 1 = 0$:

- a) ammette una soluzione doppia
b) ammette soluzioni reali distinte

- 3) Disegna nel piano cartesiano le seguenti leggi:

a) $y = \frac{|x^2 + 2x|}{x} - x$

b) $y = |x - 1| + |x + 1|$

- 4) Risolvi i seguenti sistemi indicando per quali valori del parametro reale a il sistema ammette soluzioni oppure non ammette soluzioni:

(a) $\begin{cases} ax - ay = -1 \\ x - y = a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ (a - 1)x - ay = a + 1 \end{cases}$

- 5) Ci sono 5 contenitori indistinguibili: quattro contengono monete eque (mostrano T e C con la stessa probabilità), nel quinto monete truccate (hanno entrambe le facce T). Viene scelto a caso un contenitore, si estrae una moneta, viene lanciata 2 volte. Si ottiene 2 volte testa.

- a) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia equa?
b) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia truccata?

- 6) Semplifica le seguenti espressioni:

a) $\frac{\frac{4x}{y^2}}{\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}}$ dove $x > 0$ b) $\sqrt{x^2 a + x^2 b}$ dove $a > 0 \wedge b > 0$

- 7) In un triangolo equilatero ABC costruisci il baricentro G. Disegna l’asse del segmento AG e l’asse del segmento BG. Dimostra che il lato AB è diviso dai due assi in tre parti congruenti.
- 8) Traccia una retta r, un suo punto P e un punto A non appartenente ad essa. Indica con H il punto medio del segmento AP. Costruisci l’asse s del segmento AP, che interseca la retta r nel punto M. Sulla retta s determina il punto M’, tale che MH=M’H. Qual è il luogo dei punti M’ al variare di P su r, fissato A?

9) Dimostra la seguente uguaglianza: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

10) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^2 è congruo 0 o 1 modulo 4

Compito 15. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$ Sapendo che $4x - y = 6$

b) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 4$ sapendo che $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{2}{10}y = \frac{3}{5}$

2) Risolvi il seguente sistema:

a) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{6} = \sqrt{2} \\ y\sqrt{2} - 3x = \sqrt{3} \end{cases}$

3) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $kx^2 + 2(k-1)x + 1 + k = 0$:

a) ammette due soluzioni la cui somma vale -4

b) ammette due soluzioni il cui prodotto vale $\frac{3}{2}$

4) Disegna nel piano cartesiano la seguente legge:

a) $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{1 + x + x^2} - |x + 1|$

5) In un sacchetto ci sono 15 palline rosse e 5 gialle; quante palline gialle occorre aggiungere perché la probabilità di estrarre per due volte consecutive (senza rimettere la pallina nel contenitore) una pallina rossa sia $\frac{21}{65}$?

6) Un dado viene lanciato 3 volte.

a) Qual è la probabilità p di ottenere 6 **almeno** una volta?

b) Quante volte si deve lanciare il dado perché la probabilità di ottenere 6 **almeno** una volta sia maggiore o uguale al 90%. (*scrivere le formule risolutive senza sviluppare i calcoli*)

7) Dopo aver indicato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti espressioni:

a) $\sqrt{\frac{y^3 + 4y^2 + 4y}{4b^3 + 12b^2 + 9b}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)a^4}{x^3}}$

8) Dimostra che due corde equidistanti dal centro della circonferenza sono congruenti

9) Dimostrare che le diagonali AE, AC, DF e DB di un esagono regolare ABCDEF, delimitano un rombo.

10) Indica due numeri razionali che:

a) possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

b) non possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (*motiva la risposta, spiegando il procedimento seguito*)

11) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^4 è congruo 0 o 1 modulo 16

Compito 16. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto al parametro $h \in \mathbb{R}$ la seguenti equazione:

a) $(1 - h)x^2 - 2(h + 1)x + 1 = 0$

b) $\frac{2x - k}{x - k + 3} = 1$

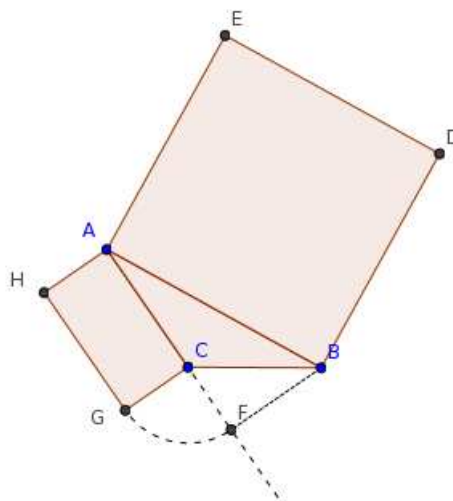
2) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:

a) $1 + \frac{x}{x+1} + \frac{2x^2 - 4}{4 - x^2} = 0$

b) $\frac{2x - 1}{2x^2 + x + 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = 1$

3) In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Dimostrare che il quadrato costruito sulla base maggiore è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.

4) Dimostrare che il quadrato costruito sul lato maggiore (in figura ABDE) di un triangolo ottusangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati e del doppio del rettangolo avente per dimensioni uno dei lati minori e la proiezione del secondo sulla retta su cui giace il primo (in figura ACGH).



a) Cosa si può dire se il triangolo è acutangolo? (motiva la risposta)

5) Descrivi il luogo geometrico dei punti medi M, delle corde uscenti da un punto P di una fissata circonferenza.

6) Ci sono due contenitori indistinguibili (A e B) ciascuno contenente 50 palline, in A ci sono 30 palline rosse e 20 bianche, in B 10 rosse e 40 bianche.

a) Scelgo a caso un contenitore e estraggo 4 palline:

i) qual è la probabilità di pescare 4 palline bianche?

ii) qual è la probabilità di pescare almeno 1 pallina bianca?

b) se ho estratto 5 palline rosse:

i. qual è la probabilità che il contenitore scelto sia B

7) Come si istanzia una classe in Java? (scrivi i comandi)

8) Disegna la seguente funzione: $y = \frac{|x^4 - 4x^2 + x - 4|}{x^2 + 1}$

Compito 17. (risolvere in beata solitudine!!!)

1) **Risolvi in $\mathbb{R}$**

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} > 0$

c) $\frac{x}{2 - x} + \frac{1}{x^2 - 4} < 1$

b) $\frac{x^4 - 1}{(1 - x)(x^3 - 4x)} \leq 0$

d) $\sqrt{2x + 11} < x + 4$

2) **Risolvi il seguente problema:**

a) In un triangolo rettangolo con i cateti di $2\sqrt{5} \text{ cm}$ e $\sqrt{5} \text{ cm}$ inscrivere un rettangolo con un lato sull'ipotenusa e con la diagonale di 2 cm. Calcolare le dimensioni del rettangolo.

3) **Risolvi i seguenti problemi:**

a) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.

b) Dato un triangolo ABC, rettangolo in A, si tracci la circonferenza di centro A e tangente all'ipotenusa BC. Da B e C si conducano le ulteriori tangenti alla circonferenza e siano M ed N, rispettivamente, i punti di contatto.

i) Dimostrare che il quadrilatero BCMN è un trapezio rettangolo.

ii) Dimostrare che A è allineato con M ed N.

c) Dato un triangolo ABC, si prolunghi la bisettrice CD fino ad incontrare in E la circonferenza circoscritta. Dimostra che i triangoli ACD, EBD, ECB sono simili.

4) **Risolvi il seguente problema:**

a) Dati i punti A(-2,1) e B(2,-1), trovare le coordinate di C vertice del triangolo ABC di base AB avente area 3

5) **Risolvi il seguente problema:**

a) Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse e un numero variabile di palline bianche. Più precisamente l'urna i-esima contiene 4 palline rosse e i bianche. (L'urna 7 contiene 4 rosse e 7 bianche). Viene scelta a caso un'urna:

i) qual è la probabilità che estraendo due palline siano una bianca e una rossa?

Compito 18. 1) **Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni :**

$$(a) \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - 2 \right)} < \frac{2}{x}$$

$$(b) \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{x+3}$$

$$(c) \frac{3x-2}{x} - 4 \leq 0$$

$$(d) x+2 > \sqrt{x^2-6x}$$

2) Geometria Analitica :

- a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-3,1), B(3,-1):
- calcolare l'equazione della retta per O(0,0) perpendicolare alla retta AB
 - si determinino le coordinate del punto C, vertice del triangolo isoscele ABC di base AB la cui area vale 10

3) Geometria Sintetica:

- a) Dato un triangolo isoscele ABC, si prolunghi la base AB dalla parte di B, di un segmento BD tale che $\angle CDB = \angle CBD - \frac{\pi}{2}$. Dimostrare che l'altezza CH è media proporzionale fra HB e HD
- b) Dimostrare che inscrivendo in un triangolo rettangolo un quadrato con un lato sull'ipotenusa, questa (l'ipotenusa) rimane divisa in tre parti delle quali una è media proporzionale fra le altre due.

4) Problemi di secondo grado:

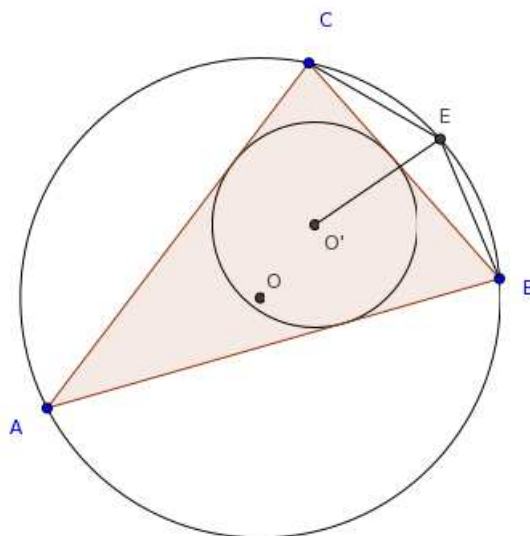
- a) In un rettangolo avente le dimensioni di 6 e 8 si riporta sui lati maggiori, a partire dagli estremi A e C di una diagonale un segmento di lunghezza x e sui lati minori, sempre partendo da A e C, un segmento di lunghezza 2x. Congiungendo gli estremi (distinti da A e C) dei quattro segmenti, si ottiene un quadrilatero. Determinare x in modo che il quadrilatero abbia area 28.

5) Probabilità e Combinatorio:

- a) Un'urna contiene due palline rosse e quattro nere. Due giocatori A e B giocano nel seguente modo: le palline vengono estratte ad una ad una e messe da parte. A vince se l'ultima pallina estratta è rossa, altrimenti vince B.
- Qual è la probabilità che vinca A
 - Qual è la probabilità che vinca A sapendo che la prima pallina estratta è rossa.
- b) Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Ne vengono estratte 5 con reimbussolamento, Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

6) se avanza tempo e ... comunque per casa

- a) Sia ABC un triangolo con O' centro del cerchio inscritto, e sia E il punto medio dell'arco BC (che non contiene A) del cerchio circoscritto ad ABC . Si dimostri che $\overline{EB} = \overline{EO'} = \overline{EC}$



Compito 19. 1) Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni :

a) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x^2} \leq 0$

c) $\sqrt{x^2 - 4} + 1 < 2x$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2$

d) $\sqrt{x^2 - 4x} > \frac{1}{2}x - 6$

2) **Geometria Analitica:**

- a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-2,1), B(2,-1):
- b) determinare le coordinate dei punti C per cui il triangolo ABC è rettangolo in C e isoscele di base AB

3) **Geometria Sintetica:**

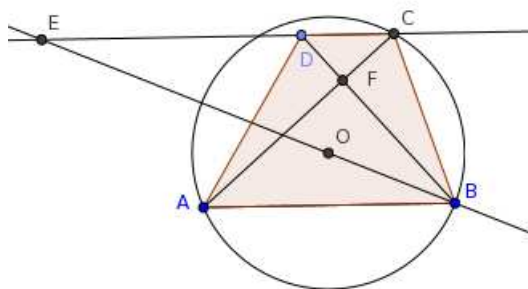
- a) Si proiettano i quattro vertici di un rettangolo ABCD sulle diagonali di questo. Dimostrare che le quattro proiezioni sono i vertici di un rettangolo simile a quello dato.
- b) In una circonferenza è inscritto un triangolo ABC con il lato AB parallelo ad una corda MN (con A ed M dalla stessa parte rispetto all'asse del segmento AB); le rette AB e CN si intersecano in un punto P. Dimostrare che $CA:CM=CP:CB$

4) **Probabilità e Combinatorio:**

- a) Un urna contiene 100 palline numerate nel seguente modo: una pallina con il numero 1, 2 palline con il numero 2, 1 palline con il numero 3, 2 con il numero 4 ... (pari doppie, dispari singole).
 - i) Qual è la probabilità di estrarre il 100?
 - ii) Qual è la probabilità di estrarre il 2?
 - iii) Ne estraggo contemporaneamente 5. Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

5) **se avanza tempo e ... comunque per casa**

- a) Dimostrare che in un trapezio, le diagonali e i prolungamenti dei lati obliqui si incontrano sulla retta che unisce i punti medi delle basi.
- b) Sia ABCD un trapezio con base maggiore AB tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari.
Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD: Dimostrare che $\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$



2.3.2 Tra un panettone e un pandoro, un po' di esercizi

Per cominciare un problemino ... ino

Zig-mondo

Zig-mondo è piatto (2 dimensioni) per noi che lo vediamo da “fuori” per i zig-abitanti è il mondo. Il generico zig-abitante si muove in modo un po' strano (per noi, naturale per lui): prima di fare un passo lancia il suo zig-dado (un quadrato con i lati colorati diciamo: colore 1, colore 2, colore 3, colore 0), se

- esce 0 avanti uno
- esce 1 indietro uno
- esce 2 ruota di 90° e avanti uno
- esce 3 ruota di -90° e avanti uno

Nello Zig-mondo accadono alcune cose:

- gli agenti atmosferici nello zig-mondo condizionano notevolmente il movimento, infatti, se zig-piove i percorsi accessibili a zig diventano solo destra uno e sinistra uno, se zig-nevica ci si può muovere solo avanti uno;
- nel corso degli ultimi dieci zig-secoli si è scoperto che ogni anno zig-piove il 25% dei zig-giorni, zig-nevica il 40% dei zig-giorni;
- nel mondo di zig non ci sono stagioni (di questo non si è accorto ma rientra nelle sue intuizioni);

Zig decide di mettersi in viaggio dove andrà mai?

Dopo aver BEN analizzato il problema (letto capito, riletto e meditato) proponi una strategia risolutiva e POI, solo POI, sviluppa il programma (qui ([zig-mondo.html](http://www.joaogas.it/pagine/home.php?menu=9)) <http://www.joaogas.it/pagine/home.php?menu=9> trovi una proposta di soluzione).

Un secondo problemino ...ino (c'è anche un po' di fisica)

Nessuna specie conosciuta di renna può volare.

Ci sono però 300.000 specie di organismi viventi ancora da classificare e, mentre la maggioranza di questi organismi è rappresentata da insetti e germi, questo non esclude completamente l'esistenza di renne volanti, che solo Babbo Natale ha visto.

Ci sono due miliardi di bambini (sotto i 18 anni) al mondo. Dato però che Babbo Natale non tratta con bambini Musulmani, Hindu, Buddisti e Giudei, questo riduce il carico di lavoro al 15% del totale, cioè circa 378 milioni. Con una media di 3,5 bambini per famiglia, si ha un totale di 98,1 milioni di locazioni. Si può presumere che ci sia almeno un bambino buono per famiglia. Babbo Natale ha 31 ore lavorative, grazie ai fusi orari e alla rotazione della terra (perché? Come deve muoversi?)

(quante sono le visite al secondo che deve fare?)

Quanto tempo a per:

- i) trovare parcheggio(cosa questa semplice, dato che può parcheggiare sul tetto e non ha problemi di divieti di sosta);
- ii) saltare giù dalla slitta;
- iii) scendere dal camino;
- iv) riempire le calze;
- v) distribuire il resto dei doni sotto l'albero di Natale;
- vi) mangiare ciò che i bambini mettono a sua disposizione;
- vii) risalire dal camino;
- viii) saltare sulla slitta;
- ix) decollare per la successiva destinazione.

Assumendo che le abitazioni siano distribuite uniformemente (che sappiamo essere falso, ma accettiamo per semplicità di calcolo), ... Calcolare a che velocità viaggia la slitta di Babbo Natale

Il carico della slitta aggiunge un altro interessante elemento: assumendo che ogni bambino riceva una scatola media di Lego (massa circa 1 Kg), ...

Quanto peso grava sulla slitta di Babbo Natale Sulla terra, una renna può esercitare una forza di trazione di circa 1500 N. Anche assumendo che una renna volante possa trainare 10 volte tanto, ...

Quante renne servono per trainare la slitta.

A quanto ammonta la massa della slitta+renne+Babbo Natale

Se avete dei fratelli cugini a altro in età "aspetto Babbo Natale", vi prego non fategli leggere queste righe.

La soluzione “gira” in rete, ma fare i conti è un buon esercizio!!!

Esercizi . . . veri, ma quelli precedenti, non sono per nulla finti:

- 1) Si indichi con p la probabilità che ha un tiratore di colpire il bersaglio in un singolo tiro. Come deve essere p affinché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in due tiri successivi sia 0.75?
- 2) Risolvi le seguenti equazioni:

a) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 5$

b) $\frac{12}{x-1} = x-2$

- 3) Per quali valori del parametro reale λ l'equazione $x + \frac{1}{x} = \lambda$ ha soluzioni?
- 4) In un sacchetto ci sono 10 palline rosse; quante palline azzurre occorre aggiungere perché la probabilità di estrarre per due volte consecutive (senza rimettere la palline nel contenitore) una pallina rossa sia $\frac{3}{7}$?
- 5) Risolvi e discuti i seguenti sistemi lineari :

a) $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ y + \lambda x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1 + \lambda)x + \lambda y = 2 \\ 3\lambda x + 4y = 3 \end{cases}$

- 6) Nico e Peppo giocano una serie di partite d'azzardo; ad ogni partita, Nico ha probabilità p di vincere $p \in (0, 1)$, Peppo ha probabilità $q = 1 - p$ di vincere. All'inizio Nico possiede 100€ e Peppo 200€; ad ogni partita chi vince riceve 100€ dall'altro; il gioco finisce quando uno dei due giocatori resta senza soldi.
 - a) calcolare la probabilità che ha ciascun giocatore di vincere
 - b) come deve essere fissato p affinché il gioco risulti equo?
- 7) Sono date due circonferenze di medesimo centro O . Da un punto P , esterno ad entrambe, si conducano le tangenti PA , PB all'una e PC , PD all'altra (con A , C dalla stessa parte della retta PO).
 - a) Dimostrare che sono congruenti gli angoli $\hat{APD}$ e $\hat{CPD}$
 - b) Dimostrare che i quattro punti di tangenza sono i vertici di un trapezio isoscele
- 8) Dato un triangolo ABC , rettangolo in A , si tracci la circonferenza di centro A e tangente all'ipotenusa BC . Da B e C si conducano le ulteriori tangenti alla circonferenza e siano M ed N , rispettivamente, i punti di contatto.
 - a) Dimostrare che il quadrilatero $BCNM$ è un trapezio rettangolo
 - b) Dimostrare che A è allineato con M ed N
- 9) Dato un triangolo acutangolo ABC , siano U e V i piedi delle altezze uscenti dai vertici A e B . Dimostrare che l'asse del segmento UV passa per il punto medio M di AB .
- 10) Sia $ABCD$ un quadrato; M ed N siano rispettivamente, i punti medi dei lati BC e CD : provare che i segmenti AN ed AM dividono la diagonale BD in tre parti uguali.

Capitolo 3

Test . . . “on your mark”



- 1) Costruisci un triangolo e verifica che l'ortocentro, il baricentro e il circocentro sono allineati
- 2) Costruisci un triangolo e verifica che l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza
- 3) Data una circonferenza di centro O , sia A un suo punto, detta t la tangente in un generico punto T della circonferenza, determina il luogo dei punti P , piedi delle perpendicolari a t per A .⁽¹⁾
- 4) Il triangolo ABC di baricentro G è inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$. Studia il luogo descritto da G quando uno dei vertici varia su $\mathcal{C}$.⁽²⁾
- 5) Data una circonferenza $\mathcal{C}$ e una retta t ad essa tangente, costruisci il luogo dei punti P centri delle circonferenze tangenti a $\mathcal{C}$ e a t .⁽³⁾
- 6) Verifica che in un triangolo ogni mediana è divisa dal baricentro in due parti di cui una è doppia dell'altra.
- 7) Considera una circonferenza di centro O e sia A un suo punto, detta t la tangente alla circonferenza in A , sia E un generico punto della circonferenza detta r la retta OE e K l'intersezione di r con t . Costruisci il luogo dei punti P intersezione della perpendicolare s per K alla retta t con la perpendicolare a s per E .⁽⁴⁾
- 8) Dato un triangolo su ogni lato costruisci esternamente dei triangoli equilateri. Verifica che i centri di tali triangoli sono i vertici di un triangolo equilatero.
- 9) Dato un parallelogramma, costruisci sui suoi lati quattro quadrati, verifica che i centri di tali quadrati sono i vertici di un quadrato.

¹<https://www.geogebra.org/m/kqxrezgr>

²<https://www.geogebra.org/m/mkn5te8u>

³<https://www.geogebra.org/m/zwqeexrb>

⁴<https://www.geogebra.org/m/s6ne4u6v>

- 10) Data la circonferenza Γ di diametro AB , dette r ed s le tangenti a Γ , rispettivamente in B e A , sia $C \in \Gamma$, la retta AC incontra, la retta r in N . Costruisci il luogo dei punti P intersezione della perpendicolare a r in N con la parallela ad s per C .⁽⁵⁾

⁵<https://www.geogebra.org/m/hggcpvvq>, per ottenere l'equazione vedi 8.6

Capitolo 4

Geometria sintetica

4.1 Da dove si parte?

Indubbiamente il punto di partenza è Euclide.

il testo del primo libro degli elementi permette di comprendere lo spirito dell'opera. Analizzare con cura

4.1.1 Gli elementi di Euclide

Ὅροι.

- α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν.
β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
θ'. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
ι'. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφ' ἑσστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Acerbi 2007

*si comincia
spiegando
"con cosa si
lavora"*

Termini

- α . Punto è ciò di cui non è alcuna parte
- β . E linea lunghezza senza larghezza
- γ . E limiti di una linea sono punti
- δ . Linea retta è quella che è posta ad uguale livello rispetto ai punti su se stessa
- ϵ . E superficie sono linee
- ζ . Superficie piana è quella che è posta allo stesso livello rispetto alle rette su se stessa.
- η . Ed angolo piano è, toccandosi fra loro due linee in un piano e non essendo poste in linea retta, l'inclinazione delle linee l'una rispetto l'altra
- θ . E quando le linee che comprendono l'angolo siano rette, l'angolo è chiamato rettilineo.
- ι . E quando una retta che sta su una retta faccia gli angoli consecutivi uguali fra loro, uno e l'altro degli angoli uguali è retto, e la retta che sta su è chiamata perpendicolare a quella su cui sta
- κ . Angolo ottuso è quello maggiore di un retto
- λ . Ed acuto quello minore di un retto
- μ . Termine è ciò che è limite di qualcosa
- ν . Figura è ciò che è compreso fra uno o più termini
- ξ . Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea, la circonferenza, tutte le rette incidono sulla quale, condotte alla circonferenza dal cerchio da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali fra loro.
- π . Ed il punto è chiamato centro del cerchio
- ...

*i famosi 5
postulati*

Richieste

- <1> Sia stato richiesto di condurre una linea retta da ogni punto a ogni punto
- <2> E di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in linea retta
- <3> E che ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio
- <4> E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro
- <5> E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidono dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti

Su questa base viene costruito l'edificio geometrico euclideo.

4.1.2 Un grande balzo ... Hilbert

Kapitel I.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \dots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder des *Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „kongruent“, „stetig“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

- I 1—8. Axiome der *Verknüpfung*,
- II 1—4. Axiome der *Anordnung*,
- III 1—6. Axiome der *Kongruenz*,
- IV. Axiom der *Parallelen*,
- V 1—2. Axiome der *Stetigkeit*.

Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli 1992

Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con $A, B, C, \dots$; chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con $a, b, c, \dots$; chiamiamo piani gli oggetti del terzo sistema e li chiamiamo con $\alpha; \beta; \gamma$; i punti si chiamano anche gli elementi della geometria della retta, i punti e le rette gli elementi della geometria piana, i punti, le rette e i piani gli elementi della geometria solida o dello spazio.

Assiomi di collegamento

- 1) Per ogni coppia di punti A e B , esiste una retta a che appartiene ad ognuno dei punti A e B
- 2) Per due punti A e B , esiste al più una retta a che appartiene ad ognuno dei punti A e B
- 3) Su ogni retta ci sono almeno due punti
- 4) Esistono almeno tre punti che non giacciono su una retta
- 5) Per ogni terna di punti A, B, C che non giacciono su una retta, esiste un piano α che giace su questi tre punti.
- 6) Su ogni piano c'è almeno un punto
- 7) Per ogni terna di punti non allineati A, B, C esiste non più di un piano che li contiene
- 8) Se due punti di una retta a giacciono su un piano α , allora ogni punto sulla retta giace su α

- 9) Se due piani α e β hanno un punto A in comune, allora hanno almeno un altro punto B in comune
- 10) Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano

Assiomi di ordinamento

1. Se un punto B giace fra i punti A e C , allora A, B, C sono tre punti diversi su una retta e inoltre B giace anche fra C e A
2. Per ogni coppia di punti A e C esiste almeno un punto B sulla retta AC tale che C giace fra A e B .
3. Fra tre punti qualsiasi su una retta non più di uno giace fra gli altri due

Definizione 1 (Segmento).

Siano A e B due punti su una retta a , la coppia di punti A, B oppure B, A è detta SEGMENTO AB . I punti fra A e B sono detti punti del segmento AB o interni al segmento AB . A e B sono detti estremi del segmento. Si dice che sono esterni al segmento tutti gli altri punti della retta a .

4. (Assioma di Pasch) Siano A, B, C tre punti che non giacciono su una retta e sia a una retta qualsiasi nel piano di A, B, C che non passa per A, B e C . Se a passa per un punto del segmento AB , allora deve passare anche per un punto del segmento AC o per un punto del segmento BC

Assiomi di Congruenza

- 1) Se A, B sono due punti di una retta a e A' è un punto di a o di un'altra retta a' , allora su un lato fissato (definito in precedenza) di A' sulla retta a' si può trovare un punto B' tale che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$. In simboli $AB \cong A'B'$
- 2) Se $A'B'$ e $A''B''$ sono congruenti ad AB , allora $A'B' \cong A''B''$
- 3) Siano AB e BC due segmenti su una retta a privi di punti interni comuni, e siano $A'B'$ e $B'C'$ segmenti su una retta a' privi di punti interni comuni. Se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, allora $AC \cong A'C'$
- 4) Supponiamo che l'angolo $\angle(h, k)$ giaccia su un piano α e che la retta a' giaccia su un piano α' . Sia fissato un lato di a' su α' . Sia h' un raggio di a' che emana da un punto O' . Allora in α' esiste uno ed un solo raggio k' tale che l'angolo $\angle(h, k)$ è congruente all'angolo $\angle(h', k')$ e tale che tutti i punti interni di $\angle(h', k')$ giacciono su un lato fissato di a' : in simboli $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$. Inoltre ogni angolo è congruente a se stesso.
- 5) Se per due triangoli ABC e $A'B'C'$ si ha che $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e gli angoli $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ allora anche gli angoli $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$

Assioma delle parallele

Sia a una retta e A un punto non di a . Allora nel piano di a e A esiste al più una retta per A che non incontra a .

Assiomi di Continuità

- 1) (Assioma di Archimede) Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, allora esiste sulla retta AB una famiglia di punti $A_1, A_2, \dots, A_n$ tali che i segmenti $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ sono congruenti a CD e tali che B giace fra A e A_n .
- 2) (Assioma di completezza lineare) I punti di una retta formano una collezione di punti che, soddisfacendo gli assiomi di connessione, di ordinamento, di congruenza e di Archimede, non possono essere estesi ad una collezione più grande che continui a soddisfare gli stessi assiomi.

analizzando i due testi, trovare cosa è cambiato

4.2 Le isometrie

Definizione 2 (Isometria). Cateni, Fortini e Bernardi 2001

Si dice isometria ⁽¹⁾ ogni corrispondenza che ad ogni punto P del piano ne associa un altro P' (detto corrispondente o immagine di P) in modo tale che, se A e B sono due punti comunque scelti ed A' e B' son le rispettive immagini i segmenti AB e $A'B'$ sono sovrapponibili.

Definizione 3 (Punto unito). In un isometria un punto A si dice unito se coincide con la sua immagine A' ; una retta r si dice unita se coincide con la sua corrispondente r' .

Definizione 4 (Simmetria). Due punti A e A' si dicono simmetrici rispetto ad una retta r , chiamata asse di simmetria, se la retta r è l'asse del segmento AA' . Il punto A' si dice simmetrico di A rispetto a r .

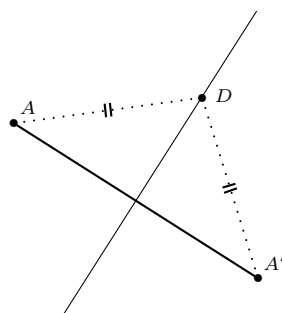


Figura 4.1: Simmetria

Definizione 5 (Traslazione). Fissato un vettore $\overrightarrow{AB}$, si dice che il punto P' è l'immagine del punto P nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ se $\overrightarrow{PP'}$ è equipollente ad $\overrightarrow{AB}$.

Definizione 6 (Rotazione). Fissato un punto O ed un angolo orientato $\widehat{AOB}$, si dice che il punto P' è l'immagine del punto P nella rotazione di centro O ed angolo $\widehat{AOB}$, se $OP = OP'$ e $\widehat{AOB} = \widehat{POP'}$.

Nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$ nessun punto è unito; le rette parallele ad $\overrightarrow{AB}$, ed esse soltanto, sono rette unite.

¹isometria dal greco. ἰσομετρία "uguaglianza di misura"

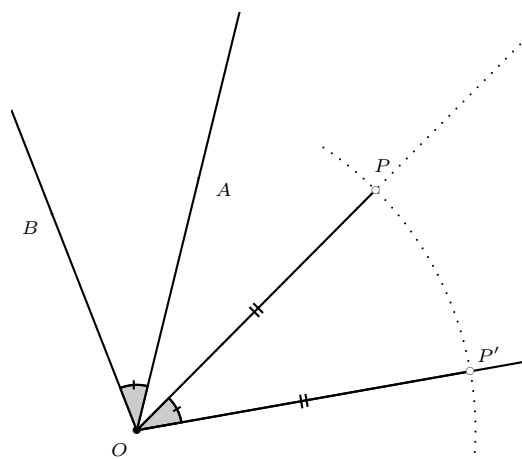


Figura 4.2: Rotazione

Nella simmetria assiale i punti uniti sono tutti e soli quelli dell'asse; le rette unite sono, oltre all'asse, tutte e sole le perpendicolari all'asse stesso.

Definizione 7 (Composizione di isometrie). Date due isometrie M ed N si dice loro composizione la corrispondenza che ad ogni punto P del piano associa il punto P'' ottenuto determinando prima l'immagine di P di P' nella M e poi l'immagine P'' di P' nella N . Si scrive $M \circ N$.

Teorema 1 (proprietà delle isometrie I). La composizione di due isometrie è un'isometria.

Teorema 2 (proprietà delle isometrie II). La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ è la traslazione di vettore $\vec{AB} + \vec{CD}$.

Teorema 3 (proprietà delle isometrie III). La composizione di due rotazioni di ugual centro O , la prima di angolo α la seconda di angolo β è ancora una rotazione di centro O e di angolo la somma algebrica $\alpha + \beta$.

Teorema 4 (proprietà delle isometrie IV). La composizione di una simmetria (assiale o centrale) con se stessa è l'identità.

Questo teorema si esprime dicendo che le simmetrie sono isometrie involutorie.

Teorema 5 (proprietà delle isometrie V). La composizione di due simmetrie centrali di centri distinti O e O' , prese nell'ordine, è la traslazione di vettore $2\vec{OO'}$.

Teorema 6 (proprietà delle isometrie VI). La composizione di due simmetrie assiali di assi paralleli r ed s , prese nell'ordine, è la traslazione di vettore $2\vec{v}$ essendo $\vec{v}$ il vettore perpendicolare alla direzione comune di r ed s con il primo estremo su r ed il secondo su s .

Teorema 7 (proprietà delle isometrie VII). La composizione di due simmetrie assiali di assi r , s incidenti in O è la rotazione di centro O e di angolo 2α essendo α l'angolo non ottuso formato da r ed s .

Definizione 8 (Glisso simmetria). La composizione di una simmetria assiale di asse r e di una traslazione di vettore $\vec{AB}$ non nullo e parallelo ad r si definisce glisso simmetria.

dimostrare tutti i teoremi con cura

4.2.1 Omotetie

Definizione 9 (Omotetia).⁽²⁾ Un omotetia è una trasformazione del piano in se stesso, cioè una corrispondenza fra punti del piano così definita: fissati un punto O detto centro, ed un numero reale non nullo k , detto rapporto di omotetia, si dice che il punto A' è il corrispondente di A nell'omotetia di centro O se:

- i) i tre punti O, A, A' sono allineati
- ii) vale l'uguaglianza $OA' : OA = k$

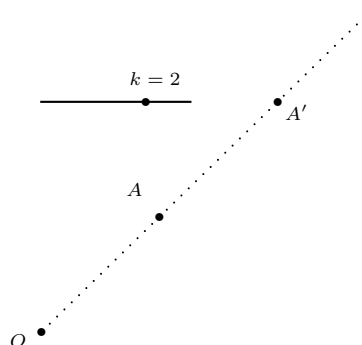


Figura 4.3: Omotetia di rapporto k

Definizione 10 (Similitudine). La composizione di un'isometria con un'omotetia si definisce similitudine

4.3 Il teorema di Talete

Definizione 11 (Fascio di rette improprio). Si dice fascio di rette parallele l'insieme di tutte le rette del piano che sono parallele ad una data retta a .

Due rette r, r' che intersecano la a rispettivamente nei punti A, A' (fig. 1) intersecano anche ogni altra retta del fascio. Le rette r ed r' si dicono trasversali.

Il fascio di rette parallele determina una corrispondenza biunivoca fra i punti delle trasversali r ed r' : due punti, uno di r e l'altro di r' , sono corrispondenti se stanno su una stessa retta parallela ad a .

Anche i segmenti AB ed $A'B'$ (che uniscono coppie di punti corrispondenti) vengono chiamati corrispondenti.

Teorema 8 (di Talete). Le due classi di segmenti corrispondenti individuati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.

²omotetia è composta di omo e dalla parola greca $\theta\epsilon\tau\acute{o}\varsigma$ "collocato"

Dimostrazione. Osservato che la corrispondenza che associa ai segmenti $AB, BC, CD, \dots$ della trasversale r rispettivamente i segmenti $A'B', B'C', C'D', \dots$ della trasversale r' è biunivoca, per provare l'enunciato applichiamo il primo criterio di proporzionalità. Pertanto, dobbiamo dimostrare:

- 1) che a segmenti congruenti di r corrispondono segmenti congruenti di r' ;
- 2) che alla somma di due segmenti, presi su r , corrisponde, su r' il segmento somma dei due segmenti corrispondenti a quelli fissati su r .

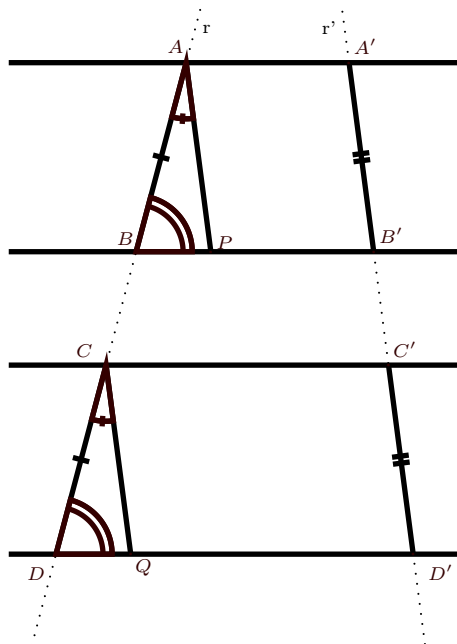


Figura 4.4: Il teorema di Talete

Sia $AB = CD$. Vogliamo provare che è pure $A'B' = C'D'$. Dette a, b, c, d le rette del fascio passanti rispettivamente per i punti A, B, C, D , conduciamo per A e per C le parallele alla r' : sia P il punto in cui la prima di tali rette interseca la retta b , e sia Q il punto in cui la seconda interseca la retta d . I triangoli ABP, CQD sono congruenti perché hanno $AB = CD$ per ipotesi, $\widehat{ABP} = \widehat{CQD}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele b, d tagliate da r , $\widehat{BAP} = \widehat{DCQ}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AP, CQ tagliate da r : segue da ciò la congruenza dei segmenti AP, CQ . D'altra parte si ha pure $AP = A'B'$ e $CQ = C'D'$ come lati opposti dei parallelogrammi $APB'A'$ e $CQD'C'$; il che porta a concludere $AB' = C'D'$.

Sia $GH = CD + EF$. Vogliamo dimostrare che $G'H'$, corrispondente di GH , è la somma di $C'D'$ ed $E'F'$ rispettivamente corrispondenti di CD ed EF

Per le ipotesi fatte esiste un punto K del segmento GH che lo divide in due segmenti GK e KH rispettivamente congruenti a CD ed EF . Sia k la retta del fascio passante per K e sia K' il punto in cui k interseca la trasversale r' . Poiché abbiamo stabilito che a segmenti congruenti di r corrispondono segmenti congruenti di r' , da $GK = CD$ e $KH = EF$ segue $G'K' = C'D'$ e $K'H' = E'F'$. Pertanto si conclude che $G'H' = G'K' + K'H' = C'D' + E'F'$. $\square$

Sia ABC un triangolo; conduciamo una parallela al lato BC , che interseca le rette AB , AC nei punti D , E . Per il vertice A tracciamo la parallela p a BC . Se applichiamo il teorema di Talete alle tre parallele p, DE, BC e alle loro trasversali AB, AC abbiamo:

$$AB : AC = AD : AE = DB : EC$$

Teorema 9 (inverso di Talete per i triangoli). Una retta che determina su due lati di un triangolo, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

Dimostrazione. Dato un triangolo ABC (fig. 4), si consideri una retta che interseca le rette AB ed AC rispettivamente in due punti D ed E , tali che sia $AB : DB = AC : EC$.

Vogliamo dimostrare che DE è parallela a BC . Ragioniamo per assurdo e supponiamo che DE non sia parallela a BC . In tal caso esisterebbe una retta DF , passante per D e parallela a BC , che incontrerebbe la retta AC in un punto F distinto da E . Per il precedente corollario si avrebbe: $AB : DB = AC : FC$. Confrontando tale proporzione con quella fornitaci dall'ipotesi del teorema si cade in assurdo. Infatti, per l'unicità della quarta proportionale dovrebbe risultare FC congruente ad EC , mentre noi abbiamo supposto il contrario. $\square$

4.4 Proprietà delle bisettrici di un triangolo

Teorema 10 (della bisettrice del triangolo). La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati

Dimostrazione. Sia ABC il triangolo dato vedi Figura 4.5 sia CE la bisettrice dell'angolo di

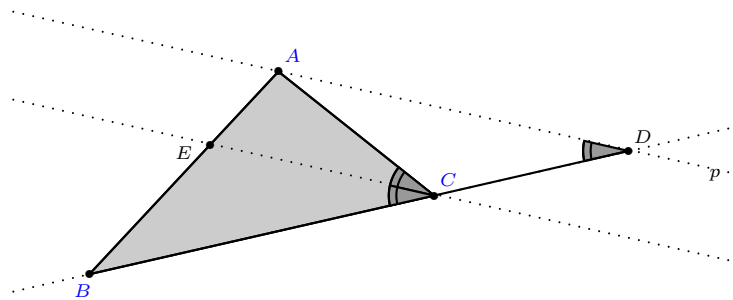


Figura 4.5: Proprietà delle bisettrici di un triangolo

vertice C . Si vuole dimostrare che:

$$AE : EB = AC : CB$$

Analizziamo la tesi del teorema, la richiesta è di ricavare una proporzione, le proporzioni fra segmenti richiamano Talete, cerchiamo di costruire una figura in cui sia possibile applicare Talete.

Tracciamo dal vertice A la parallela (p) alla bisettrice CE , sia D l'intersezione fra p e la retta DC . Il triangolo ACD è isoscele in quanto gli angoli $\widehat{CDA} \equiv \widehat{DAC}$ (perché?). Si ha che $CD = AC$, e applicando Talete si giunge alla tesi. $\square$

Completare con cura la dimostrazione, costruire la figura usando GeoGebra

Dimostrazione. [2] Consideriamo i triangoli CAE e CEB hanno la stessa altezza $EK = EH$

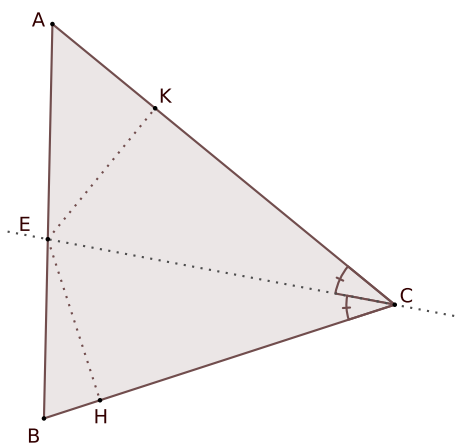


Figura 4.6: Teorema delle bisettrici seconda dimostrazione

dato che AE è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BCA}$, pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{2Area_{CAE}}{2Area_{CEB}} &= \frac{CA \cdot EK}{CB \cdot EH} = \\ &= \frac{CA}{CB} \end{aligned}$$

ma $\frac{2Area_{CAE}}{2Area_{CEB}} = \frac{AE \cdot h}{BE \cdot h}$ dove h è l'altezza del triangolo BAC relativa al vertice C . Perciò si ricava:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AE}{BE}$$

che è la tesi. $\square$

4.5 Proprietà delle secanti e delle tangenti ad una circonferenza

Teorema 11 (delle due corde). Condotte per un punto interno ad una circonferenza due corde, esse si dividono in modo che le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione.

Dimostrazione. La tesi del teorema equivale a scrivere (Figura 4.7) che:

$$PB : PD = PC : PA$$

ma questo ci dice che i triangoli APD e BPC sono simili ($APD \sim BPC$). Pertanto si deve di-

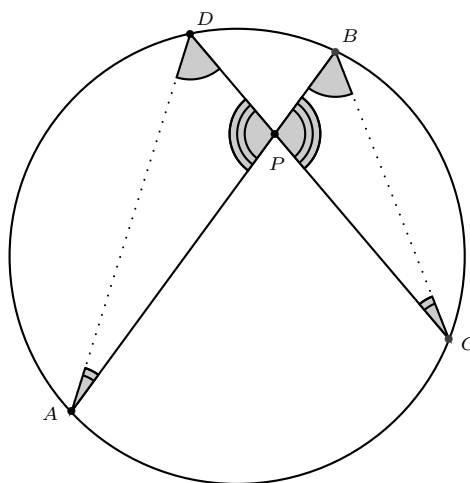


Figura 4.7: Proprietà delle corde

mostrare la similitudine dei due triangoli, ma grazie alle proprietà degli angoli alla circonferenza, si giunge facilmente alla dimostrazione. $\square$

Completare con cura la dimostrazione, costruire la figura usando GeoGebra

Teorema 12 (delle due secanti). Condotte per un punto esterno ad una circonferenza due secanti, si ha che una intera secante e la sua parte esterna formano i medi e l'altra secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione.

Dimostrazione. La tesi del teorema equivale a scrivere (Figura 4.8) che:

$$PB : PD = PA : PC$$

ma questo ci dice che i triangoli PAD e PCB sono simili ($PAD \sim PCB$). Pertanto si deve dimostrare la similitudine dei due triangoli, ma grazie alle proprietà degli angoli alla circonferenza, si giunge facilmente alla dimostrazione. $\square$

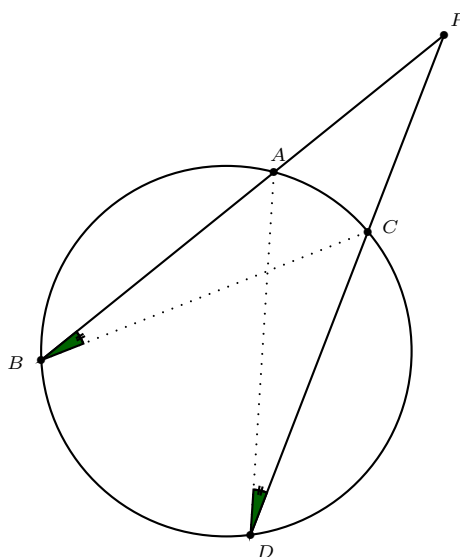


Figura 4.8: Proprietà delle secanti

Teorema 13 (della secante e della tangente). Condotte per un punto esterno ad una circonferenza una secante e una tangente, il segmento di tangenza è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.

Dimostrazione. La tesi del teorema equivale a scrivere (Figura 4.9) che:

$$PB : PA = PA : PC$$

ma questo ci dice che i triangoli PAB e PAC sono simili ($PAB \sim PAC$). Pertanto si deve dimostrare la similitudine dei due triangoli, ma grazie alle proprietà degli angoli alla circonferenza, si giunge facilmente alla dimostrazione. $\square$

4.6 La sezione aurea

La lettera greca φ (che si legge “fi”) denota il numero, detto “sezione aurea” o “rapporto aureo”, così definito:

Definizione 12 (Sezione aurea). supponiamo di avere un segmento AB e di dividerlo in due parti segnando su di esso un punto C , in modo che si abbia la proporzione:

$$AB : AC = AC : CB$$

Il punto C dunque divide il segmento in due parti, di cui la maggiore è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte minore.

Il rapporto comune $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ è appunto la sezione aurea φ .

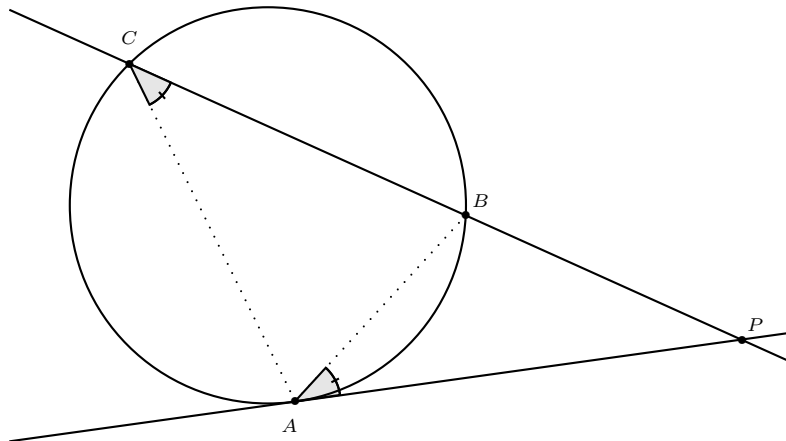


Figura 4.9: Proprietà della tangente e della secante

Se si sceglie come unità di misura il segmento CB ($\overline{CB} = 1$, la misura di AC è proprio φ , mentre la misura dell'intero segmento AB è pari a $\varphi + 1$. Dalla proporzione si ricava allora

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1}$$

da cui l'equazione di 2° grado:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Le cui soluzioni sono $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$: quella positiva $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ fornisce il valore di φ , mentre la negativa vale $-\frac{1}{\varphi}$. Visto che $\sqrt{5}$ è un numero irrazionale, anche φ lo è, perciò la sua espansione decimale è non periodica con infinite cifre decimali.

Le sue prime cifre, con l'aiuto di sympy, sono:

```
from sympy import *
phi = symbols('phi')
phi = (1+sqrt(5))/2
N(phi, 500)
1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486
227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266
338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613
199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963
136144381497587012203408058879544547492461856953648644492410443
207713449470495658467885098743394422125448770664780915884607499
887124007652170575179788341662562494075890697040002812104276217
711177780531531714101170466659914669798731761356006708748071
```

4.6.1 Costruzione del segmento aureo

Sfruttando il teorema della secante e della tangente è possibile (Figura 4.10) costruire il segmento aureo, infatti tenendo conto che il diametro DC' della circonferenza è costruito congruente al

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = -\frac{1}{1 + \sqrt{5}}$$

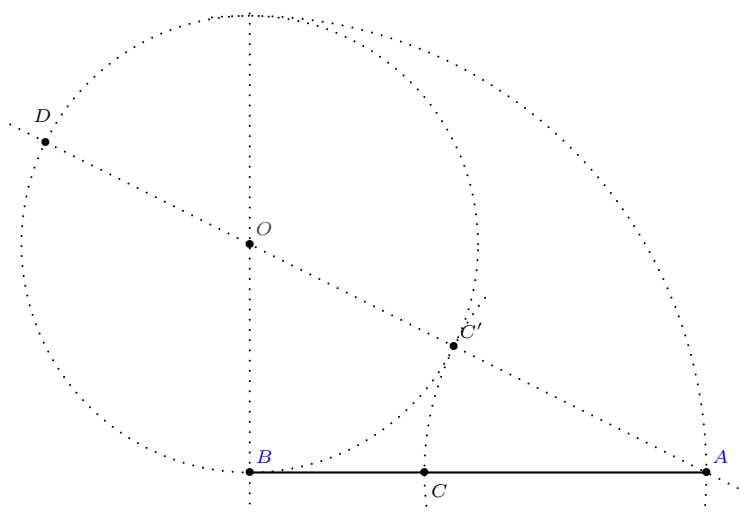


Figura 4.10: La costruzione del segmento aureo

segmento AB , si può scrivere:

$$\begin{aligned} AD : AB &= AB : AC' \\ AB + AC' : AB &= AC' + CB : AC' \\ \frac{AB + AC'}{AB} &= \frac{AC' + CB}{AC'} \\ 1 + \frac{AC'}{AB} &= 1 + \frac{CB}{AC'} \\ AC' : AB &= CB : AC' \end{aligned}$$

4.6.2 Pentagono e decagono

Si consideri un triangolo isoscele (ABC) in cui l'angolo al vertice $\alpha = \widehat{A}$ è metà degli angoli alla base. Il triangolo in questione viene diviso in due triangoli isosceli di cui uno $BCD \sim ABC$,

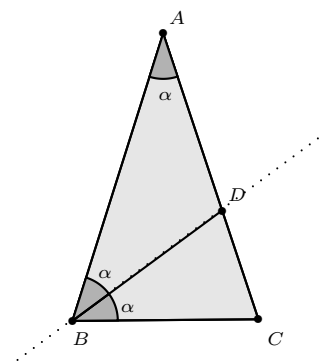


Figura 4.11: Il triangolo in cui l'angolo al vertice è metà degli angoli alla base

sfruttando la simmetria si ricava che:

$$AB : BC = BC : DC$$

ma questo ci dice che la base del particolare triangolo isoscele è il segmento aureo del lato. Ora ricordando le caratteristiche del triangolo si può osservare che $\pi = \alpha + 2 \cdot 2\alpha$ cioè $\alpha = \frac{\pi}{5}$, con dieci di questi triangoli è possibile costruire (Figura 4.12) un decagono regolare (ricordare che $4\alpha = \frac{\pi(10-2)}{10} = \frac{4}{5}\pi$)

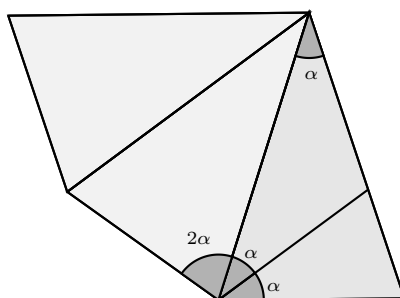


Figura 4.12: Il decagono regolare

Euclide Elementi libro II proposizione 11 *Tratto da Acerbi 2007*

Secare la retta data così da essere il rettangolo compreso da quella totale e dall'uno o dall'altro dei segmenti uguale al quadrato sul restante segmento.

Sia la retta data AB : si deve pertanto secare AB così da essere il rettangolo compreso da quella totale e dall'uno o dall'altro dei segmenti uguale al quadrato sul restante segmento. Sia infatti stato descritto su AB un quadrato $AB\Delta\Gamma$, e sia stata secata $a\Gamma$ a metà del secondo il punto E , e sia stata congiunta BE , e sia stata condotta oltre ΓA fino a Z , e uguale a BE sia stata posta EZ , e sia stato descritto su AZ un quadrato $Z\Theta$, e sia stata condotta oltre $H\Theta$ fino a K : dico che AB risulta secata secondo Θ così il rettangolo compreso da AB , $B\Theta$ uguale al quadrato su $A\Theta$

Poiché infatti una retta $A\Gamma$ risulta secata a metà secondo E , e ad essa risulta sommata ZA , il rettangolo compreso da ΓZ , ZA più il quadrato su AE è quindi uguale al quadrato su EZ . E uguale a EB : il rettangolo compreso da ΓZ , ZA più il quadrato su AE è quindi uguale a quello su EB . Ma uguali a quello su EB sono quelli su BA , AE l'angolo su A è infatti quello da ΓZ , ZA più quello su AE è quindi uguale a quelli su BA , AE . Sia stato sottratto quello su AE comune: il quadrato su AB . Ed è quello da ΓZ , ZA ZK , AZ è infatti uguale a ZH , quello su AB $A\Delta$: ZK è quindi uguale a $A\Delta$. Sia stato sottratto AK comune: $Z\Theta$ restante è quindi uguale a $\Theta\Delta$. Ed è $\Theta\Delta$ quello da AB , $B\Theta$, AB è infatti uguale a $B\Delta$, $Z\Theta$ quello su $A\Theta$: il rettangolo compreso da AB , $B\Theta$ è quindi uguale al quadrato su $A\Theta$.

La retta data AB risulta quindi secata secondo Θ così da fare il rettangolo compreso da AB , $B\Theta$ uguale al quadrato su AB : il che doveva fare.

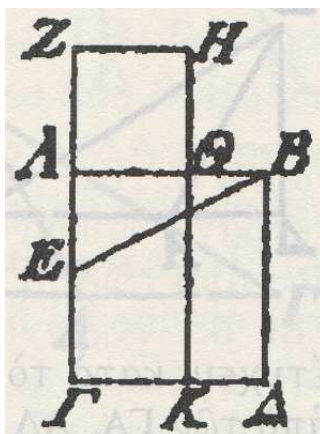


Figura 4.13: Costruzione del rapporto aureo secondo Euclide

4.7 Figure equi estese

Definizione 13 (Poligoni equiscomponibili). Due poligoni A e B vengono detti equiscomponibili fra loro se si possono scomporre in uno stesso numero di parti poligonali che siano corrispondentemente congruenti.

4.7.1 Applicazioni ... teoremi da capire e dimostrare

Un importante applicazione di questa definizione si ha nelle dimostrazioni del teorema di Pitagora; ad esempio la dimostrazione di Henry Perigal ⁴ 1830

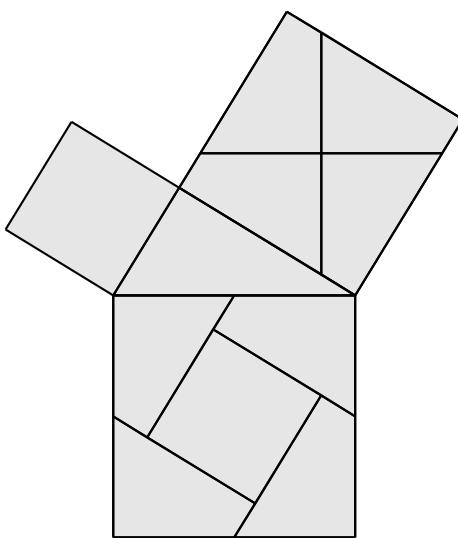


Figura 4.14: Il puzzle di Perigal

⁴inglese, agente di borsa e astronomo dilettante

individuare il tipo di trasformazioni in gioco nella dimostrazione

Definizione 14 (poligono di Pick). Un poligono i cui vertici, in un riferimento cartesiano, hanno coordinate intere è detto poligono di Pick ⁵.

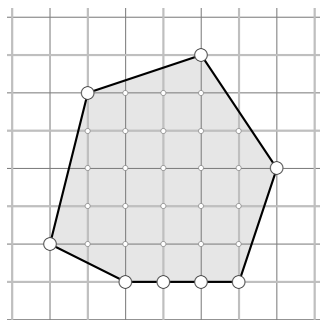


Figura 4.15: Poligono di Pick

Teorema 14 (di Pick). Sia P un poligono di Pick, definiamo $I(P)$ il numero dei punti di coordinate intere interni a P , e $B(P)$ i punti di coordinate intere sui lati di P . Se $A(P)$ è l'area del poligono, allora:

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1$$

Dimostrazione. Per ogni punto di coordinate intere E interno o sui lati di P , sia α_E l'angolo da cui viene visto P da E . Se E giace all'interno di P allora $\alpha_E = 2\pi$; se E si trova su un lato ma non è un vertice, $\alpha_E = \pi$; infine se E è un vertice α_E , è l'angolo interno al poligono di cui E è vertice. Sia $w_p = \frac{\alpha_E}{2\pi}$, definiamo $W(P) = \sum w_p$, dove la somma è fatta su tutti i punti che si trovano all'interno o sui lati di P .

Si vuole dimostrare che:

$$W(P) = A(P) \quad (4.1)$$

La dimostrazione della 4.1 procede in tre passi:

- i) inizialmente si dimostra che la funzione $W(\cdot)$ è additiva, infatti l'unione di due poligoni di Pick che condividono un lato trasforma i punti del lato che non sono vertici in punti interni, se il punto diviene vertice aggiunge i due angoli interni a quel vertice, uno per ogni poligono.
- ii) si verifica la 4.1 per alcuni casi semplici: rettangolo di Pick 4.16 con i lati paralleli agli assi coordinati, mezzo rettangolo 4.17, e poi due generici triangoli interi di cui si considerano due casi 4.18 e 4.19. È possibile ricondurre questi due casi ai casi precedenti sottraendo al rettangolo principale triangoli rettangoli e rettangoli più piccoli.
- iii) è facile far vedere che ogni poligono di Pick può essere considerato come l'unione di triangoli di Pick.

Dimostrata 4.1, non ci resta che calcolare $W(P)$. Se P ha n vertici definiamo $b = B(P) - n$. La somma degli angoli interni di P ⁶ è $(n - 2)\pi$. Per i punti E sui lati (il cui numero è b), $\alpha_E = \pi$.

⁵Georg Alexander Pick: matematico austriaco nato il 10 agosto 1859 a Vienna morto, in campo di concentramento, il 26 luglio 1942 a Theresienstadt in Boemia, attuale repubblica Ceca

⁶Nel caso P convesso

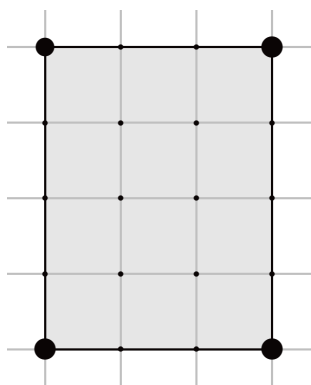


Figura 4.16: rettangolo

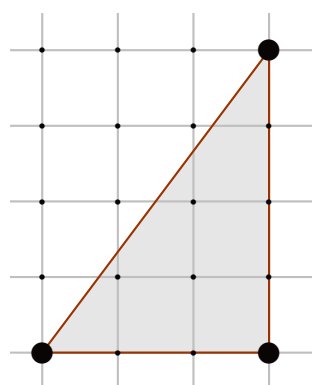


Figura 4.17: triangolo rettangolo

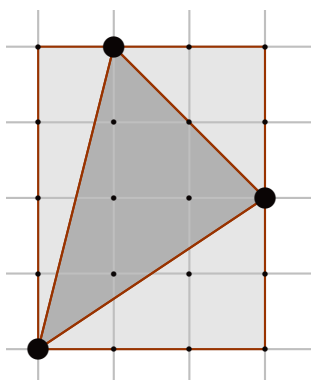


Figura 4.18: triangolo generico 1

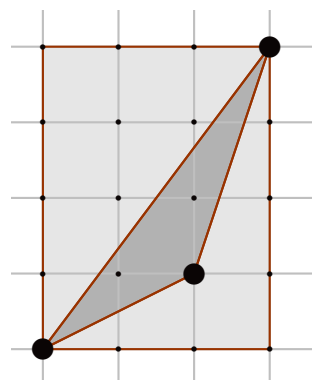


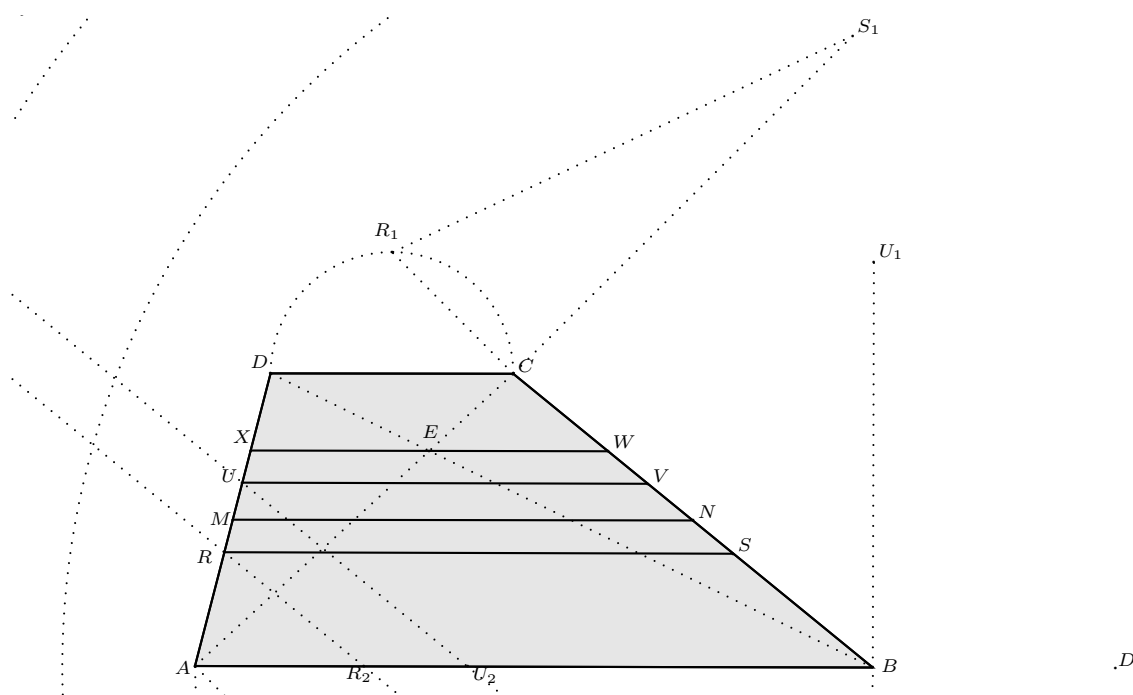
Figura 4.19: triangolo generico 2

Pertanto, $\sum w_p$, dove la somma è fatta solo sui punti appartenenti ai lati vale: $\frac{n-2}{2} + \frac{b}{2} = \frac{n+b}{2} - 1 = \frac{B(P)}{2} - 1$. Aggiungendo la somma w_p dei punti interni che è semplicemente $I(P)$ si completa il calcolo di $W(A)$ ottenendo:

$$W(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1$$

Questo con la 4.1 dimostra il teorema. □

La dimostrazione del teorema è in molti punti accennata, completare con cura


 Figura 4.20: La relazione $HM \leq GM \leq AM \leq QM$ nel trapezio

4.8 Trapezio «meraviglioso»

4.8.1 HM

Teorema 15 (trapezio HM). Il segmento parallelo alle basi del trapezio passante per il punto di intersezione (E) delle diagonali è la media armonica delle basi:

$$XW = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}}$$

Dimostrazione. I triangoli AEX e ACD sono simili quindi: $\frac{XE}{DC} = \frac{AX}{AD}$ ricaviamo $AX = \frac{XE}{DC}AD$

I triangoli XED e ABD sono simili quindi: $\frac{XE}{AB} = \frac{XD}{AD}$ ricaviamo $XD = \frac{XE}{AB}AD$

Sommando membro a membro si ottiene: $AX + XD = \frac{XE}{CD}AD + \frac{XE}{AB}AD$ dato che $AX + XD = AD$ si ricava:

$$XE = \frac{1}{\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}}$$

I triangoli BWE e BCD sono simili quindi: $\frac{EW}{DC} = \frac{BW}{BC}$ ricaviamo $BW = \frac{WE}{CD}BC$

I triangoli $EW C$ e ABC sono simili e pertanto: $\frac{CW}{CB} = \frac{EW}{AB}$ ricaviamo $CW = \frac{EW}{AB}BC$

Sommando membro a membro si ottiene: $BW + CW = \frac{WE}{CD}BC + \frac{WE}{AB}BC$ dato che $BW + WC = BC$ si ricava:

$$EW = \frac{1}{\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}}$$

$$XW = XE + EW = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}}$$

□

4.8.2 GM

Teorema 16 (trapezio GM). Il segmento parallelo alle basi del trapezio che divide la figura in due trapezi simili è la media geometrica delle basi:

$$UV = \sqrt{AB \cdot CD}$$

Dimostrazione. Essendo $UVCD$ e $ABVU$ simili si ha: $\frac{DC}{UV} = \frac{UV}{AB}$ da cui la tesi

□

4.8.3 AM

Teorema 17 (trapezio AM). Il segmento parallelo alle basi del trapezio che congiunge i due punti medi dei lati obliqui è la media aritmetica delle basi:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Dimostrazione. Sia s la parallela ad AD in N , detto D' l'intersezione di DC con s e A' l'intersezione di AB con s si ha che per costruzione $CD' = A'B$ e $AA' = DD' = MN$ ora $AA' + DD' = AB - A'B + CD + CD' = AB + CD$. $2MN = AB + CD$

□

4.8.4 QM

Teorema 18 (trapezio QM). Il segmento parallelo alle basi del trapezio che divide la figura in due trapezi equivalenti è la media quadratica delle basi:

$$RS = \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}}$$

Dimostrazione. Siano DH e HK le altezze dei due trapezi equivalenti, si ha:

$$\frac{\overbrace{DC + RS}^1}{2} DH = \frac{\overbrace{AB + RS}^2}{2} HK = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\frac{AB + CD}{2} DK}^3 \right)$$

Dall'uguaglianza $1 = 3$ si ottiene: $DH = \frac{(AB+CD)DK}{2(DC+RS)}$, da $1 = 2$ si ha:

$$HK = \frac{(AB+CD)DK}{2(AB+RS)}, \text{ sommando membro a membro: } DH + HK = DK =$$

$$\frac{AB+CD}{2} DK \left(\frac{1}{DC+RS} + \frac{1}{AB+RS} \right)$$

$$1 = \frac{AB+CD}{2} \left(\frac{1}{DC+RS} + \frac{1}{AB+RS} \right)$$

$$\frac{2(DC+RS)(RS+AB)}{AB+CD} = 2RS + AB + DC$$

$$\dots$$

$$2RS^2 = AB^2 + CD^2$$

□

4.9 La formula di Erone: una dimostrazione geometrica

Al matematico Erone, che operò ad Alessandria d'Egitto tra il I e il II secolo d.C., viene attribuita la formula del calcolo dell'area di un triangolo mediante le misure dei suoi lati. Tale dimostrazione compare in Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia volume III vai al testo.

ἐστὶ μὲν ὅριον λς'. ἐὰν δὲ βουλόμεθα ἐν ἐλάσσονι μὲν
τοῦ λς' τὴν διαφορὰν γίνεσθαι, ἀντὶ τοῦ ψκθ τάξο-
μεν τὰ νῦν εὐρεθέντα ψκ καὶ λς', καὶ ταῦτὰ ποιή-
σαντες εὐρήσομεν πολλὰ ἐλάττωνα <τοῦ> λς' τὴν δια-
φορὰν γιγνομένην.

5

ἡ δὲ γεωμετρικὴ τούτου ἀπόδειξις ἐστὶν ἡδε· τρι-
γώνου δοθεισῶν τῶν πλευρῶν εὐρεῖν τὸ ἐμβαδόν.

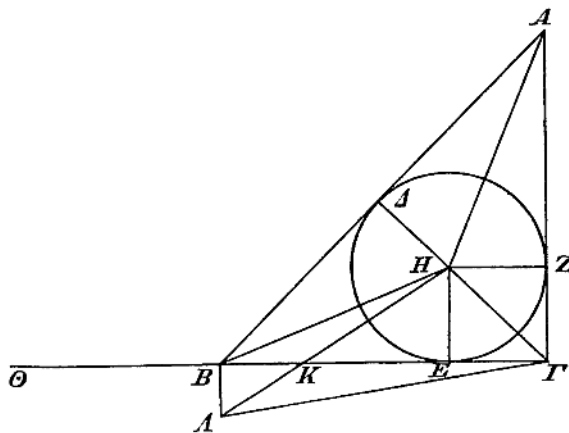
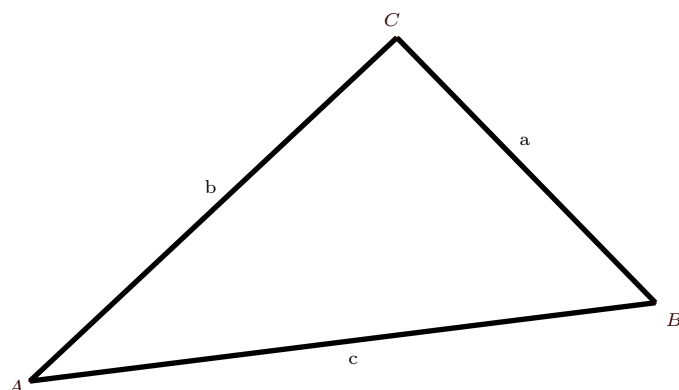


Fig. 7.

δυνατὸν μὲν οὖν ἐστὶν ἀγαγόντα[ς] μίαν κάθετον καὶ
πορισάμενον αὐτῆς τὸ μέγεθος εὐρεῖν τοῦ τριγώνου
τὸ ἐμβαδόν, δεόν δὲ ἔστω χωρὶς τῆς καθέτου τὸ ἐμβαδὸν¹⁰
πορίσασθαι.

Teorema 19 (Formula di Erone). In un triangolo ABC , la cui area è indicata con K ed il suo semiperimetro è detto $s = \frac{a+b+c}{2}$, si ha:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (4.2)$$



Dimostrazione. Procediamo, inizialmente, con due costruzioni:

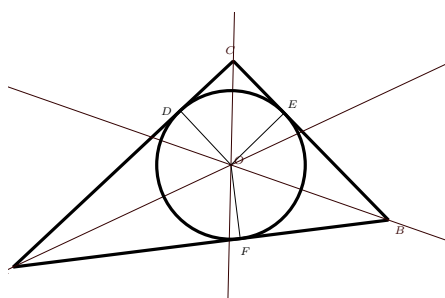
Costruiamo la circonferenza inscritta al triangolo. È bene ricordare che l'incentro è il punto di incontro delle bisettrici, le quali sono il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

Chiamiamo: $\widehat{AOD} = \widehat{FOA} = \alpha$, $\widehat{BOF} = \widehat{EOB} = \beta$ e $\widehat{COE} = \widehat{DOC} = \gamma$.

Osservazioni: $\alpha + \beta + \gamma = \pi^{(a)}$; dato che $CD = CE$, $DA = AF$ e $BF = BE$ $^{(b)}$ si ricava che: $AF + FB + CD = s$.

^aindichiamo con π l'angolo piatto

^bproprietà dei segmenti di tangenza



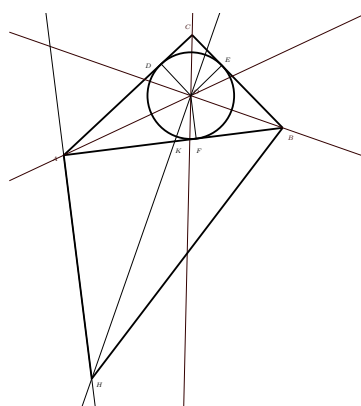
Costruiamo ora, esternamente al triangolo ABC il triangolo rettangolo BAH , costruito in modo che H sia l'intersezione della perpendicolare per A ad AB con la perpendicolare per O a OB .

Dato che, gli angoli $\widehat{BAH}$ e $\widehat{BOH}$ sono retti, si ha che BH è il diametro della semicirconferenza $AHBO^{(a)}$, ne segue che il quadrilatero $AHBO$ è ciclico, $^{(b)}$ quindi $\widehat{AHB} + \underbrace{\widehat{BOA}}_{\alpha+\beta} = \pi$ e dato che

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$, si ha $\widehat{AHB} = \gamma$.

^aproprietà degli angoli al centro e alla circonferenza

^bInscrivibile in una circonferenza: ha quindi gli angoli opposti supplementari



I triangoli DOC e AHB sono pertanto simili, infatti sono entrambi retti e $\widehat{DOC} = \widehat{AHB}$, indicato con r il raggio della circonferenza inscritta ($OD = OE = OF = r$), per la similitudine:

$$\begin{aligned} \underbrace{AB : DC}_{\text{opposti a } \gamma} &= \underbrace{AH : OD}_{\text{adiacenti a } \gamma} \\ \frac{AB}{AH} &= \frac{DC}{OD} = \frac{DC}{r} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Anche i triangoli AHK e FOK sono simili, infatti sono entrambi retti e $\widehat{HKA} = \widehat{OKF}$ opposti al vertice, ricaviamo perciò:

$$\frac{AH}{r} = \frac{AK}{KF} \quad (4.4)$$

e combinando la 4.3 con 4.4 si ottiene:

$$\frac{AK}{KF} = \frac{AB}{DC} \quad (4.5)$$

Il triangolo BOK è rettangolo in O ed ha altezza relativa all'ipotenusa $OD = r$, applicando il II teorema di Euclide si può scrivere: $r^2 = KF \cdot BF$.

A questo punto in 4.5 sommiamo 1 ad entrambi i membri ⁽⁷⁾, $\frac{AK}{KF} + 1 = \frac{AB}{DC} + 1 = \frac{\overbrace{AK + KF}^{AF}}{KF} =$
 $\frac{\overbrace{AB + DC}^s}{DC}, \frac{AF}{KF} = \frac{s}{DC}$, moltiplichiamo ora entrambi i membri per la stessa quantità (BF a sinistra, s a destra)
 $\frac{AF \cdot BF}{KF \cdot BF} = \frac{s^2}{DC \cdot s}$ che si può scrivere: $s^2 \cdot r^2 = AF \cdot BF \cdot DC \cdot s$ sapendo che $AF = s - a$,
 $BF = s - b$ e $DC = s - a$ si ricava: $s^2 r^2 = (s - a)(s - b)(s - c)s$ estraendo la radice quadrata e ricordando che $sr = K$ (semiperimetro per raggio della circonferenza inscritta) si ottiene 4.2. $\square$

La figura in GeoGebra si trova qui ⁽⁸⁾

4.9.1 Commento finale

La dimostrazione riportata si discosta dall'« originale » idea dimostrativa greca come mirabilmente descritta da Acerbi 2007

Lo stile matematico greco pratica la sottrazione dell'inessenziale, la produzione del significato tramite ellissi. Dopo che fu ritenuto necessario produrre dimostrazioni di fatti anche ovvi, ampliando e raffinando così la struttura dell'argomentazione, questa fu sviluppata in modo che certe proprietà strettamente matematiche sussistano proprio grazie alla mancata esplicitazione di qualche elemento del discorso. La generalità matematica si genera proprio come mancanza di determinazioni ulteriori, mentre modernamente abbiamo bisogno di introdurla, in universo algebrico che tratta solo del particolare, con appositi segni.

⁷applichiamo il comporre

⁸se, per qualche motivo, non funziona il link copia e incolla: <https://www.geogebra.org/classic/a9xjcjke>

Capitolo 5

Algebra lineare e geometria analitica

5.1 Elementi di algebra lineare

5.1.1 Equazioni lineari

Premettiamo alcune definizioni. Un'equazione lineare a coefficienti reali in una incognita x è del tipo:

$$ax + b = 0 \tag{5.1}$$

Supposto $a \neq 0$, esiste l'inverso di a che è il numero $\frac{1}{a}$. Allora la 5.1 si può scrivere come

$$x = -\frac{b}{a} \tag{5.2}$$

e quindi la 5.1 ammette la soluzione (detta anche radice): $x = -\frac{b}{a}$

Per $a = 0$ e $b = 0$ la 5.1 diventa un'identità, ogni numero reale è soluzione e l'equazione si dice indeterminata

Per $a = 0$ e $b \neq 0$ la 5.1 non ha soluzioni e l'equazione è impossibile.

Un'equazione lineare a coefficienti reali nelle due incognite x ed y è del tipo:

$$ax + by + c = 0 \tag{5.3}$$

una sua soluzione e una coppia di numeri che sostituita nella 5.3 la rende un'identità.

Un'equazione lineare nelle tre incognite x, y, z è del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5.4}$$

Una soluzione è una terna di numeri che si ottiene fissando in modo arbitrario due delle tre incognite e determinando quindi il corrispondente valore della terza.

5.1.2 Determinanti

Dati quattro numeri reali $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, si dice matrice quadrata di ordine 2 la tabella:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Alla matrice quadrata A è associato il numero reale: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, che si dice determinante del secondo ordine (determinante della matrice A), e si indica con il simbolo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

In modo analogo si definisce matrice quadrata di ordine 3 la tabella:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e si dice determinante del terzo ordine (determinante della matrice A), e si indica con il simbolo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tale numero si può ottenere nel seguente modo:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

I numeri a_{ij} si dicono elementi della matrice e sono disposti in tre righe e tre colonne. Righe e colonne si dicono linee.

Per calcolare i determinanti sono utili le seguenti proprietà:

- i) Il determinante di una matrice con gli elementi di una linea tutti nulli ha valore zero.
- ii) Se gli elementi di una riga si moltiplicano per uno stesso numero, il determinante risulta moltiplicato per il numero.
- iii) Se si scambiano tra loro due righe di una matrice, il determinante cambia segno.
- iv) Il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo.
- v) Se gli elementi della i -esima riga di una matrice sono della forma $a_{ij} + b_{ij}$, il suo determinante è la somma di due determinanti, quello della matrice con la i -esima riga formata dalle a_{ij} , e quello della matrice con la i -esima riga formata dalle b_{ij} .
- vi) Se gli elementi di una riga di una matrice si ottengono come combinazione lineare (con gli stessi coefficienti) di elementi corrispondenti delle rimanenti righe, il suo determinante è nullo, e viceversa.
- vii) Il valore del determinante di una matrice non cambia se agli elementi di una riga vengono aggiunti gli elementi corrispondenti di un'altra riga moltiplicati per una costante.
- viii) Il valore del determinante di una matrice non cambia se si scambiano ordinatamente le righe con le colonne.

con opportuni esempi verificare, utilizzando *sympy* (esempi in 5.5, le proprietà elencate.

Matrici di ordine n : calcolo del determinante

Sia:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata di ordine n , definiamo **minore complementare** dell'elemento a_{ij} il determinante della matrice A_{ij} ottenuta da A eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna. La matrice A_{ij} è di ordine $n - 1$.

Il determinante di A si calcola con una delle seguenti formule:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (5.5)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (5.6)$$

Esercizio 1. Calcolare il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

prima soluzione. Calcoliamo il determinante rispetto la prima riga, la formula 5.5 diventa:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}|$$

sviluppando la somma si ottiene:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

poi si applica, ai minori di ordine 3, nuovamente la formula e si giunge alla soluzione:

$$|A| = 2 \cdot 7 - 0 \cdot 29 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 18$$

□

Osservando come si sviluppa il calcolo, pare più intelligente, utilizzare la formula 5.6 nel seguente modo:

seconda soluzione.

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}|$$

che si riduce, visto la presenza di molti zeri, solo al calcolo di:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 18$$

□

5.1.3 Sistemi lineari

Un sistema lineare di n equazioni in p incognite $x_1, x_2, \dots, x_p$ è un insieme di n equazioni lineari del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

dove le a_{ij} e i b_i sono numeri reali: soluzione del sistema è un qualunque insieme di p numeri reali che verifica ogni equazione del sistema.

Un sistema che ammette soluzioni si dice **compatibile**, se non ammette soluzioni si dice **incompatibile**.

Consideriamo alcuni casi particolari.

Dato un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

si hanno le seguenti possibilità:

- 1) Se il determinante della matrice dei coefficienti, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, è diverso da zero il sistema è compatibile ed ha una sola soluzione, espressa dalla formula di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

- 2) Se il determinante della matrice dei coefficienti, $|A|$, è eguale a zero si hanno ancora due possibilità:

- a) se tutti i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo ad una colonna di coefficienti i termini noti sono nulli, il sistema è compatibile ed ha infinite soluzioni: le due equazioni differiscono solo per un coefficiente di proporzionalità;
- b) se invece almeno uno dei determinanti precedenti è diverso da zero, il sistema è incompatibile

Dato un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

si hanno le seguenti possibilità:

- 1) Se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero il sistema è compatibile ed ha una sola soluzione, espressa dalla formula di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

- 2) Se il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero si hanno ancora due possibilità:

- a) se tutti i determinanti delle matrici che si ottengono da A sostituendo ad una colonna di coefficienti i termini noti sono nulli il sistema è compatibile ed ha infinite soluzioni;
- b) se invece almeno uno dei determinanti precedenti è diverso da zero, il sistema è incompatibile

Nel risolvere un sistema lineare, spesso, il calcolo dei determinanti può risultare molto lungo; si può utilizzare, in questi casi, un metodo più veloce detto metodo delle eliminazioni successive (di Gauss). Tale metodo è basato sul fatto che a partire da un sistema lineare si ottiene un sistema equivalente, cioè con le stesse soluzioni, se:

- i) si scambiano tra loro le equazioni;
- ii) si moltiplicano entrambi i membri di una equazione per un numero reale non nullo;
- iii) si somma ad una equazione il prodotto di un'altra per un numero reale non nullo.

Supponiamo per semplicità di considerare i sistemi di tre equazioni in tre incognite. A partire da un sistema lineare si cerca allora di ottenere un sistema equivalente, detto sistema triangolare, i cui coefficienti formino un determinante del tipo:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix}$$

applichiamo questa tecnica, ad esempio, al sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

possiamo supporre (eventualmente scambiando le equazioni) che sia $a_{11} \neq 0$, e sostituire nel sistema:

- i) alla seconda equazione, la seconda equazione iniziale moltiplicata per $-a_{11}$ e sommata alla prima moltiplicata per a_{21} (supposto non nullo, altrimenti il passaggio è inutile);

- ii) alla terza equazione, la terza equazione iniziale moltiplicata per $-a_{11}$ e sommata alla prima moltiplicata per a_{31} (supposto anch'esso non nullo, altrimenti il passaggio è inutile)

Si ottiene il sistema equivalente a quello iniziale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

dove i termini con gli apici sono ottenuti dai calcoli. Per questo sistema si hanno tre possibilità:

- 1) un'equazione ha tutti i coefficienti nulli ed anche il termine noto è zero: si può eliminare l'equazione ed il sistema ha due equazioni e tre incognite; si cerca di risolverlo come un sistema in due incognite, considerando la terza come un parametro;
- 2) un'equazione ha tutti i coefficienti nulli ma il termine noto diverso da zero: il sistema è incompatibile;
- 3) se sia nella seconda che nella terza equazione vi è un coefficiente non nullo si ripete il procedimento di eliminazione; possiamo supporre (eventualmente scambiando le equazioni) che sia $a'_{22} \neq 0$, e sostituire nel sistema alla terza equazione, la terza equazione del sistema ora ottenuto moltiplicata per $-a'_{22}$ e sommata alla seconda moltiplicata per a_{32} (supposto anch'esso non nullo altrimenti il sistema è già in forma triangolare); si ottiene il sistema equivalente a quello iniziale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

che si risolve per sostituzione a partire dall'ultima equazione.

5.1.4 Vettori del piano

In fisica vi sono grandezze scalari e grandezze vettoriali. Per individuare le prime basta un numero eventualmente con segno, ad esempio la temperatura; le seconde, ad esempio la velocità, sono individuate oltre che da un numero positivo, detto modulo, dalla direzione e dal verso, ossia da un vettore.

Quando interviene anche il punto di applicazione del vettore si parla di vettore applicato, altrimenti di vettore libero o più semplicemente di vettore.

I vettori che verranno utilizzati sono vettori liberi. La loro definizione ha bisogno di alcune premesse.

Consideriamo nel piano le coppie ordinate di punti (A, B) ove A viene detto primo estremo e B secondo estremo, una coppia ordinata, detta anche segmento orientato (A, B) individua:

- i) un numero non negativo $d(A, B) = d(B, A)$ che rappresenta la distanza di A da B rispetto ad una data unità di misura; se $d(A, B) \neq 0$, ossia A non coincide con B ;
- ii) una retta: quella che contiene i punti A e B ;
- iii) un verso sulla retta: quello che va da A al punto B .

Nell'insieme dei segmenti orientati del piano introduciamo una relazione, detta di equipollenza. Diciamo: (A, B) equipollente (C, D) o, più semplicemente, $(A, B)\sigma(C, D)$ se si verifica una delle seguenti condizioni:

- 1) se B coincide con A , anche D coincide con C ;
oppure
- 2) (A, B) e (C, D) appartengono alla stessa retta sono uguali e concordi;
oppure
- 3) (A, B) e (C, D) appartengono a due rette parallele e la retta AC che congiunge i primi estremi è parallela alla retta BD che congiunge i secondi estremi

Quindi: due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno lunghezza nulla oppure hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso. Tale relazione σ è:

- **riflessiva** se comunque scelta (A, B) si ha $(A, B)\sigma(A, B)$;
- **simmetrica** se $(A, B)\sigma(C, D) \Rightarrow (C, D)\sigma(A, B)$;
- **transitiva** se $(A, B)\sigma(C, D)$ e $(C, D)\sigma(E, F) \Rightarrow (A, B)\sigma(E, F)$

Possiamo suddividere l'insieme dei segmenti orientati in sottoinsiemi che diremo classi di equipollenza. Se in ogni classe mettiamo tutti i segmenti equipollenti ad un dato segmento orientato, per individuare una classe basta un qualsiasi elemento che si può scegliere come rappresentante.

Definizione 15 (Vettore). Si dice vettore una classe di segmenti orientati equipollenti

Considerato un vettore, che indicheremo con $\vec{u}$, se (A, B) è un suo rappresentante si pone $\vec{u} = B - A$ o anche $B = A + \vec{u}$.

La distanza di A da B si dice norma o modulo del vettore $\vec{u} = B - A$ e si indica con

$$|\vec{u}| = |B - A|$$

Il vettore nullo 0 ha modulo zero, direzione e verso indeterminati.

I vettori con norma 1 sono detti **versori**.

Somma di due vettori

La somma di due vettori si definisce su due rappresentanti dei vettori: scelto un punto A se $B - A$ è un rappresentante del vettore $\vec{u}$ e $C - B$ un rappresentante del vettore $\vec{v}$ allora $C - A$ è un rappresentante del vettore $\vec{u} + \vec{v}$. L'operazione è indipendente dalla scelta del punto A .

La costruzione di un rappresentante del vettore $\vec{u} + \vec{v}$ può essere fatta anche mediante la regola del parallelogramma se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non hanno rappresentanti sulla stessa retta, ossia se $B - A$ è un rappresentante del vettore $\vec{u}$ e $D - A$ un rappresentante del vettore $\vec{v}$, si costruisce il parallelogramma $ABCD$, il segmento orientato AC rappresenta $\vec{u} + \vec{v}$. Dimostrare che: l'insieme dei vettori con l'operazione di somma forma un gruppo commutativo.

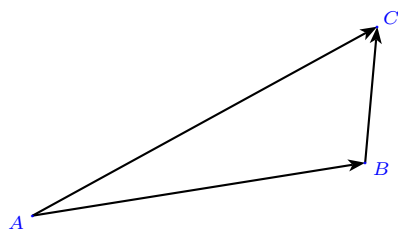


Figura 5.1: Somma di due vettori

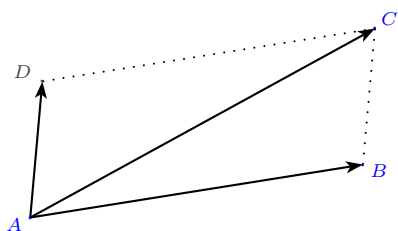


Figura 5.2: Somma di due vettori, regola del parallelogramma

Prodotto di un numero reale per un vettore

Introduciamo ora una legge di composizione, detta prodotto, che ad una coppia ordinata formata da un numero reale ed un vettore associa un solo vettore.

Definizione 16 (Prodotto fra vettore e scalare). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}$ un vettore, per prodotto $\lambda \vec{u}$ si intende il vettore $\vec{w}$ tale che:

è per definizione il vettore nullo se $\lambda = 0$ oppure $\vec{u} = 0$, altrimenti è il vettore tale che:

- $|\vec{w}| = |\lambda| |\vec{u}|$
- $\vec{w}$ ha la direzione di $\vec{u}$
- $\vec{w}$ ha il verso di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, verso contrario se $\lambda < 0$.

Scelti comunque i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di numeri reali λ e μ valgono le seguenti eguaglianze:

- i) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- ii) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- iii) $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$
- iv) $1\vec{u} = \vec{u}$

Definizione 17 (Vettori paralleli). Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dicono paralleli se hanno rappresentanti sulla stessa retta, ossia $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

L'insieme dei vettori, definiti come classi di segmenti del piano orientati equipollenti con la somma e il prodotto per un numero reale prima definiti è un caso particolare di spazio vettoriale sul campo dei numeri reali, che indicheremo con S_2 .

Definizione 18 (Spazio vettoriale). Diciamo che V è uno spazio vettoriale su $K \subseteq \mathbb{R}$ se in V sono definite:

- i) una legge di composizione interna detta somma (+);
- ii) una legge di composizione esterna (prodotto per uno scalare);

Le due operazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:

- i) $(V, +)$ è un gruppo commutativo;
- ii) la legge di prodotto per scalari gode delle seguenti proprietà:
 - a) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
 - b) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
 - c) $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$
 - d) $1\vec{u} = \vec{u}$

Gli elementi di K vengono detti scalari, gli elementi di V vengono detti vettori.

Sia P_n l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale ad n con le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto per un reale.

Verifica che P_n è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Se si considera invece l'insieme dei polinomi di grado n con le stesse operazioni, non si ottiene uno spazio vettoriale in quanto, ad esempio, manca il polinomio nullo.

Consideriamo l'insieme M_{mn} delle matrici con m righe ed n colonne, definiamo:

- **somma** di $A \in M_{mn}$ e $B \in M_{mn}$ la matrice $C \in M_{mn}$ i cui elementi sono la somma degli elementi di A e B che stanno nella stessa posizione;
- **prodotto con un reale** per la matrice A , la matrice kA i cui elementi sono i prodotti degli elementi di A per k .

Verifica che M_{mn} è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Definizione 19 (Sottospazio Vettoriale). Un sottoinsieme non vuoto V' di uno spazio vettoriale V , si dice sottospazio vettoriale di V se è spazio vettoriale con le restrizioni delle operazioni da V a V' .

Definizione 20 (Combinazione lineare di vettori). Siano $v_1, \dots, v_m$ m vettori di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ ed $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, m numeri reali, il vettore:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_m$, con coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

Fissati m vettori di V , $v_1, \dots, v_m$ l'insieme dei vettori loro combinazioni lineari è un sottospazio vettoriale F di V .

Definizione 21 (Sistema di generatori). Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$ si dice un sistema di generatori di V se ogni vettore u di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$

Definizione 22 (Vettori linearmente dipendenti). Sia V uno spazio vettoriale. Un sistema di vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$ si dice linearmente dipendente, se esiste una combinazione lineare con scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ non tutti nulli tale che:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

In questo caso i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono detti linearmente dipendenti.

Tre vettori dello spazio S_3 sono complanari se e solo se sono linearmente dipendenti, mentre quattro vettori di S_3 sono sempre l.d.

Definizione 23 (Base di uno spazio vettoriale). Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che l'insieme ordinato di vettori $v_1, \dots, v_m$ forma una base di V se i vettori formano un sistema di generatori e inoltre sono l.i.

Definizione 24 (Dimensione). Si dice dimensione di uno spazio vettoriale V il numero n di vettori che ne costituiscono una qualunque base.

Definizione 25 (Angolo di due vettori non nulli). Fissato un arbitrario punto O e considerati i vettori $A - O$ e $B - O$, l'angolo fra i due vettori è l'angolo convesso (eventualmente piatto) delle semirette AO, OB .

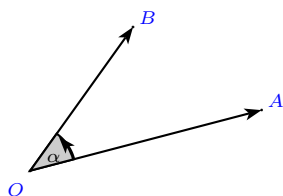


Figura 5.3: Angolo fra due vettori $0 \leq \alpha \leq \pi$

Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi$ i vettori sono paralleli, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i vettori sono ortogonali

Prodotto scalare

Definizione 26 (Prodotto scalare). Considerati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di S_3 si dice prodotto scalare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e si indica $\vec{u} \cdot \vec{v}$, il numero reale:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u} \vec{v}})$$

Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli:

- i) $\alpha = \widehat{\vec{u} \vec{v}} = 0 \cos(\alpha) = 1 \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|$
- ii) $\alpha = \pi \cos(\alpha) = -1 \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| |\vec{v}|$

quindi il prodotto scalare può essere anche definito come il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione con segno del secondo sul primo (si veda Figura 5.4)

Il prodotto scalare è zero se $\vec{u} = 0$ oppure $\vec{v} = 0$ oppure $\cos(\widehat{\vec{u} \vec{v}}) = 0$ ossia se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali. Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

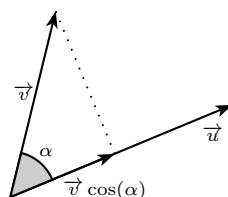


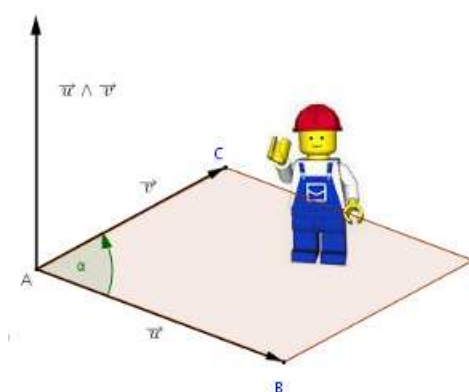
Figura 5.4: Proiezione con segno di un vettore nella direzione dell'altro

- i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ii) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- iii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e vale zero se e solo se $\vec{u} = 0$

Prodotto vettoriale

Definizione 27 (Prodotto vettoriale). Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di S_3 si dice loro prodotto vettoriale o esterno un vettore, che si indica $\vec{u} \wedge \vec{v}$, così definito:

- se i vettori sono paralleli o in particolare uno è il vettore nullo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$
- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli:
 - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è ortogonale sia ad $\vec{u}$ che a $\vec{v}$;
 - il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u} \vec{v}})$
 - il verso è quello indicato in Figura 5.5, ossia è il verso piedi-testa dell'omino che posto sul piano individuato da $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, vede la minima rotazione in senso antiorario che sovrapporre $\vec{u}$ a $\vec{v}$.


 Figura 5.5: Prodotto vettoriale in S_3

Il modulo di $\vec{u} \wedge \vec{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati i due rappresentanti consecutivi di $\vec{u}$ e $\vec{v}$.¹

Il prodotto misto di tre vettori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ è il numero reale $\vec{x} \wedge \vec{y} \cdot \vec{z}$ rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori.

5.1.5 Basi e basi canoniche

Introdotta nello spazio vettoriale S_2 una base, ossia una coppia ordinata di vettori l.i., ogni vettore di S_2 si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \quad \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

Per il prodotto scalare si ha:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + u_1 v_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + u_2 v_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + u_2 v_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$$

Per semplificare l'espressione del prodotto scalare in componenti è opportuno scegliere una base particolare, detta base ortonormale, formata in E_3 da: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ per cui si ha:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \end{aligned} \tag{5.7}$$

da cui:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

avendo posto $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, per il prodotto vettoriale applicando le 5.7 si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \wedge (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k} \end{aligned}$$

si osserva che si può ricavare sviluppando, **rispetto la prima riga**, il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

Provare a calcolare $\vec{v} \wedge \vec{u}$... cosa si osserva?

¹Questi risultati saranno sviluppati ed approfonditi in trigonometria

5.2 Geometria analitica

5.2.1 Riferimento cartesiano

Sia E_2 il piano euclideo, O un punto di E_2 e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base dello spazio vettoriale S_2 . Diciamo che il punto P ha coordinate (x, y) nel riferimento $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se il vettore $P - O$ ha componenti x ed y rispetto alla base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e viceversa:

$$P = (x, y) \Leftrightarrow P - O = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Il punto O viene detto origine del sistema di riferimento ed ha coordinate $(0, 0)$. La retta per O parallela ad $\vec{e}_1$ viene detta asse delle x o asse delle ascisse, un suo punto ha coordinate $(x, 0)$; la retta per O parallela ad $\vec{e}_2$ viene detta asse delle y o asse delle ordinate, un suo punto ha coordinate $(0, y)$. Se $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ sono versori e sono ortogonali il riferimento viene detto **riferimento cartesiano ortonormale** ed i versori sono indicati con $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Definizione 28 (Modulo di un vettore in E_2). Sia $\vec{u} = P_1 - O$ con $P_1 = (x_1, y_1)$ e $O = (0, 0)$ si ha che:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

più in generale detto $P_2 = (x_2, y_2)$ si ha:

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Definizione 29 (Modulo di un vettore in E_n). Siano $P_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ e $P_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ allora si definisce

$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + \dots + (x_{1n} - x_{2n})^2}$$

Definizione 30 (Baricentro). Si definisce baricentro di n punti $P_1, P_2, \dots, P_n$ il punto G tale che

$$G - O = \frac{1}{n} ((P_1 - O) + (P_2 - O) + \dots + (P_n - O))$$

Utilizzando la definizione di baricentro, ricavare che le coordinate del punto medio di due punti dati sono le semisomme delle coordinate.

5.2.2 Equazioni della retta

Esistono più modi per rappresentare una retta del piano.

La retta per un punto P_0 parallela ad un vettore $\vec{u}$ è formata dai punti P tali che il vettore $P - P_0$ sia parallelo al vettore $\vec{u}$, ossia

$$P - P_0 = t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

Tale formula, detta equazione vettoriale della retta, è indipendente dalla dimensione dello spazio vettoriale.

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ risulta: $P - P_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ se $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ la 5.9 diventa: $(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = t(a\vec{i} + b\vec{j})$ ed eguagliando le componenti si ottengono le equazioni parametriche della retta:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad (5.10)$$

Si dicono parametri direttori della retta le componenti di un qualsiasi vettore parallelo alla retta, quindi, nell'esempio, la coppia (a, b) . Eliminando nella 5.10 il parametro t si ottiene l'equazione cartesiana della retta. Se i parametri direttori (a, b) sono entrambi non nulli la retta ha equazione: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

Se $a = 0$ la retta ha equazione $x = x_0$, se $b = 0$ la retta ha equazione $y = y_0$.

Una retta può essere individuata dall'insieme dei punti P che con un fissato punto P_0 formano vettori perpendicolari ad un dato vettore $\vec{n}$:

$$(P - P_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.11)$$

Se $(^2) \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ si ottiene: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, che sviluppata porta:

$$ax + by + \underbrace{(-ax_0 - by_0)}_c = 0 \quad ax + by + c = 0 \quad (5.12)$$

Mutua posizione di due rette

Due rette possono avere:

- i) un punto comune e allora si dicono **incidenti**;
- ii) nessun punto comune e allora si dicono **parallele**
- iii) infiniti punti comuni e allora si dicono **parallele coincidenti**;

Fasci di rette

Si dice fascio proprio di rette l'insieme di tutte le rette del piano che passano per un dato punto, fascio improprio l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una data direzione.

Date due rette distinte r ed s di equazioni: $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ una loro combinazione lineare con coefficienti λ e μ : $\lambda(ax + by + c) + \mu(a_1x + b_1y + c_1) = 0$ è l'equazione della generica retta del fascio; infatti essendo un'equazione lineare in x ed y rappresenta una retta, inoltre passa per il punto comune P_0 ad r ed s , oppure è parallela alla loro direzione comune. Se $P_1 = (x_1, y_1)$ è diverso da P_0 vi è una ed una sola retta del fascio che passa per P_1 , la sua equazione è:

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(ax + by + c) + (ax_1 + by_1 + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

²Osservare che la 5.11 rappresenta: una retta nel piano, un piano nello spazio oppure un iperpiano in S_4 che ... si può disegnare?

Distanze

a) Distanza di due punti.

Dati due punti $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ la loro distanza è il modulo del vettore $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ quindi:

$$d(P_2, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (5.13)$$

b) Distanza di un punto da una retta.

Considerati il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e la retta r di equazione $ax + by + c = 0$, siano $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto di r ed $\vec{n} = (a, b)$ (5.11) un vettore ortogonale ad r . Per definizione $\vec{n} \cdot (P_1 - P_0)$ è il prodotto del modulo di $\vec{n}$ per la proiezione con segno di $P_1 - P_0$ su $\vec{n}$, ossia è il prodotto del modulo di $\vec{n}$ per la distanza di P_0 da r , a meno del segno perché qui si considerano distanze positive:

$$d(P_0, r) = \frac{|\vec{n} \cdot (P_1 - P_0)|}{|\vec{n}|}$$

Esprimendo il prodotto scalare in componenti e ricordando che $c = -ax_1 - by_1$, perché P_1 verifica l'equazione di r si ottiene:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.14)$$

c) Distanza di due rette parallele.

La distanza di due rette parallele r ed s è la distanza di un qualsiasi punto di s da r .

Area del triangolo

L'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 si può calcolare, utilizzando i vettori, come la metà del modulo del prodotto vettoriale di $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$.

Utilizzando 5.8 il calcolo può essere così svolto:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

ma dato che $\vec{k}$ è un versore si ha che l'area si calcola sviluppando l'ultimo determinante.

5.3 Curve nel piano

5.3.1 Generalità sulla rappresentazione delle curve piane

Una linea piana può essere definita come traiettoria di un punto che si muove nel piano secondo una data legge oppure mediante una proprietà che caratterizza i suoi punti. Quindi fissato un sistema di riferimento cartesiano xOy si hanno le seguenti rappresentazioni della curva:

i) come traiettoria di un punto $P(t)$ le cui coordinate sono espresse in funzione di un parametro t

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (5.15)$$

ii) come luogo dei punti $P(x, y)$ le cui coordinate soddisfano un'equazione cartesiana del tipo

$$f(x, y) = 0 \quad (5.16)$$

In generale si può passare, almeno su piccoli tratti di curva dalla 5.15 alla 5.16 eliminando t ; viceversa risolvendo la 5.16 rispetto ad una delle incognite si perviene alla 5.15.

Definizione 31 (Curva algebrica). Se f è un polinomio la curva si dice algebrica ed il grado del polinomio si dice ordine della curva.

Definizione 32 (Conica). Si dice conica ogni curva algebrica del secondo ordine.

5.4 Le Coniche

Nello studio della geometria elementare, l'unica linea curva che solitamente si incontra è la circonferenza; le coniche, sono, dopo la circonferenza, le curve piane più semplici, e le prime che storicamente sono state studiate: intorno al 225 a.C., Apollonio di Perga scrisse un famoso trattato sulle coniche; Cartesio, nella sua Geometria (1637), ne diede la prima trattazione con i metodi della geometria analitica.

Le coniche possono essere studiate da tre punti di vista diversi: quello della geometria elementare dello spazio, quello della geometria elementare del piano, e quello della geometria analitica piana. Le coniche dal punto di vista della geometria elementare:

- 1) prima definizione (dal punto di vista della geometria elementare dello spazio): le coniche come sezioni di un cono. Consideriamo anzitutto un cono a due falde, ovvero la superficie, nello spazio, così definita: si considera una retta a , detta asse del cono (che pensiamo verticale), e un punto V su a , detto vertice del cono; su un piano orizzontale, si considera una circonferenza avente il centro su a ; il cono a due falde è la superficie formata da tutte le rette (dette generatrici del cono) che passano per V e per un punto qualsiasi della circonferenza.

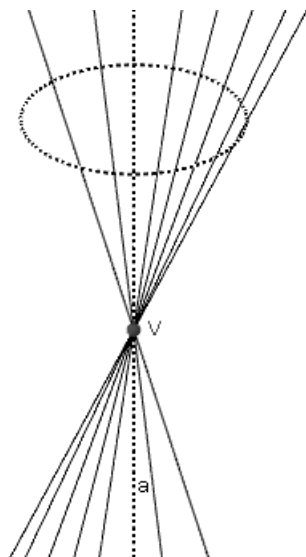


Figura 5.6: Costruzione del cono a due falde

Si dice conica qualsiasi curva si ottenga intersecando il cono a due falde con un piano qualsiasi dello spazio, non passante per il vertice V ;

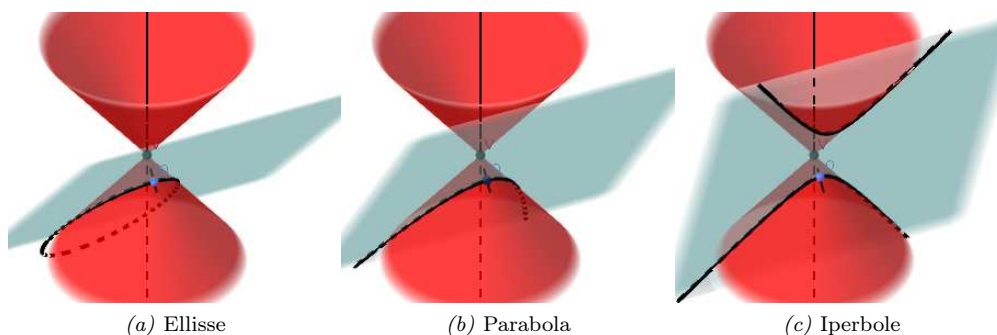


Figura 5.7: Le coniche come sezioni di un cono a due falde

- 2) seconda definizione (dal punto di vista della geometria elementare piana): le coniche come luoghi geometrici. Senza fare uso di costruzioni tridimensionali, le coniche possono anche essere definite direttamente come opportuni luoghi geometrici nel piano,

5.4.1 Le coniche come luoghi geometrici del piano

Ellisse

Siano F_1, F_2 due punti nel piano, eventualmente coincidenti, e d un numero reale maggiore della distanza $\overline{F_1 F_2}$. Si chiama ellisse di fuochi F_1, F_2 l'insieme dei punti P del piano tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = d$, ossia tali che la somma delle loro distanze dai due fuochi è costante. Caso

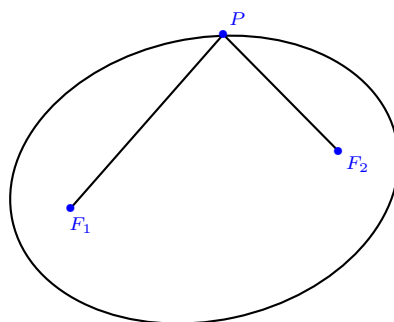


Figura 5.8: Ellisse

particolare: se $F_1 = F_2$, l'ellisse è la circonferenza di raggio d e centro F_1 .

Questa definizione suggerisce anche un modo empirico per tracciare un'ellisse: si fissa uno spago sottile di lunghezza d a due chiodini F_1, F_2 ; con una matita si tende lo spago (la punta della matita è in P); ora si fa scorrere la matita tutt'attorno ai due fuochi, tenendo sempre teso il filo: la curva tracciata è un'ellisse.

Costruire l'ellisse con GeoGebra sfruttando la definizione

Parabola

Sia F un punto del piano (detto fuoco della parabola) e d una retta, non passante per F (detta direttrice della parabola). Si dice parabola di fuoco F e direttrice d il luogo dei punti equidistanti da F e d . In altre parole: per ogni punto P della parabola, detta H la sua proiezione su d , risulta: $\overline{PF} = \overline{PH}$

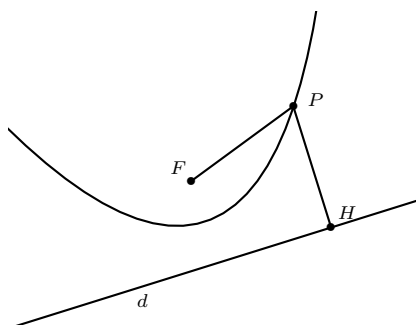


Figura 5.9: Parabola

Dopo aver osservato come si costruisce una parabola con GeoGebra, disegnare una parabola come luogo geometrico

Iperbole

Siano F_1, F_2 due punti nel piano, e d un numero reale positivo minore della distanza $\overline{F_1 F_2}$. Si chiama iperbole di fuochi F_1, F_2 il luogo dei punti P del piano tali che $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm d$, ossia tali che il modulo della differenza delle loro distanze dai 2 fuochi sia costante.

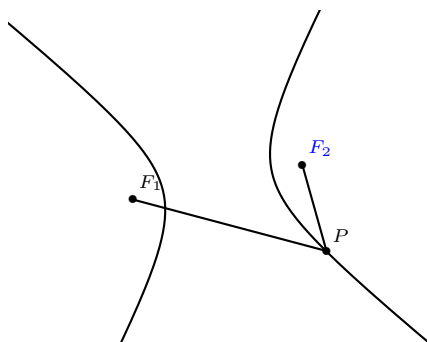


Figura 5.10: Iperbole

Idee per la costruzione delle coniche

Solo due figure ...

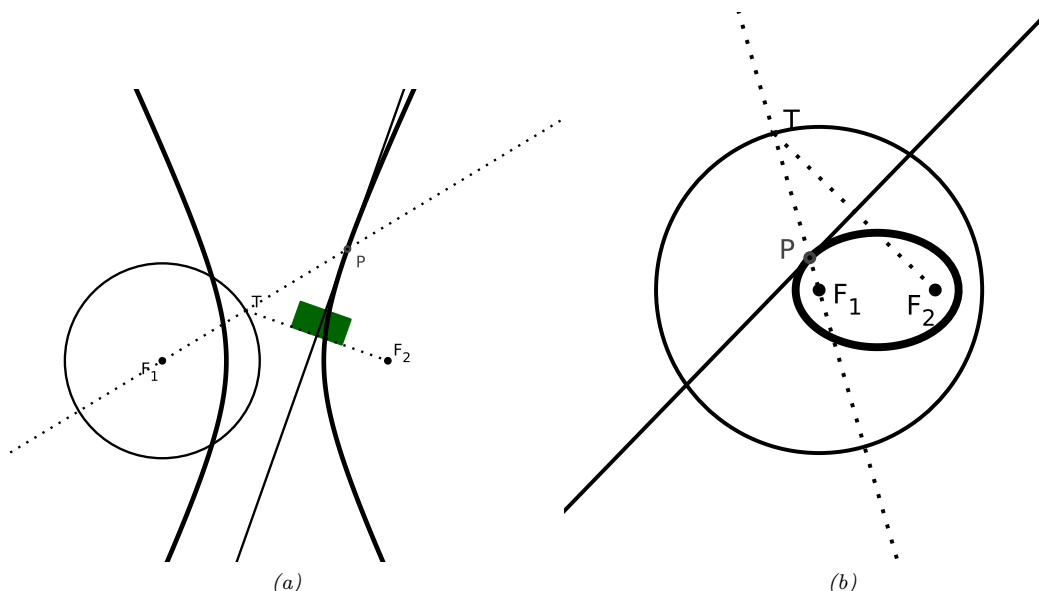


Figura 5.11: Le coniche come luogo geometrico

Osservando le figure (5.11a, 5.11b), costruire il file di GeoGebra, giustificando i passaggi

Si può dimostrare che una curva è un'ellisse (rispettivamente: una parabola, un'iperbole) rispetto alla prima definizione (sezione di un cono) se e solo se lo è rispetto alla seconda definizione (luogo geometrico definito mediante opportune distanze). Le due definizioni date sono dunque equivalenti, anche se a prima vista molto diverse. Il seguente teorema, che non dimostriamo, fornisce una caratterizzazione ancora diversa di ellisse, parabola e iperbole come luoghi geometrici, che è forse meno intuitiva della prima, ma ha il pregio di trattare i tre tipi di coniche in modo più uniforme:

Teorema 20 (dell'eccentricità di una conica). Consideriamo, nel piano, un punto, detto fuoco, ed una retta, detta direttrice. Il luogo dei punti P per cui il cui rapporto tra la distanza di P dal fuoco e la distanza di P dalla direttrice è costante è una conica; questa costante si dice eccentricità (e) della conica. Precisamente, la conica risulta essere:

- un'iperbole se $e > 1$;
- una parabola se $e = 1$;
- un'ellisse se $e < 1$
- una circonferenza se $e = 0$ (caso limite)

5.4.2 Le coniche dal punto di vista della geometria analitica

Equazione canonica delle coniche

Dopo aver dato varie definizioni delle coniche dal punto di vista della geometria elementare (sintetica) e ora naturale chiederci come si rappresentino analiticamente, ossia: dato un sistema di riferimento cartesiano xOy , come si scrivono le equazioni delle coniche? La definizione di ellisse, parabola, iperbole come luogo geometrico si presta facilmente ad essere tradotta in un calcolo analitico, fissato un opportuno riferimento cartesiano xOy :

detti $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ i fuochi di un'ellisse, applicando la definizione di luogo si ottiene:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = d \quad \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = d$$

Sviluppando i calcoli (utile esercizio) si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad a^2 = \frac{d^2}{4} \quad b^2 = \frac{d^2 - 4f^2}{4}$$

detti $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$ i fuochi di un'iperbole, applicando la definizione di luogo si ottiene:

$$(\overline{PF_1} - \overline{PF_2}) = d \quad \left(\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \right)^2 = d^2$$

Sviluppando i calcoli (utile esercizio) si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad a^2 = \frac{d^2}{4} \quad b^2 = \frac{4f^2 - d^2}{4}$$

detti $F = (0, f)$ e $d : x = d$ fuoco e direttrice di una parabola, applicando la definizione di luogo si ottiene:

$$\overline{PF} = d(P, d) \quad \left(\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \right)^2 = |y - d|$$

Sviluppando i calcoli (utile esercizio) si ottiene:

$$y = ax^2 + bx + c \quad a = -\frac{1}{2d} \quad b = \frac{f}{d} \quad c = \frac{d^2 - f^2}{2d}$$

I calcoli precedenti mostrano come si scrive l'equazione di un'ellisse, una parabola o un'iperbole, in un sistema di riferimento scelto in maniera tale da rendere abbastanza semplice l'equazione della conica. Questa forma semplice dell'equazione viene detta forma canonica, ed è quella che si presta a studiare per via analitica le proprietà delle coniche e disegnarle.

Utilizziamo il teorema 20 per costruire le coniche. Sia $F = (0, f)$ il fuoco, $d : y = d$ la direttrice e $P = (x, y)$ un generico punto del piano, applicando le ipotesi del teorema 20 si ottiene: $\frac{\sqrt{(x^2 + (y-f)^2)}}{|y-d|} = e$ sviluppando i calcoli si ricava: $x^2 + (1-e^2)y^2 - 2y(f-e^2d) + f^2 - e^2d^2 = 0$, si osserva che come da definizione la conica è una curva algebrica del secondo ordine, per verificare la tesi del teorema è opportuno sviluppare alcune considerazioni preliminari.

5.4.3 Coordinate omogenee nel piano

Sia $P = (x, y)$ un punto del piano. Diremo che (x_1, x_2, x_3) sono le coordinate omogenee di P se $x = \frac{x_1}{x_3}$ e $y = \frac{x_2}{x_3}$. Nel caso $x_3 \neq 0$ le precedenti scritture hanno evidentemente un senso, e diremo che il punto è proprio. Ogni punto proprio (x, y) può banalmente essere individuato da una terna di coordinate omogenee $(x, y, 1)$. Inoltre due terne tra loro proporzionali individuano lo stesso punto nel piano.

Nel caso il punto P sia individuato dalla terna $(x, y, 0)$ esso verrà detto improprio.

L'insieme dei punti impropri del piano forma una retta detta retta impropria, la cui equazione è $x_3 = 0$.

Consideriamo ora la retta $r : ax + by + c = 0$, nel passaggio alle coordinate omogenee, la sua equazione diventa $a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$ cioè $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Tale retta avrà uno ed un solo punto di intersezione con la retta impropria, e sarà detto il punto improprio di r .

È noto che tutti e soli i punti di r sono quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Tra questi punti c'è anche il punto improprio di coordinate omogenee $(b, -a, 0)$. Ma similmente ogni punto improprio del tipo $(\alpha b, -\alpha a, 0)$ soddisfa la precedente equazione, quindi un punto improprio è unico a meno di un fattore di proporzionalità. In altre parole, due qualsiasi terne $(x, y, 0)$ e $(z, t, 0)$ tra loro proporzionali, individuano il medesimo punto improprio.

In particolare il punto improprio $(b, -a, 0)$ della retta r si può riscrivere come $\left(1, -\frac{a}{b}, 0\right)$ (dividendo la terna per b). La seconda coordinata non è altro che il coefficiente angolare della retta. Concludiamo allora che rette parallele hanno lo stesso punto improprio (poiché hanno lo stesso coefficiente angolare).

Sappiamo dalle precedenti definizioni che una conica è una curva algebrica di secondo grado, pertanto la sua equazione in coordinate omogenee diventa:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

a cui è possibile associare la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se $|A| = 0$ si può dimostrare che la conica è degenera, noi ci limitiamo ad alcune verifiche: $x^2 - y^2 = 0$ conica che degenera in una coppia di rette (le due bisettrici del piano cartesiano),

scritta in coordinate omogenee: $x_1^2 - x_2^2 = 0$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha

evidentemente determinante nullo;

$-3y^2 + 2xy + 7y + x^2 + x - 2 = 0$ che degenera in una coppia di rette $x - y + 2 = 0$ e $x + 3y - 1 = 0$ scritta in coordinate omogenee:

$-3x_2^2 + 2x_1x_2 + 7x_2x_3 + x_1^2 + x_1x_3 - 2x_3^2 = 0$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -3 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$ ha determinate

nullo (calcolare per esercizio)

La retta impropria, come visto, è la retta delle “direzioni del piano”; quindi se noi intersechiamo la generica conica con la retta impropria ($x_3 = 0$) troviamo le “direzioni della conica”, in particolare se la conica è chiusa (ellisse) non avrà intersezioni con la retta impropria, se è una parabola avrà una sola intersezione con la retta impropria (la direzione dell’asse) mentre per un’iperbole le intersezioni sono due (le direzioni degli asintoti).

Il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

conduce all’equazione: $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ che se $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \geq 0$ può essere scritta nella forma $(\alpha x_1 + \beta x_2)(\alpha' x_1 + \beta' x_2) = 0$ che individuano i punti impropri $\left(1, -\frac{\alpha}{\beta}, 0\right)$ e $\left(1, -\frac{\alpha'}{\beta'}, 0\right)$. Quindi possiamo concludere dicendo:

- i) $\Delta > 0$ la conica è un’iperbole;
- ii) $\Delta = 0$ la conica è una parabola;
- iii) $\Delta < 0$ la conica è un’ellisse;

Queste considerazioni ci permettono di verificare la tesi del teorema 20. L’equazione $x^2 + (1 - e^2)y^2 - 2y(f - e^2d) + f^2 - e^2d^2 = 0$ trasformata in coordinate omogenee: $x_1^2 + (1 - e^2)x_2^2 - 2x_1x_3(f - e^2d) + (f^2 - e^2d^2)x_3^2 = 0$ il $\Delta = e^2 - 1$ per cui:

- i) $e > 1$ la conica è un’iperbole;
- ii) $e = 1$ la conica è una parabola;
- iii) $0 < e < 1$ la conica è un’ellisse;
- iv) $e = 0$ la conica è una circonferenza.

5.5 Con Python

```
[1]: from sympy import *
init_printing()
import random
```

5.5.1 Matrici in python

Impostiamo una matrice 3×3

```
[2]: matrice = Matrix([[1,0,2],[2,-1,1],[0,1,-2]])
matrice
```

```
[2]:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 
```

```
[10]: A = matrice
B = Matrix([[random.randint(-3,2),random.randint(-3,2),random.randint(-3,2)],
↪ \
```

```
[random.randint(-3,2),random.randint(-3,2),random.randint(-3,2)], \
[random.randint(-3,2),random.randint(-3,2),random.randint(-3,2)]]
B
```

[10]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operazioni

```
[11]: somma = A + B
      somma
```

[11]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

```
[12]: R = Matrix([[1,2,3]])
      C = Matrix([[1],[2],[3]])
      R, C, R*C
```

[12]:
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [14] \right)$$

```
[13]: prodotto = A * B
      prodotto
```

[13]:
$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

```
[14]: determinante = A.det()
      determinante
```

[14]: 5

```
[15]: inversa = B** -1
      inversa, inversa*B, B*inversa
```

[15]:
$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Matrice identità

```
[17]: eye(3)
```

[17]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

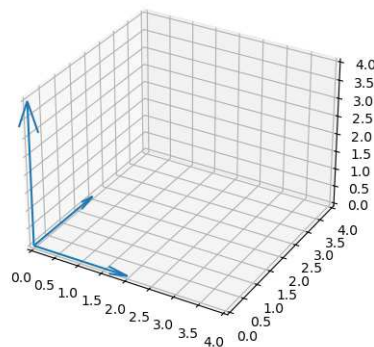
```
[16]: a,b,c,x,y,z = symbols('a,b,c,x,y,z')
      v1 = Matrix([a,b,c])
      v2 = Matrix([x,y,z])
      cross_result = v1.cross(v2)
      cross_result
```

```
[16]:  $\begin{bmatrix} bz - cy \\ -az + cx \\ ay - bx \end{bmatrix}$ 
```

```
[31]: P = Matrix([0,0,0])
      u1 = Matrix([0,2,0])
      u2 = Matrix([2,0,0])
      u3 = cross_result = u2.cross(u1)
```

```
[32]: %matplotlib ipympl
      import matplotlib.pyplot as plt
      from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
      import numpy as np
```

```
[34]: lfreccia = 0.2
      fig = plt.figure()
      ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
      ax.quiver(P[0],P[1],P[2],u1[0],u1[1],u1[2],arrow_length_ratio = lfreccia)
      ax.quiver(P[0],P[1],P[2],u2[0],u2[1],u2[2],arrow_length_ratio = lfreccia)
      ax.quiver(P[0],P[1],P[2],u3[0],u3[1],u3[2],arrow_length_ratio = lfreccia)
      ax.set_xlim([0, 4])
      ax.set_ylim([0, 4])
      ax.set_zlim([0, 4])
      plt.show()
```

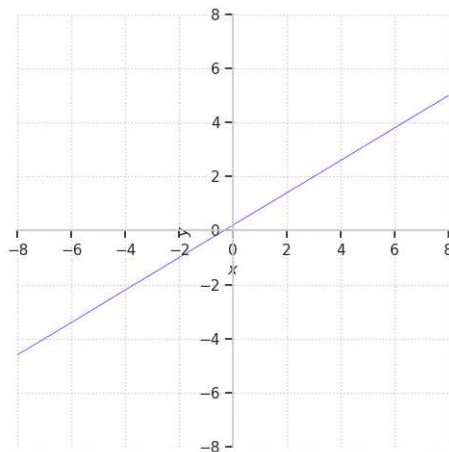


```
[1]: from sympy import *
init_printing()
import seaborn as sns
sns.set()
sns.set_style("whitegrid", \
              {"xtick.major.size": 0.25, "xtick.minor.size": 0.25, \
               'grid.linestyle': ':'})
```

5.5.2 Coniche e ... non solo

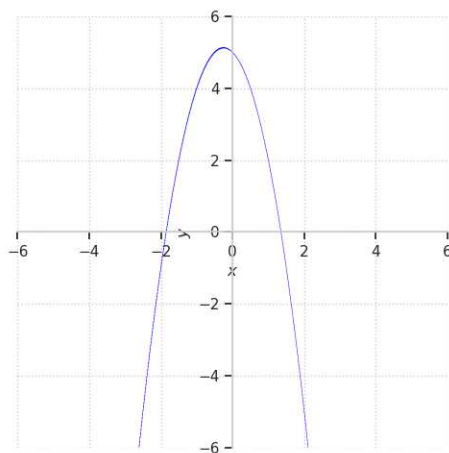
Retta per due punti

```
[2]: Ax = -2
Ay = -1
Bx = 3
By = 2
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit((y-Ay)/(By-Ay)-(x-Ax)/(Bx-Ax), (x, -8, 8), (y, -8, 8), \
                 show=False, size=(5,5))
p.show()
```



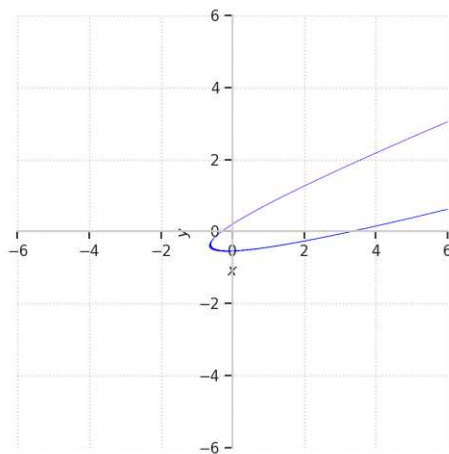
Parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate (y) noti a, b, c

```
[3]: a = -2
b = 1
c = -5
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit(y-a*x**2+b*x+c, (x, -6, 6), (y, -6, 6), \
                 show=False, size=(5,5))
p.show()
```



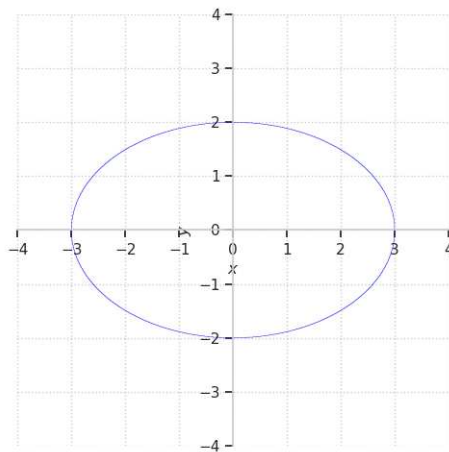
Parabola generica: $(ax + by)^2 + cx + dy + e = 0$

```
[4]: a = -1
b = 3
c = -3
d = 3
e = -1
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit((a*x+b*y)**2+c*x+d*y+e,(x, -6, 6), (y, -6, 6), \
                 show=False,size=(5,5))
p.show()
```



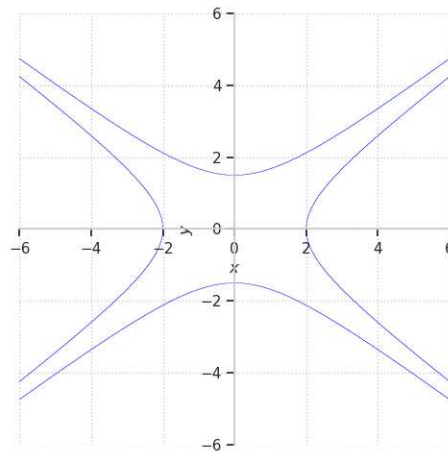
Ellisse con centro nell'origine e come assi x e y

```
[5]: a = 3
b = 2
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit(x**2/a**2+y**2/b**2-1,(x, -4, 4), (y, -4, 4), \
                 show=False,size=(5,5))
p.show()
```



Iperbole nella forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$

```
[6]: a = 2
b = 3/2
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit((x/a)**2-(y/b)**2+1,(x, -6, 6), (y, -6, 6), \
                 show=False,size=(5,5))
p1 = plot_implicit((x/a)**2-(y/b)**2-1,(x, -6, 6), (y, -6, 6), \
                  show=False,size=(5,5))
p.append(p1[0])
p.show()
```



Conica generica $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$

Dopo aver “generato la conica” Vediamo che conica è:

```
[7]: import random
```

```
[8]: a11 = random.randint(-3,3)
a12 = random.randint(0,4)
a22 = random.randint(0,5)
a13 = random.randint(2,3)
a23 = random.randint(1,2)
a33 = random.randint(-4,4)
Delta = a12**2-4*a11*a22
if Delta == 0 :
    print('parabola')
elif Delta > 0 :
    print('iperbole')
elif Delta < 0 :
    print('ellisse')
```

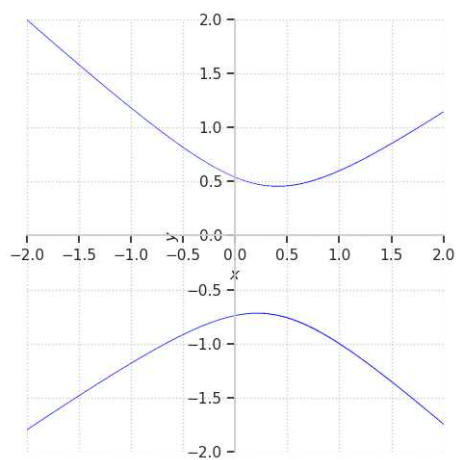
iperbole

```
[9]: eq = Eq(a11*x**2+a12*x*y+a22*y**2+a13*x+a23*y+a33,0)
eq
```

```
[9]: -3x2 + xy + 2x + 5y2 + y - 2 = 0
```

```
[10]: lato = 2
x,y = symbols('x,y')
p = plot_implicit(a11*x**2+a12*x*y+a22*y**2+a13*x+a23*y+a33,(x, -lato, lato),
    ↪(y, -lato, lato), \
    show=False,size=(5,5))
```

```
p.show()
```



Capitolo 6

Aritmetica modulare

6.1 Diamo ... i numeri

Per cominciare cosa disse nel 1891 il matematico Peano¹

“I primi numeri che si presentano, e con cui si formano tutti gli altri, sono gli interi e positivi. E la prima questione è: possiamo noi definire l’unità, il numero, la somma di due numeri?”

La definizione comune di numero, che è l’Euclidea, «numero è l’aggregato di più unità», può servire come schiarimento, ma non è soddisfacente come definizione.

Invero un bambino, a pochi anni usa le parole uno, due, tre, ecc.; in seguito adopera la parola numero; solo molto più tardi nel suo dizionario comparisce la parola aggregato. E nello stesso ordine, come insegna la filologia, ci sono presentate nello sviluppo delle lingue ariane.

Quindi, dal lato pratico la questione parmi risolta; ossia,

non conviene in un insegnamento dare alcuna definizione di numero, essendo questa idea chiarissima agli allievi, e ogni definizione non avendo che l’effetto di confonderla.

E di questa opinione è pure la maggior parte degli autori.

Dal lato teorico, per decidere la questione della definizione [del concetto di numero], occorre sia detto prima di quali idee ci possiamo servire. Qui si suppongono note le sole idee rappresentate dai segni $\cap$ (e), $\cup$ (o), $-(non)$, ecc.

[...] E allora il numero non si può definire, poiché è evidente che comunque si combinino fra loro queste parole non si potrà mai avere una espressione equivalente a numero.

Però, se il numero non si può definire, si possono enunciare quelle proprietà da cui derivano come conseguenza tutte le innumerevoli e ben note proprietà dei numeri.

I concetti, adunque, che non definiamo sono quelli di numero, n , di unità, 1, e di successivo d’un numero a , che qui si indica per un istante con $a+$. Questi concetti non si possono ottenere per deduzione; bisogna ottenerli per induzione (astrazione). Il successivo di a si è qui indicato

¹Giuseppe Peano (1858-1932), matematico italiano, portò avanti le ricerche sulla aritmetizzazione della matematica, giungendo alla conclusione che tutta la matematica poteva essere ricondotta ai concetti e alle operazioni dell’aritmetica.

con $a+$, invece che con $a+1$, come d'uso; e ciò si è fatto per indicare con un segno solo, $+$, l'operazione fondamentale «successivo di».

Del resto [...], definita la somma $a + b$ di due numeri, ne risulta che $a+1$ vale appunto $a+$, cioè il successivo di a , e così si ritorna alle solite notazioni.

Le proposizioni primitive, vale a dire le proposizioni esprimenti le più semplici proprietà dei numeri interi, da cui derivano tutte le altre, sono:

1. «L'unità è un numero».
2. «il segno $+$ messo dopo un numero produce un numero».
3. «Se a e b sono due numeri, e se i loro successivi sono eguali, anche essi sono eguali».
4. «L'unità non segue alcun numero».
5. «Se s è una classe che contiene l'unità, e se la classe formata dai successivi di s è contenuta in s , allora ogni numero è contenuto nella classe s ». [...]

La prop. 5 si può enunciare:

«Se s è una proprietà (dei numeri), e se l'unità ha questa proprietà, e se tutte le volte che un numero ha questa proprietà, anche il successivo la possiede; allora ogni numero ha la proprietà s ». [...]

Questa proprietà è comunemente chiamata la regola di induzione matematica. Essa è intuitiva, e non si può ridurre ad altre più semplici.”



GIUSEPPE PEANO, *Sul concetto di numero*.

Archiviato (diciamo così) il problema dei numeri, facciamo tesoro di alcune idee lette nel brano e analizziamo le proprietà dei numeri naturali.

6.1.1 L'insieme $\mathbb{N}$

In $\mathbb{N}$ è definita una legge di composizione interna (operazione) definita dal simbolo $+$ con le seguenti proprietà:

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ si ha che $a + b \in \mathbb{N}$

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ si ha che $a + b = b + a$

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ si ha che $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$\exists 0 \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{N} : a + 0 = a$$

In $\mathbb{N}$ è definita una legge di composizione interna (operazione) definita dal simbolo $\cdot$ (o meglio senza nessun simbolo) con le seguenti proprietà:

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ si ha che $ab \in \mathbb{N}$

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ si ha che $ab = ba$

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ si ha che $(ab)c = a(bc)$

$\exists 1 \in \mathbb{N} \forall a \in \mathbb{N} : a \cdot 1 = a$ inoltre:

$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \ a(b + c) = ab + ac$

Applicazioni: le espressioni

6.2 L'insieme $\mathbb{Z}$

Costruisco un nuovo insieme $\mathbb{Z}$ aggiungendo alle proprietà di sopra questa:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \exists b = -a \in \mathbb{Z} : a + b = 0 \quad (6.1)$$

scrivi le proprietà di $\mathbb{Z}$

Attento all'idea: la proprietà 6.1 ci “costringe” a creare un nuovo insieme numerico!

6.2.1 Aritmetica in $\mathbb{Z}$

L'uguaglianza fra elementi di $\mathbb{Z}$ gode di “evidenti” proprietà:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a = a$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{se } a = b \rightarrow b = a$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \text{se } a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$$

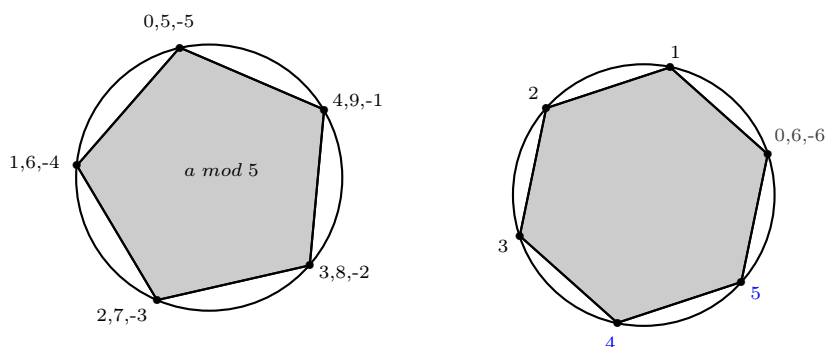
e inoltre se $x = x'$ e $y = y'$ si ha che $x + y = x' + y'$ e $xy = x'y'$

le congruenze

Definizione 33 (Congruenza). Definiamo *congruenti* (mod d) due numeri di $\mathbb{Z}$ se restituiscono nella divisione con d lo stesso resto.

Ad esempio: 6 e 11 sono congrui modulo 5 infatti $6 = 5 \cdot 1 + 1$ e $11 = 5 \cdot 2 + 1$ in questo caso diremo $6 \equiv 11 \pmod{5}$

un modo facile per rappresentare le congruenze:



le proprietà dell'uguaglianza valgono anche per le congruenze:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \pmod{d}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{se } a \equiv b \rightarrow b \equiv a \pmod{d}$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \text{se } a \equiv b \wedge b \equiv c \rightarrow a \equiv c \pmod{d}$$

due numeri a, b sono congruenti $\pmod{d}$ se e solo se $a = b + nd$ e d divide $a - b$

siano $a \equiv a'$ e $b \equiv b'$ allora:

$$a + b \equiv a' + b'$$

$$ab \equiv a'b'$$

infatti:

$$a = a' + nd, b = b' + md \text{ quindi } a + b = a' + nd + b' + md = a' + b' + d(m + n) \rightarrow a + b \equiv a' + b'$$

$$a = a' + nd, b = b' + md \text{ quindi } ab = (a' + nd)(b' + md) = a'b' + mda' + b'nd + nmd = a'b' + d(ma + b'n + mn) \rightarrow ab \equiv a'b'$$

Quanto sopra giustifica i criteri di divisibilità già studiati:

- i) un numero è divisibile per 3 se la somma delle cifre è divisibile per 3:

sia $m \in \mathbb{Z}$ un numero di n cifre, m può essere scritto come:

$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_n 10^n \text{ valutiamo le congruenze } \pmod{3} \text{ delle potenze di } 10:$$

$$10 \pmod{3} = 1 \text{ cioè } 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 \text{ quindi applicando le proprietà si ha } 10^2 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \text{ pertanto:}$$

$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_n 10^n \equiv a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1$$

- ii) un numero è divisibile per 11 se la differenza fra le cifre di posto pari meno quelle di posto dispari è divisibile per 11: infatti $10^1 \pmod{11} = -1$ e $10^2 \pmod{11} = 1$, applicando le proprietà si ha la regola.

Esercizio 2. Quanto vale il resto della divisione di $10(2007)^4 - 8(2007)^3 + 12(2007)^2 + 721$ per 669?

Soluzione. $2007 \pmod{669} = 0$ quindi

$$(10(2007)^4 - 8(2007)^3 + 12(2007)^2 + 721) \pmod{669} =$$

$$= 10(2007)^4 \pmod{669} - 8(2007)^3 \pmod{669} + 12(2007)^2 \pmod{669} + 721 \pmod{669} =$$

$$0 + 0 + 0 + 721 \pmod{669} = 52$$

□

Esercizio 3. A quale numero tra 0 e 6 è congruo modulo 7 il prodotto:

$$11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$$

Soluzione. $11 \bmod 7=4$; $18 \bmod 7=4$; $2322 \bmod 7=5$; $13 \bmod 7=6$; $19 \bmod 7=5$, ma dato che: $6 \equiv -1$ e $5 \equiv -2$ si ha $4 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 5 = 160, 160 \bmod 7 = 6$ $\square$

Esercizio 4. A quale numero fra 0 e 4 è congrua modulo 5 la somma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{19}$?

Soluzione. $1 \bmod 5 = 1$, $2 \bmod 5 = 2$,
 $2^2 \bmod 5 = (2 \bmod 5)(2 \bmod 5) = 4$, $2^3 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 3$, $2^4 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 1$
 $2^5 \equiv 1 \cdot 2 \dots$

la somma richiesta si può scrivere:

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + 2^{18} + 2^{19} \equiv (1 + 2 + 4 + 3) \cdot 4 + 1 + 2$
 ma $(1 + 2 + 4 + 3) = 10 \equiv 0$ e quindi il resto è 3. $\square$

Quanto vale il resto modulo 5 della somma $\sum_{k=0}^{2013} 2^k$

6.3 Algoritmo euclideo per il calcolo del massimo comune divisore

Osservazione preliminare: detti m ed n due numeri naturali ($\in \mathbb{N}$), tali che $m \geq n$, si può sempre scrivere $m = qn + r$ dove $q, r \in \mathbb{N}$; quindi un intero che divide m ed n divide anche r ,

pertanto $\gcd(m, n) = \gcd\left(n, \underbrace{m \bmod n}_r\right)$.

Teorema 21 (di Bézout). Siano $a, b \in \mathbb{Z}$, sia d massimo comune divisore di a e b . Allora esistono $s, t \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$sa + tb = d \quad (6.2)$$

Tale uguaglianza si dice identità di Bézout, I numeri s e t si dicono coefficienti di Bézout di a e b .

Dimostrazione. Se $a = 0$, allora b è un massimo comune divisore di a e b , e si può prendere $s = 0$, $t = 1$.

Supponiamo ora che a non sia nullo, sia $X = \{ax + by > 0 \mid a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Allora X è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ Inoltre è diverso dal vuoto, infatti, se $a > 0$, allora $a1 + b0 = a \in X$, e se $a < 0$, allora $a(-1) + b0 = -a \in X$. Essendo X inferiormente limitato ammette minimo, sia m questo minimo. Presi $s, t \in \mathbb{Z}$ tali che $as + bt = m$, vogliamo provare che m è un massimo comune divisore (gcd) di a e b . Per provare che m divide a e b , utilizziamo il teorema di divisione euclidea. Siano q ed r il quoziente ed il resto della divisione di a per m . Allora $r < m$ e $r = a - mq = a - (as + bt)q = a(1 - sq) + b(-tq)$. Se fosse $r > 0$, allora si avrebbe $r \in X$, e quindi $m \leq r$, il che costituisce una contraddizione. Quindi $r = 0$, il che prova che m divide a . Analogamente si prova che m divide b .

Supponiamo ora che $e \in \mathbb{Z}$ sia tale che $e|a$ ed $e|b$. Allora, e divide as e bt e quindi, divide $as + bt = m$. Ciò prova che m soddisfa le condizioni ed è dunque un massimo comune divisore di a e b . $\square$

6.4 Terne pitagoriche

Problema 1. Trovare tutte le terne di interi (i, j, n) tali che $n^2 = i^2 + j^2 \wedge \gcd(i, j) = 1$.

Dimostrazione. Osservazione preliminare $(2n)^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $(2m+1)^2 \equiv 1 \pmod{4} \forall n, m \in \mathbb{N}$

Se i e j sono entrambi pari si ha $i = 2k, j = 2h$ e pertanto $\gcd(i, j) \neq 1$

Se i e j sono entrambi dispari si ha $i = 2k+1, j = 2h+1$ quindi $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4h^2 + 4h + 1 = 4(k^2 + k + h^2 + h) + 2$ ma questo comporta che $n^2 \equiv 2 \pmod{4}$ non possibile data l'osservazione preliminare.

Si ricava che i e j sono uno pari e l'altro dispari, supponiamo, senza violare la generalità del problema, che i sia dispari, perciò:

$n - i$ è pari

$n + i$ è pari

allora $\exists p \in \mathbb{N} : p = \frac{n-i}{2}$ e anche $\exists q \in \mathbb{N} : q = \frac{n+i}{2}$

$$q + p = \frac{n+i}{2} + \frac{n-i}{2} = \frac{n+i+n-i}{2} = n$$

$$q - p = \frac{n+i}{2} - \frac{n-i}{2} = \frac{n+i-n+i}{2} = i$$

$$j^2 = n^2 - i^2 = (q+p)^2 - (q-p)^2 = q^2 + 2qp + p^2 - (p^2 - 2qp + q^2) = q^2 + 2qp + p^2 - p^2 + 2qp - q^2 = 4qp$$

dato che j è pari $\frac{j^2}{4} \in \mathbb{N}$ $\frac{j^2}{4} = \left(\frac{j}{2}\right)^2$ quindi qp è un quadrato perfetto, possiamo scrivere:

$p = x^2 m_1$ dove m_1 è il prodotto di tutti i fattori non ripetuti di p

$q = y^2 m_2$ dove m_2 è il prodotto di tutti i fattori non ripetuti di q

$pq = x^2 y^2 m_1 m_2$ ma dato che pq è un quadrato si dovrà avere $m_1 = m_2 = m$ ora per l'ipotesi $\gcd(i, j) = 1$ si ha $m = 1$.

Una generica terna pitagorica (i, j, n) si può costruire partendo da due interi $x, y : \gcd(x, y) = 1$ e calcolando $i = x^2 - y^2; j = 2xy; n = x^2 + y^2$ $\square$

- sapresti fare qualche esempio in cui pur valendo $\gcd(x, y) = 1$ non vale $\gcd(i, j) = 1$.
- scelti x dispari e y pari sotto l'ipotesi $\gcd(x, y) = 1$ vale sempre che $\gcd(i, j) = 1$?

6.5 Ricavare le terne pitagoriche con la geometria analitica

Leggendo Andreatta 2019 mi sono imbattuto in un interessante costruzione delle terne pitagoriche. Eccola in sintesi:

data la circonferenza Γ di centro l'origine raggio unitario, la cui equazione è $x^2 + y^2 = 1$, sia $A = (-1, 0)$, costruiamo ora l'insieme delle rette di equazione $y = \frac{p}{q}(x+1)$ $p \in \mathbb{N}$ $q \in \mathbb{N} - \{0\}$, queste rette sono tutte le rette del fascio di centro A aventi coefficiente angolare razionale $\left(\frac{p}{q} = m \in \mathbb{Q}\right)$. Queste rette incontrano Γ oltre che in A in C . Calcoliamo ora le coordinate di C , basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{p}{q}(x+1) \end{cases}$$

che con semplici calcoli permette di ricavare: $C = \left(\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \frac{2pq}{q^2 + p^2}\right)$, ma per costruzione le coordinate di C risolvono l'equazione $x_C^2 + y_C^2 = 1$ che ci porta ad ottenere che $(q^2 - p^2)^2 + (2pq)^2 = (q^2 + p^2)^2$, quindi scelti p, q , non entrambi dispari, tali che $\gcd(p, q) = 1$ la terna $(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$ è una terna pitagorica primitiva.

6.6 Con Python

6.6.1 Algoritmo di Euclide: calcolo del massimo comun divisore (gcd)

Calcolo semplice: “tipo” calcolatrice

```
[1]: m = 2024
     n = 1344
     while n != 0 :
         r = m % n
         m = n
         n = r
     m
```

```
[1]: 8
```

Chiediamo aiuto a sympy

```
[2]: from sympy import *
     init_printing()
```

```
[3]: m = 2024
     n = 1344
     gcd(m,n), lcm(m,n)
```

```
[3]: (8, 340032)
```

```
[4]: factorint(m), factorint(m, multiple = True)
```

[4]: $(\{2:3, 11:1, 23:1\}, [2, 2, 2, 11, 23])$

[5]: `factorint(n)`

[5]: $\{2:6, 3:1, 7:1\}$

[6]: `2**6*3*7*11*23`

[6]: 340032

6.6.2 Aritmetica con sympy

[7]: `p = nextprime(2024)`
`p1 = prevprime(2024)`
`p, p1`

[7]: (2027, 2017)

[8]: `primepi(2024)`

[8]: 306

? ...

[9]: `conta = 0`
`for k in range(2,2024) :`
 `if isprime(k) :`
 `conta += 1`
`conta`

[9]: 306

[10]: `list(primerange(2024))`

[10]: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759,

1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017

```
[11]: u = 310826
      prime(u)
```

```
[11]: 4422503
      ? ...
```

```
[12]: conta = 1
      h = 3
      while conta < u :
          if isprime(h) :
              conta += 1
              uprimo = h
          h += 2
      uprimo
```

```
[12]: 4422503
```

```
[13]: %matplotlib ipynb
      import matplotlib.pyplot as plt
      import numpy as np
```

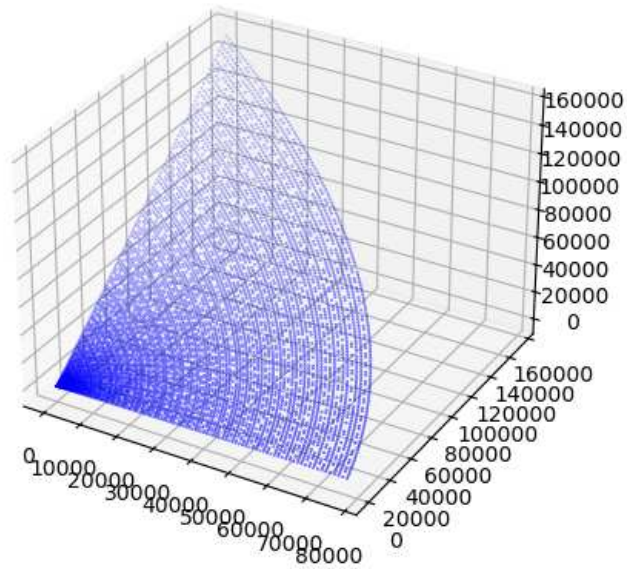
6.6.3 Terne pitagoriche primitive

dati due interi p, q non entrabi dispari e tali che $\gcd(p, q) = 1$ la terna è:

$$(q^2 - p^2, 2pq, q^2 + p^2)$$

```
[14]: # ipotesi q > p
      puntiX = []
      puntiY = []
      puntiZ = []
      for q in range(2, 280, 2):
          for p in range(1, q):
              if gcd(p, q) == 1:
                  a = q**2 - p**2
                  b = 2*p*q
                  c = p**2 + q**2
                  puntiX.append(a)
                  puntiY.append(b)
                  puntiZ.append(c)
      puntiX = np.array(puntiX, dtype=np.int64)
      puntiY = np.array(puntiY, dtype=np.int64)
      puntiZ = np.array(puntiY, dtype=np.int64)
      figura = plt.figure(figsize=(5, 5), dpi=100)
      ax = plt.axes(projection='3d')
```

```
ax.scatter3D(puntiX, puntiY, puntiZ, c = 'b', s = 0.1)  
plt.show()
```



Capitolo 7

Calcolo discreto

7.1 Calcolo discreto ... ovvero matematica ricreativa

7.1.1 Permutazioni

I risultati che andremo via via a trovare saranno ricavati partendo da problemi «reali»

Problema 2. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) della parola *via*?

Soluzione. si possono facilmente elencare:

1: <i>aiv</i>	3: <i>iav</i>	5: <i>vai</i>
2: <i>avi</i>	4: <i>iva</i>	6: <i>via</i>

Sono 6, infatti il primo carattere può essere scelto in 3 modi (a,i,v) una volta fissato il primo carattere me ne restano due fra cui scegliere, quindi per ogni primo carattere due caratteri cioè $3 \cdot 2$ per l'ultimo carattere non c'è scelta. $\square$

Proviamo a generalizzare il problema: se ho una parola come *sfera*, formata da 5 caratteri diversi, posso ragionare come in precedenza: in 5 modi scelgo il primo carattere per ogni scelta ho 4 possibilità per il secondo carattere, poi 3 per il terzo 2 per il quarto e 1 solo per quinto, ottengo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Definizione 34 (Fattoriale di n). Si definisce fattoriale di un $n \in \mathbb{N}$, $n!$ la funzione così definita:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= n \cdot ((n-1)!) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Gli anagrammi di *sfera* son $5! = 120$.

In generale si può affermare che dati n oggetti distinti è possibile porli in $n!$ sequenze distinte, le sequenze così ottenute si chiamano permutazioni.

7.1.2 Permutazioni con ripetizione

Problema 3. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) della parola *aia*?

Soluzione. si possono facilmente elencare:

1: <i>aai</i>	3: <i>aai</i>	5: <i>iaa</i>
2: <i>aia</i>	4: <i>aia</i>	6: <i>iaa</i>

Come si osserva le permutazioni (3!) si ripetono a causa della presenza della doppia *a*, infatti le due *a* son indistinguibili e quando vengono permutate non si crea una nuova stringa, pertanto le stringhe diverse sono: $\frac{3!}{2!} = 3$ □

Mettiamo alla prova la tecnica introdotta utilizzando un esempio un po' più complesso: troviamo quanti sono gli anagrammi di *matta*; stando a quanto visto dovrebbero essere: $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$:

1: <i>aamtt</i>	7: <i>atamt</i>	13: <i>maatt</i>	19: <i>taamt</i>	25: <i>tmaat</i>
2: <i>aatmt</i>	8: <i>atatm</i>	14: <i>matat</i>	20: <i>taatm</i>	26: <i>tmata</i>
3: <i>aamtt</i>	9: <i>atmat</i>	15: <i>matta</i>	21: <i>tamat</i>	27: <i>tmtaa</i>
4: <i>amatt</i>	10: <i>atmta</i>	16: <i>mtaat</i>	22: <i>tamta</i>	28: <i>ttaa</i>
5: <i>amtat</i>	11: <i>attam</i>	17: <i>mtata</i>	23: <i>tatam</i>	29: <i>ttama</i>
6: <i>amtta</i>	12: <i>attma</i>	18: <i>mttaa</i>	24: <i>tatma</i>	30: <i>ttmaa</i>

Problema 4. Della parola *MATEMATICA* si costruiscono gli anagrammi e si elencano in ordine alfabetico: calcolare che posizione occupa la parola *MATEMATICA*.

Soluzione. Intanto osserviamo che l'elenco è formato da $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$ stringhe; quelle che iniziano per *A* sono $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45360$, quelle che iniziano per *C* sono $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$, quelle che iniziano per *E* sono $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$, quelle che iniziano per *I* sono $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 15120$, la prima parola che inizia per *M* occupa il posto 90721 e sarà: *MAAAACEIMTT*, ora le parole che iniziano per *MAA* sono $\frac{7!}{2!} = 2520$, quelle del tipo *MAC* sono $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$, quelle *MAE* sono $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$, quelle *MAI* sono $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$, quelle *MAM* sono $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 1260$, la 98281 stringa è *MATAACEIM*, le stringhe che iniziano per *MATA* sono $6! = 720$, quelle *MATC* 360 la 99361 è *MATEAACIMT*, la 99601 stringa è *MATEMAACIT*, la 99672 è *MATEMATACI*, ci sono 12 parole la cui ottava lettera è *A* o *C*, si giunge così a *MATEMATIAC* ancora un passo ed otteniamo **MATEMATICA** cioè la 99686 del nostro elenco. □

Problema 5. Quante parole di 5 lettere posso formare con le prime 5 (*A,B,C,D,E*) lettere dell'alfabeto?

Soluzione. Posso pensare alla parola formata da 5 caselle in ciascuna casella è possibile inserire una qualsiasi lettera quindi le parole sono $5^5 = 3125$ □

7.1.3 Una definizione di probabilità senza tanti «fronzoli»

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei possibili risultati di un certo esperimento (lancio di un dado, estrazione di una carta etc.), definiamo i risultati eventi allora $\mathcal{F}$ è detto spazio degli eventi. Definiamo probabilità di un certo evento il numero dei modi in cui si può verificare diviso tutti i possibili risultati. Ad esempio nel caso del lancio di un dado (6 facce) gli eventi possibili sono: faccia che mostra un solo punto; faccia che mostra due punti ..., che sono in totale 6, se l'evento richiesto è esce una faccia con un numero pari di punti, è evidente che questo si verifica in tre occasioni (esce la faccia che mostra due punti, oppure quattro oppure sei). Nel nostro caso la probabilità è data da $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Nel lancio di due dadi voglio ottenere una coppia di sei (evento le due facce mostrano entrambe sei punti). I casi possibili sono 36, infatti per ogni faccia mostrata dal primo dado il secondo ne può mostrare altre sei. La probabilità nel nostro caso è: $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

Accettiamo questa idea: se gli eventi sono indipendenti (cioè uno non condiziona l'altro) la probabilità si ottiene come prodotto delle probabilità.

Qualche esempio:

Problema 6. Qual è la probabilità che, formando un numero di sei cifre, utilizzando solo il 3, il 5 e il 7, si ottenga un numero in cui compaiono due 3, due 5 e due 7?

Soluzione. Calcoliamo i casi possibili, in ogni casella posso mettere uno qualsiasi dei tre numeri pertanto: 3^6 ; i casi favorevoli sono le sequenze tutte le sequenze di 6 cifre formate dalle 2-ripetizioni dei tre numeri: $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$. La probabilità cercata è $\frac{90}{36} = \frac{10}{81} \simeq 0.1234568$ $\square$

7.1.4 Disposizioni e combinazioni

Problema 7. Quante parole di tre lettere posso formare con i caratteri J, O, G, A, S , usando in ogni parola sempre lettere distinte.

Soluzione. La prima lettera può essere scelta fra uno qualsiasi dei 5 caratteri, per la seconda ho a disposizione 4 caratteri mentre solo 3 per la terza, in totale $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ $\square$

In generale se ho n oggetti distinti con cui riempire contenitori con k posti ho $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ modi.

Definizione 35 (Disposizioni di n oggetti presi a k a k). $D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ Le disposizioni sono il numero di k -uple ordinate che si possono formare con n elementi.

Problema 8. Quante sono le cinquine che si possono ottenere estraendo una dopo l'altra cinque palline da un'urna contenente 90 palline numerate (da uno a novanta). ⁽¹⁾

Soluzione. Il problema è simile al precedente solo che, in questo caso, non mi interessa l'ordine in cui sono estratte le palline, quindi ogni permutazione di una cinquina è equivalente, pertanto: $\frac{D_{n,k}}{k!}$ è il numero cercato. $\square$

¹In sostanza il gioco del Lotto

In generale se ho n oggetti distinti con cui riempire contenitori con k posti ho $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ modi.

Definizione 36 (Combinazione di n oggetti presi a k a k).

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (7.2)$$

Le combinazioni sono il numero dei sottoinsiemi di k elementi che si possono formare con n elementi distinti.

La 7.2 può essere così modificata:

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Il simbolo $\binom{n}{k}$ si legge *n su k*

7.1.5 Il superEnalotto

Dal regolamento scopriamo ...

Art. 3 - Il concorso consiste nel pronosticare i primi numeri estratti nelle ruote del lotto di Bari, Firenze, Milano, Napoli, Palermo e Roma, indipendentemente dalla posizione dei sei pronostici rispetto all'ordine alfabetico delle ruote. Per ogni pronostico indovinato si consegue un punto; la somma dei punti (massimo sei) si prende a base per la determinazione dei vincitori, come previsto dall'art. 14. Per il conseguimento della vincita di seconda categoria il pronosticatore deve indovinare cinque dei sei numeri primi estratti nelle ruote del lotto di cui al primo comma del presente articolo e il numero primo estratto nella ruota di Venezia, denominato "numero complementare". Se il primo estratto di una ruota sia un numero uguale al primo estratto di una ruota che in ordine alfabetico la precede, ai fini della determinazione dei numeri vincenti, viene preso in considerazione il secondo numero estratto; se anche il secondo estratto sia un numero uguale al primo estratto di altra ruota che precede, viene preso in considerazione il terzo numero estratto, e così via. La medesima procedura si applica anche nei confronti del numero complementare. Qualora non sia possibile determinare una combinazione vincente di prima categoria con punti 6 o di seconda categoria, con punti 5 più il numero complementare, perché nelle sei ruote utili per l'individuazione del pronostico vengono estratti numeri uguali o per qualsiasi altro motivo, si applica la disposizione prevista al terzo comma dell'art. 14.

Art. 14 - Le giocate vincenti sono di norma di cinque categorie. Alla prima categoria appartengono quelle in cui i pronostici relativi ai primi numeri estratti nelle sei ruote indicate nel primo comma dell'art. 3 sono esatti; alla seconda categoria appartengono quelle in cui sono esatti cinque pronostici più il "numero complementare" (primo estratto nella ruota di Venezia), alla terza, alla quarta e alla quinta categoria le giocate rispettivamente con 5, 4 e 3 pronostici esatti.

...

Per ciascun concorso, in mancanza di:

- a) vincite di prima categoria con punti 6, il relativo montepremi andrà a sommarsi con quello della medesima categoria del concorso successivo, fino al concorso nel quale saranno realizzate vincite con punti 6;
- b) vincite di seconda categoria con punti 5 più il numero complementare, ...

analizziamo prima con attenzione l'evento $6 = \{\text{indovino i 6 numeri}\}$ dal regolamento si coglie che non sempre si può formare la sestina, infatti:

BA -> 10

FI -> 18

MI -> 84

NA -> 12

PA -> 90

se la cinquina estratta a Roma è 84, 12, 18, 90, 10 la sestina del superenalotto non si forma.

Calcoliamo ora la probabilità dell'evento $p6n = p\{\text{non si forma la sestina}\}$

$p6n = \frac{1}{\binom{90}{5}}$ una sola cinquina fra tutte le possibili!

Sia $p6v = p\{\text{si realizza la sestina}\} = 1 - p6n$

$$p6v = 1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}$$

l'evento $6n = \{\text{non si realizza la sestina}\}$ e l'evento $6v = \{\text{si realizza la sestina}\}$ costituiscono l'insieme di tutte le possibili alternative: $6v \cup 6n = \Omega$

Per calcolare la probabilità di fare sei ($p6$) ho due alternative (eventi): $6v$ o $6n$, se si verifica $6n$ allora $p6 = 0$ se si verifica $6v$ calcolo la $p6$ in questo nuovo insieme, scrivo così: $p(6|6v)$ che si legge "probabilità dell'evento 6 SAPENDO CHE si è realizzato l'evento $6v$ "

$$\begin{aligned} p6 &= p(6|6v) + p(6|6n) = p6v p(6 \cap 6v) + p6n p(6 \cap 6n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \frac{1}{\binom{90}{6}} + \frac{1}{\binom{90}{5}} 0 \end{aligned}$$

per il 5 si ragiona in modo analogo:

$$\begin{aligned} p5 &= p(5|6v) + p(5|6n) = p6v p(5 \cap 6v) + p6n p(5 \cap 6n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \frac{\binom{6}{5} \binom{84}{1}}{\binom{90}{6}} + \frac{1}{\binom{90}{5}} \frac{\binom{5}{5} \binom{85}{1}}{\binom{90}{6}} \end{aligned}$$

... 4, 3

per il 5+1

se si realizza la sestina (evento 6v), allora la probabilità che il numero Jolly sia diverso dai sei

già estratti è: $1 - \frac{\binom{6}{5}}{\binom{90}{5}}$ e quindi indovino il 5+1 se faccio 5 e se indovino il Jolly: probabilità:

$$\frac{\binom{6}{5} \binom{84}{1}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{84}$$

se non si realizza la sestina (evento 6n), allora la probabilità che il numero Jolly sia diverso dai cinque già estratti è: $1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}$ e quindi indovino il 5+1 se faccio 5 e se indovino il Jolly:

probabilità:

$$\frac{\binom{5}{5} \binom{85}{1}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{85}$$

quindi

$$\begin{aligned} p5p1 = & \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \left(1 - \frac{\binom{6}{5}}{\binom{90}{5}}\right) \left(\frac{\binom{6}{5} \binom{84}{1}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{84}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right) \left(\frac{\binom{5}{5} \binom{85}{1}}{\binom{90}{6}} \frac{1}{85}\right) \end{aligned}$$

7.1.6 Combinazioni con ripetizione

Problema 9. In quanti modi posso ottenere 7 sommando 3 numeri interi non negativi ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$).

Soluzione. Pensiamo a 7 come 7 barrette $|, |, |, |, |, |, |$ che hanno la proprietà di aggregarsi, ad esempio $||||$ è 4. Il problema diventa contare i possibili "aggregati" di barrette sommati fra loro, come ad esempio $||| + || + |$. Pertanto devo contare in quanti modi posso disporre le sette barrette nell'insieme sette $|$ e due $+$.

$$C_{n,k}^R = \binom{n-1+k}{k}$$

Nel nostro caso k sono le barrette e n le x_i . □

$C_{n,k}^R$ sono le combinazioni con ripetizione.

Problema 10. La nonna Maria va in drogheria per acquistare delle guarnizioni per i dolci. Il negozio vende: confetti, chicchi di caffè, candeline a 50 centesimi alla confezione e canditi a 2 € alla confezione. La nonna ha speso 10 €. Quanti sono i diversi tipi di spesa possibili?

Soluzione. Prendiamo come unità 50 centesimi, così il problema si può scrivere:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 20$$

Prendiamo il caso in cui la nonna acquisti una sola confezione di canditi, otteniamo: $x_1 + x_2 + x_3 = 16$, che ci permette di determinare che in questo caso le diverse spese sono: $C_{3,16}^R = \binom{18}{16} = 153$. Dette i il numero di confezioni acquistate, la soluzione generale è data da:

$$\sum_{i=0}^5 \binom{20-4i+3-1}{20-4i} = 536$$

□

Quanti modi diversi esistono per scegliere sei bottiglie di vino di tre qualità diverse?

7.2 “...ma è possibile che mi sieda più di una volta nello stesso banco?”

7.2.1 Principio di inclusione esclusione

Sia S un insieme di n elementi e $p_1, p_2, \dots, p_m$ proprietà che possono avere gli elementi di S . Definiamo A_1 il sottoinsieme di S i cui elementi hanno la proprietà p_1 , $A_2 = \{x \in S : x \text{ ha la proprietà } p_2\} \dots$

Dato un $y \in S$ possiamo dire che y ha la proprietà p_i se $y \in A_i$. Definiamo ora, la seguente funzione: $\chi_i(x) : S \rightarrow \{0, 1\}$ così costruita: $\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A_i \\ 0 & \text{se } x \notin A_i \end{cases}$ Esempio: S classe di 27 alunni, p_1 lo studente fa parte di una squadra di pallacanestro; p_2 lo studente fa parte di una squadra di pallavolo; p_3 lo studente pratica atletica leggera. $|A_1| = 10$, $|A_2| = 12$, $|A_3| = 5$, $|A_1 \cap A_2| = 4$, $|A_1 \cap A_3| = 3$, $|A_2 \cap A_3| = 2$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$. Si vuole calcolare quanti studenti non praticano nessuno sport o praticano sport diversi da pallacanestro, pallavolo e atletica ($|P|$).

Per risolvere il problema utilizziamo la figura 7.1 la soluzione si può scrivere: $|S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$

Sia $x \in P$ allora $\chi_P(x) = 1$ mentre se $y \notin P$ $\chi_P(y) = 0$.

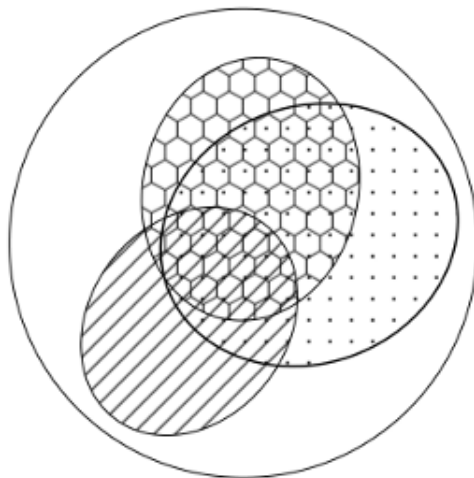


Figura 7.1: Classe cerchio, p_1 insieme puntinato, p_2 insieme tratteggiato, p_3 insieme nido d'ape

Teorema 22 (di inclusione esclusione). Il numero di elementi di S che non ha alcuna delle proprietà $p_1, \dots, p_m$ è

$$\begin{aligned}
 |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| &= |S| \\
 &\quad - \sum_{j_1} |A_{j_1}| \\
 &\quad + \sum_{j_1, j_2} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| \\
 &\quad \dots \\
 &\quad (-1)^k \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}| \\
 &\quad \dots \\
 &\quad (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

dove gli indici della generica somma $\sum_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ sono tutti i sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$ di cardinalità k .

Dimostrazione. Facciamo vedere, utilizzando la funzione caratteristica, che ogni elemento di S che non ha alcuna delle proprietà p_i contribuisce 1 al valore della somma a destra nell'equazione (7.4), mentre un elemento che ha $m > 0$ delle proprietà contribuisce 0 al valore di tale somma. Pertanto, il valore di tale somma è esattamente pari al numero di elementi che non hanno nessuna delle proprietà.

Sia ora x un elemento che non ha alcuna delle proprietà. Si ha che $x \in S$ ma $x \notin A_i$ per $i = 1, \dots, n$, pertanto il contributo di x alla somma in questione è $1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m 0 = 1$.

Supponiamo ora che y sia un elemento che ha esattamente $m \geq 1$ delle proprietà. Il contributo di y a $|S|$ è 1. Il contributo di y a $\sum_{j_1} |A_{j_1}| = m = \binom{m}{1}$, perché y possiede esattamente m proprietà, e pertanto è in esattamente m degli insiemi $A_1, \dots, A_n$.

Il contributo di y a $\sum_{j_1, j_2} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| = \binom{m}{2}$, perché ci sono $\binom{m}{2}$ modi di scegliere 2 proprietà possedute da y , ossia due insiemi A_{j_1} e A_{j_2} ai quali y appartiene.

Analogamente il contributo di y a $\sum_{j_1, j_2, j_3} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}| = \binom{m}{3}$. Proseguendo in questo modo, il contributo netto di y alla somma in (7.4) è

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m \binom{m}{n}$$

che, essendo $m \leq n$, è uguale a

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1 - 1)^m = 0$$

Quindi il contributo di y alla somma (7.4) è 0, e il teorema è dimostrato. $\square$

Si noti che, nel descrivere il teorema, si è usata una forma “negata”, chiedendoci quanti sono gli elementi che non possiedono alcuna delle proprietà. Siccome l’insieme degli elementi che possiedono almeno una delle proprietà è chiaramente il complementare del nostro, possiamo facilmente esprimere il teorema anche in una versione “affermata”:

Teorema 23 (di inclusione esclusione “affermativo”). Il numero di elementi di S che possiede almeno una delle proprietà $p_1, \dots, p_m$ è

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| &= \sum_{j_1} |A_{j_1}| \\ &\quad - \sum_{j_1, j_2} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| \\ &\quad \dots \\ &\quad (-1)^{k+1} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}| \\ &\quad \dots \\ &\quad (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned} \tag{7.5}$$

Analizziamo ora il nostro problema “è possibile che uno studente della classe si segga più di una volta nello stesso banco?”.

Sia $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l’insieme degli alunni della classe e siano $b_1, b_2, \dots, b_n$ i banchi. Chiamiamo concorrenza se ad esempio a_1 si siede in b_1 .

Sia ora A_1 l’insieme degli a_i per cui si è verificata almeno una concorrenza, A_2 l’insieme degli a_i per cui si sono verificate almeno due concorrenze, $\dots$

Noi vogliamo calcolare $|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n|$.

$|A_1| = (n-1)! \binom{n}{1} = n!$ infatti scelta una corrispondenza gli altri alunni possono permutarsi in $(n-1)!$ modi;

$$|A_2| = (n-2)! \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!} \dots |A_n| = (n-n)! \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!}$$

Utilizziamo ora il teorema di inclusione esclusione:

$$|\{\text{almeno una corrispondenza}\}| = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n!}{n!}.$$

Sviluppando i conti, nel caso 27 alunni, $\sum_{k=1}^{27} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \simeq 0.632$, quindi la teoria ci dice che la probabilità che uno studente si segga sullo stesso banco è del 63%.

7.3 Con Python

```
[1]: from sympy import *
      init_printing()
```

7.3.1 Calcolo combinatorio con sympy

Il fattoriale

```
[2]: n = symbols('n')
      factorial(n)
```

```
[2]: n!
```

```
[3]: n = 1200
      factorial(n)
```

```
[3]: 63507890863456767124026223135865363993920361927048401849732641593094118304334
66483851848927976120285811044265619896142388833778595837405439587509000817939
46021217290487555275062223886204383980125566150619409099041150151644831863402
82667999681601237310950712039020066375755766076440811303940538840103890741951
91756419056127539687320412293708374609864041458885011610722567552041258441535
91551034956552085340546581491462037397580273260033548664567310975610866208899
03717246818807490131678158299401901235057514328881677204150054888001843870188
61675669446837967703322863934997421980069176023667480877245914784976131977223
33492852581853548814627067590164168445080265934683785449522543023040683256339
05800617846092173316334920423976973219453332902616477256306327233355305287468
38074590920841598051357715924387658264887514483845403461880283963418499430840
09678562363661075632731857027792958610811005805698902918394030806921525625497
50464518941296615589072961901445867101610266912853288908304184351248084449986
72783771416472488693471340384092839407158164855903717555227905476526819133656
29999188278538429846948559229991629076795619310977877713246378934568230825241
79018246504955405803121771121360752264414781039718455098118457351815525441962
55366391739482490793094241173299750870927977665834587156860066617462486456622
```



```
['e', 'a', 'p']
['a', 'e', 'p']
['p', 'a', 'e']
['e', 'p', 'a']
```

Cambia posti in classe

```
[8]: import random
```

```
[9]: def mescola(cg,nm):
    min = len(cg)
    h = min-1
    for k in range(0,min-1):
        rNum = random.randint(0,h)
        appN = nm[h]
        appC = cg[h]
        nm[h] = nm[rNum]
        cg[h] = cg[rNum]
        nm[rNum] = appN
        cg[rNum] = appC
        h -=1
    return cg,nm
```

```
[10]: cognomi = ['Rossi','Gialli','Blu','Verdi']
    nomi = ['Primo','Secondo','Terzo','Ultimo']
    c, n = mescola(cognomi, nomi)
    for k in range(len(c)) :
        print(c[k], ' ',n[k])
```

```
Blu   Terzo
Rossi  Primo
Verdi  Ultimo
Gialli Secondo
```

Capitolo 8

Goniometria

8.1 Angoli e loro misura

Definizione di angolo

Definizione 37 (Angolo piano convesso). Siano π' e π'' due semipiani aventi per origini rispettivamente le rette r' ed r'' , se $r' \cap r'' = O$, si definisce angolo convesso l'insieme $\pi' \cap \pi''$. Il punto O si dice vertice dell'angolo, mentre le semirette OA ed OB rispettivamente $r' \cap \pi''$ e $r'' \cap \pi'$ si definiscono lati dell'angolo

Si definisce angolo concavo l'insieme $\pi' \cup \pi''$.

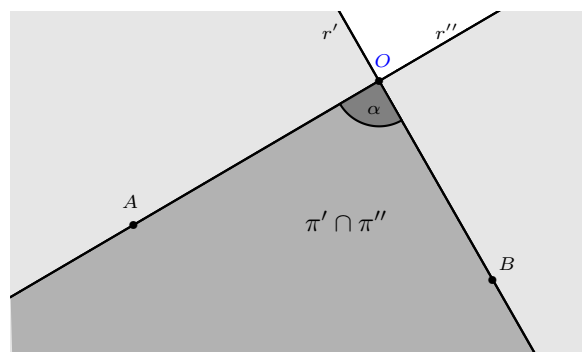


Figura 8.1: L'angolo convesso

Gli angoli orientamento e misura

Stabilire un orientamento per un arco significa: date due semirette e un punto di origine, stabilire un verso in cui vanno letti i punti nella dicitura $\widehat{AOB}$. Per far ciò si fissa una semiretta di partenza e un verso da essa, un po' come se una semiretta andasse sull'altra con una rotazione oraria o antioraria a scelta. Il verso comunemente scelto è quello antiorario di una semiretta sull'altra.

Dato questo orientamento cade l'ambiguità nella scrittura $\widehat{AOB}$, infatti, essendo A sulla retta r' e B sulla retta r'' , l'angolo a cui ci si riferisce è quello ottuso. Scrivendo invece $\widehat{BOA}$ ci si riferisce all'angolo acuto (Figura 8.2).

In definitiva stabilendo un ordinamento diviene importante l'ordine con cui vengono scritte le lettere nella notazione angolare, ovvero:

$$\beta = \widehat{AOB} \neq \widehat{BOA} = \alpha$$

Esiste dunque ora una corrispondenza biunivoca tra semirette incidenti nel punto di origine O e

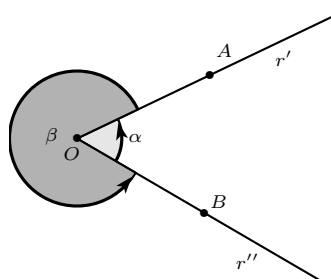


Figura 8.2: Angoli orientati

angolo corrispondente. È importante ora quantificare il concetto di angolo dopo averlo definito.

Osservazione: in GeoGebra questa convenzione è applicata in modo rigoroso Figura 8.2. Provare per credere

8.1.1 Unità di misura degli angoli

Volendo dare un formalismo matematico al concetto di angolo è necessario trovare un modo per quantificare cosa si intende per parte di piano e stabilire un ordinamento tra queste parti di piano, in modo da saper dire con certezza quando e di quanto una è maggiore dell'altra. Il modo di misurare un angolo non è unico, infatti vi sono alcune equivalenti unità di misura. Qui di seguito ne introdurremo due tra le più usate. Tali unità di misura sono introdotte inserendo l'angolo in una circonferenza il cui centro O sia l'origine dell'angolo. Se tale circonferenza ha raggio unitario prende il nome di circonferenza goniometrica.

Sistema sessadecimale

Si considerino una circonferenza di raggio R e due raggi r ed s uscenti dal suo centro O ,

Siano inoltre A e B i punti di intersezione dei raggi con la circonferenza stessa. Si scelga un orientamento antiorario del tipo $r \rightarrow s$, si definisce così internamente alla circonferenza un angolo che sottende un arco AB . Dato l'arco sotteso possiamo introdurre una prima unità di misura per l'angolo:

Definizione 38 (Grado). Si definisce grado l'ampiezza di un angolo che sottende un arco di circonferenza pari ad $\frac{1}{360}$ della lunghezza totale della circonferenza stessa. Il simbolo utilizzato per esprimere i gradi è un piccolo cerchio in alto a destra del valore numerico, ad esempio 37° è un angolo di 37 gradi.

i) Equivalenza a meno di giri:

dalla definizione si capisce che l'angolo massimo possibile, ovvero l'angolo giro, misura 360° . Questo non significa, però, che angoli con valore superiore non esistano. Semplicemente angoli superiori sono equivalenti, dal punto di vista della porzione di piano che li forma, ad un angolo compreso tra 0° e 360° , infatti aggiungere ad un angolo un angolo giro non varia l'ampiezza dell'angolo stesso.

ii) Primi e Secondi:

Il grado non è l'unità di misura fondamentale in questo sistema, infatti l'angolo di un grado ($\alpha = 1^\circ$) può essere esso stesso diviso in 60 parti uguali, ciascuna delle quali è detta un angolo di un primo di grado (indicato con $'$), o, più semplicemente angolo di un primo. L'angolo di un primo non è ancora l'unità di misura fondamentale, infatti è esso stesso suddiviso in 60 parti ciascuna delle quali è chiamata angolo di un secondo di grado (indicato con $''$), o angolo di un secondo. Un angolo più piccolo di un secondo si esprime con decimali di secondo.

Riassumendo tra gradi, primi e secondi valgono le seguenti relazioni:

Relazioni tra primi e gradi

$$\begin{aligned}\alpha = 1' &\Rightarrow \alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \\ \beta = 60' &\Rightarrow \beta = 1^\circ\end{aligned}\tag{8.1}$$

Relazioni tra primi e secondi

$$\begin{aligned}\alpha = 1'' &\Rightarrow \alpha = \left(\frac{1}{60}\right)' \\ \beta = 60'' &\Rightarrow \beta = 1'\end{aligned}\tag{8.2}$$

Relazioni tra secondi e gradi

$$\begin{aligned}\alpha = 1^\circ &\Rightarrow \alpha = \left(\frac{1}{3600}\right)'' \\ \beta = 3600'' &\Rightarrow \beta = 1^\circ\end{aligned}\tag{8.3}$$

Per convenienza futura è utile imparare a passare dalla forma in gradi, primi e secondi di un angolo ad una forma decimale dei gradi, ovvero ad una forma che esprima l'angolo con una parte intera che rappresenta i suoi gradi e una parte decimale equivalente alla parte di primi e secondi.

Esempio: Sia dato l'angolo di $32^\circ 22' 23''$ lo si trasformi in un'espressione con soli gradi. Si ha:

$$32^\circ 22' 34'' = \left(32 + 22\frac{1}{60} + 23\frac{1}{3600}\right) = 32.3730555555555^\circ\tag{8.4}$$

I radianti

Mentre i gradi sono l'unità di misura più comunemente utilizzata dalle persone nella vita di tutti i giorni, i radianti sono l'unità di misura per angoli universalmente adottata per testi e pubblicazioni scientifiche (¹). Per definire un radiante si parte sempre da una circonferenza con centro O nell'origine dell'angolo e si sfrutta ancora una volta l'arco di circonferenza sotteso dall'angolo stesso.

¹da questo punto in poi verrà usata come misura angolare il radiante

Definizione 39 (Radiante). Si dice misura in radianti di un angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo e il raggio della circonferenza stessa. Siano, dunque, α l'angolo da misurare, L la lunghezza dell'arco corrispondente e R il raggio della circonferenza vale l'importante relazione:

$$\alpha = \frac{L}{R}$$

(²)

Angolo giro il valore dell'angolo giro in radianti è presto ricavato, infatti l'arco sotteso da un angolo giro corrisponde a tutta la circonferenza e dunque ha lunghezza pari a $L = 2\pi R$ dove R è il raggio della circonferenza, dalla definizione si ha:

$$\alpha_{angolo\ giro} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

Equivalenza a meno di giri Come detto anche nelle considerazioni sui gradi, il fatto che l'angolo massimo possibile sia di 2π radianti non implica che non abbia senso parlare di angoli superiori a 2π . Angoli superiori a 2π radianti sono equivalenti ad angoli tra 0 e 2π radianti dal punto di vista della porzione di piano occupata.

Passaggio da un'unità di misura all'altra È conveniente dare un metodo di passaggio da un sistema di unità di misura ad un altro. Tale metodo consiste in una semplice proporzione che si basa sul fatto che è noto il valore dell'angolo giro sia in gradi che in radianti. La proporzione è la seguente:

$$\alpha_{rad} : 2\pi = \alpha_{gradi} : 360^\circ$$

L'angolo α_{gradi} è espresso in gradi nella loro forma decimale 8.4

8.2 Funzioni goniometriche

8.2.1 Definizione di funzione, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche

Prima di descrivere le funzioni fondamentali che variano a seconda del variare di un dato valore angolare è opportuno ricordare che cos'è esattamente una funzione:

Definizione 40 (Funzione). una funzione è una legge che fa corrispondere gli elementi di due insiemi, $\mathbb{D}$ e $\mathbb{B}$, in modo che ad un elemento di $\mathbb{A}$ corrisponda uno e un solo elemento di $\mathbb{D}$. Tale legge si scrive:

$$f(x) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B} \quad x \in \mathbb{A}$$

Nelle funzioni spiegate qui di seguito l'insieme $\mathbb{D}$ sarà quello dei possibili valori di un angolo mentre l'insieme $\mathbb{B}$ è un sottoinsieme, non necessariamente proprio, di $\mathbb{R}$.

Per convenienza futura introduciamo ora due proprietà notevoli per le funzioni. Tali proprietà, per come sono definite, non possono verificarsi contemporaneamente; inoltre è possibile, anzi, generalmente è la norma, che una funzione non verifichi nessuna delle due proprietà sotto elencate.

²Si noti che, per come è stato definito, il radiante è il rapporto tra due lunghezze e quindi è una quantità adimensionale, cioè, nel SI (sistema internazionale) utilizzato in fisica, non ha alcuna dimensione.

Definizione 41 (Funzione pari). Una funzione si dice pari se non varia al variare del segno del proprio argomento x . Ovvero se vale la seguente relazione:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

dove con $\mathbb{D}$ abbiamo indicato il dominio della funzione. Esempio: tutte le potenze pari di x sono funzioni pari, infatti:

$$f(x) = x^{2k} \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k} = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Definizione 42 (Funzione dispari). Una funzione si dice dispari se vale la seguente relazione:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

dove con $\mathbb{D}$ abbiamo indicato il dominio della funzione. Esempio: tutte le potenze dispari di x sono funzioni dispari, infatti:

$$f(x) = x^{2k+1} \Rightarrow f(-x) = (-x)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} x^{2k+1} = -x^{2k+1} = -f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Definizione 43 (Funzione periodica). Una funzione $f(x)$ si dice periodica se $\exists T \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{D} \quad (8.5)$$

Il più piccolo valore di T che verifica l'equazione 8.5 si definisce periodo.

8.2.2 Funzioni goniometriche fondamentali: $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$

In questa sezione introdurremo le due funzioni da cui sono normalmente derivate tutte le altre funzioni goniometriche. Tali funzioni goniometriche fondamentali sono chiamate $\sin(\cdot)$ letto seno e $\cos(\cdot)$ letto coseno.

Premessa: sia r una generica retta orientata passante per l'origine O del sistema di riferimento xOy , definiamo su r un sistema di coordinate di origine O . Detto P un generico punto della retta r , essendo P nel riferimento cartesiano xOy avrà coordinate $P = (x, y)$, ma dato che P appartiene alla retta r può essere individuata la sua posizione con le coordinate introdotte su r : $P = s$.

Analizziamo ora il rapporto $\frac{x}{s}$

$$x > 0 \wedge y > 0 \quad s > 0 \quad \frac{x}{s} > 0$$

$$x < 0 \wedge y < 0 \quad s < 0 \quad \frac{x}{s} > 0$$

$$x < 0 \wedge y > 0 \quad s > 0 \quad \frac{x}{s} < 0$$

$$x > 0 \wedge y < 0 \quad s < 0 \quad \frac{x}{s} < 0$$

Allo stesso modo si dimostra che $\frac{y}{s}$ (rapporto di proiezione con segno sull'asse y) si mantiene costante al variare di P su $r - \{O\}$

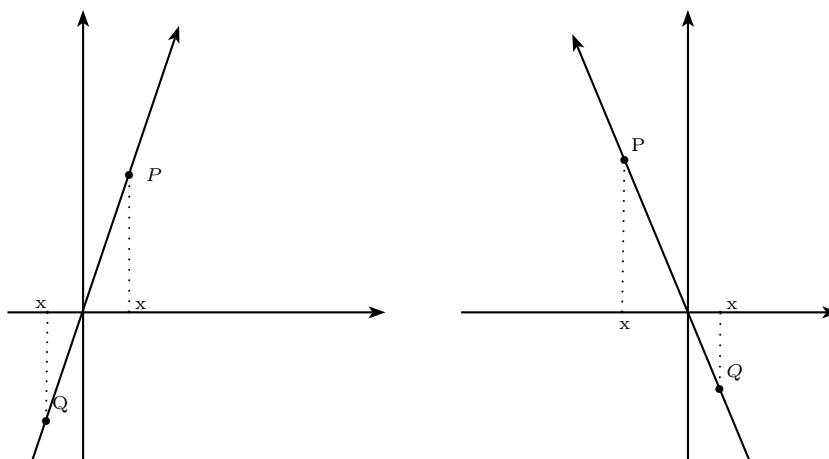


Figura 8.3: Il rapporto di proiezione con segno

Le funzioni $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$

La definizione di queste due funzioni è data a partire da una circonferenza $\mathcal{C}$ il cui centro O sia anche l'origine di un sistema di assi cartesiani xOy . Sia dato un angolo α con origine in O di cui un lato è coincidente con l'asse delle ascisse (x) e l'altro interseca la circonferenza nel punto P vedi Figura 8.4

Definizione 44 (Seno dell'angolo orientato). il seno dell'angolo α , indicato con $\sin(\alpha)$ è il rapporto di proiezione di P sull'asse y .

Definizione 45 (Coseno dell'angolo orientato). il coseno dell'angolo α , indicato con $\cos(\alpha)$ è il rapporto di proiezione di P sull'asse x .

In particolare se $\mathcal{C}$ ha raggio unitario $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ sono rispettivamente ordinata ed ascissa di P .

Proprietà di $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$

Per ogni valore di α si ha:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{s}\right)^2 + \left(\frac{y}{s}\right)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= s^2 \end{aligned}$$

Il fatto che le funzioni seno e coseno siano definite senza ambiguità non deve far pensare che possano essere calcolate, a partire da α , mediante una formula che utilizzi operazioni a noi già note. Tuttavia per valori particolari di α il coseno e il seno si possono facilmente calcolare vedi Tabella 8.1

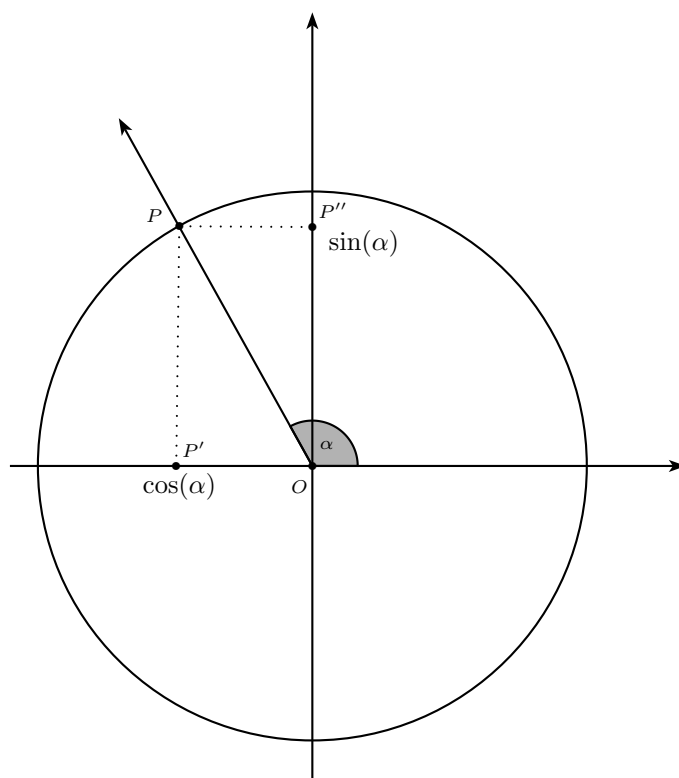


Figura 8.4: Seno e coseno di un angolo α

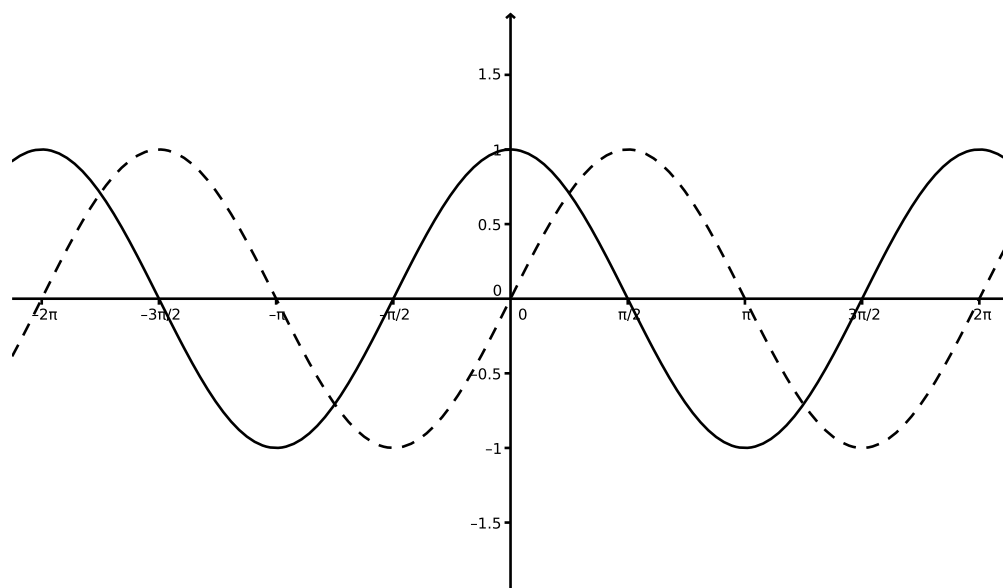


Figura 8.5: Grafico delle funzioni seno (tratteggiato) e coseno (linea continua).

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	... come si ricava
0	1	0	ovvio
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	decagono regolare, rapporto aureo
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	triangolo equilatero
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	quadrato
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	triangolo equilatero
$\frac{\pi}{2}$	0	1	ovvio

Tabella 8.1: Valori di seno e coseno per angoli particolari

Le funzioni seno e coseno sono periodiche, Il periodo vale un angolo giro, ovvero: $T = 2\pi$ Valgono, dunque, le relazioni:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$ sono funzioni limitate, possono infatti assumere valori nell'intervallo reale $[-1, 1]$

$\sin(\cdot)$ è una funzione dispari, ovvero, qualunque sia il suo argomento, vale la relazione:

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Infatti come si può vedere passando da un angolo α ad un angolo $-\alpha$ l'ordinata del punto P sulla circonferenza goniometrica non cambia in modulo, ma cambia solo nel segno

$\cos(\cdot)$ è una funzione pari, ovvero, qualunque sia il suo argomento, vale la relazione:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Infatti cambiando di segno un generico angolo α passando da α a $-\alpha$ l'ascissa del punto P sulla circonferenza goniometrica non cambia nè in modulo nè in segno

Funzioni goniometriche derivate da $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$

Le funzioni seno e coseno, come detto, possono considerarsi le funzioni fondamentali della goniometria, da esse possono ricavarsi altre funzioni utili in alcune applicazioni della matematica.

Definizione 46 (Tangente). Si definisce tangente dell'angolo α il rapporto tra il seno e il coseno dell'angolo stesso.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

Definizione 47 (Cotangente). Si definisce cotangente dell'angolo α il rapporto tra il coseno e il seno dell'angolo stesso, cioè l'inverso della tangente dell'angolo:

$$\cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tg(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$$

con $k \in \mathbb{Z}$

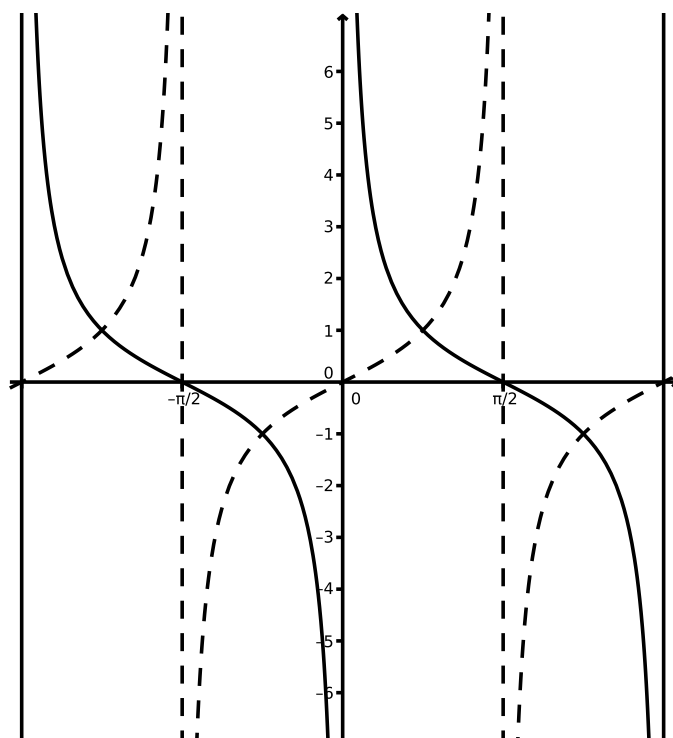


Figura 8.6: Grafico delle funzioni tangente (tratteggiato) e cotangente (linea continua).

Definizione 48 (Secante). Si definisce secante dell'angolo α l'inverso del seno dell'angolo stesso:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$$

Definizione 49 (Cosecante). Si definisce cosecante dell'angolo α l'inverso del coseno dell'angolo stesso:

$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

ricavare le proprietà delle funzioni tangente, cotangente, secante e cosecante

Funzioni goniometriche inverse

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come ad un angolo, attraverso le funzioni goniometriche, si possa associare, in alcuni casi un numero reale.

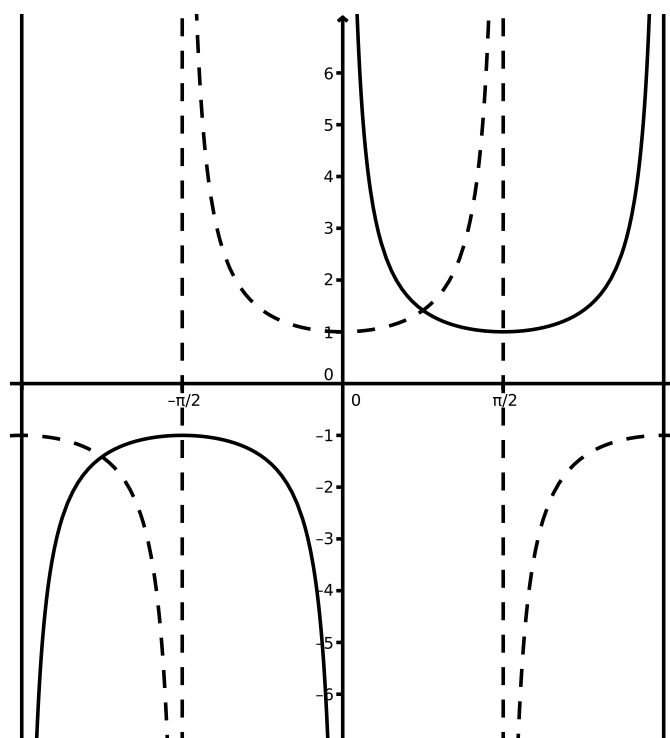


Figura 8.7: Grafico delle funzioni secante (tratteggiato) e cosecante (linea continua).

Ora ci occuperemo di calcolare in quali casi, dato un numero reale, esista un angolo corrispondente che applicato a una determinata funzione goniometrica dia il numero di partenza.

Occuparsi di questo tipo di problema significa occuparsi dell'invertibilità delle funzioni goniometriche. Prima di occuparci del problema richiamiamo il concetto di inversa di una funzione:

Definizione 50 (Funzione invertibile). Una data funzione $y = f(x)$ si dice invertibile su un insieme $\mathbb{D}$ se esiste una funzione $f^{-1}(y)$ tale che:
 $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{D}$

Per poter costruire l'inversa di una data funzione f questa deve risultare iniettiva e suriettiva.

Graficamente la funzione inversa è facile da rappresentare, infatti essa è la simmetrica della funzione diretta rispetto alla retta $y = x$.

Dimostrare la precedente affermazione

La funzione arcsin(.) La funzione seno ha come codominio l'intervallo $[-1, 1]$.

Dalla sua periodicità sappiamo però che sono infiniti gli angoli che danno un determinato valore di y (quindi non è iniettiva).

Non è dunque possibile invertire la funzione seno su tutto il suo dominio.

Se ci restringiamo la funzione ad un dominio $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ allora effettivamente vi è una corrispondenza uno a uno tra l'intervallo $[-1, 1]$ codominio e il dominio del seno $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Quando si restringe una funzione ciò che si ottiene è una nuova funzione, infatti la funzione è individuata da dominio codominio e legge.

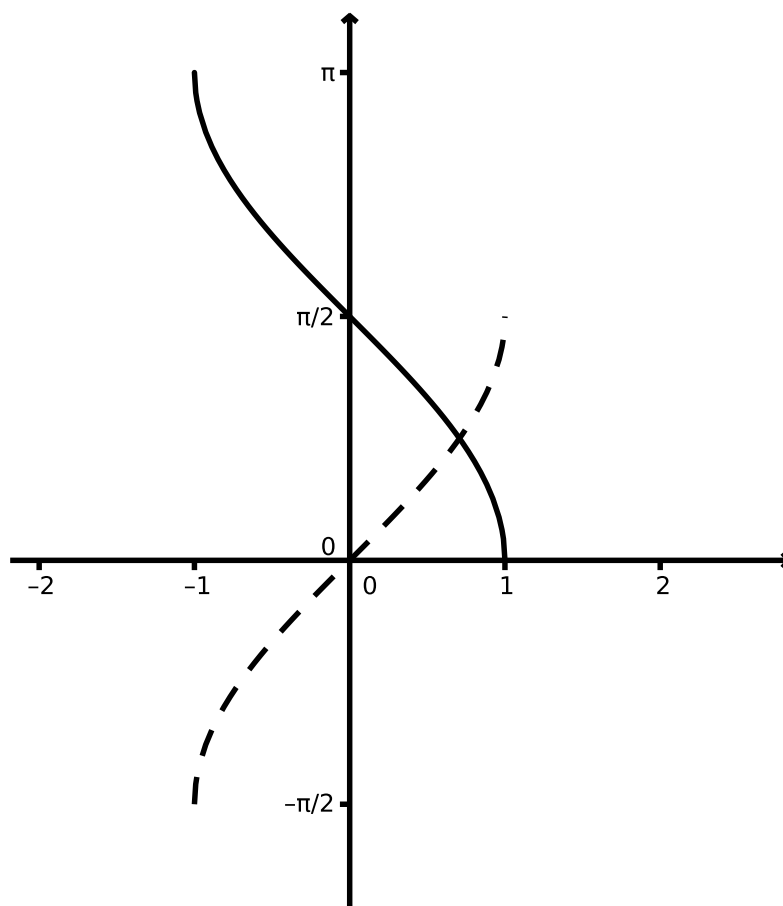


Figura 8.8: Grafico delle funzioni arcseno (tratteggiato) e arcocoseno (linea continua).

Si può dunque definire sull'intervallo sopra citato la funzione inversa del seno che viene detta $\arcsin(\cdot)$ (arcseno).

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ripercorrendo quanto fatto per la funzione arcseno costruisci la funzione arcocoseno

Funzione arcotangente Anche la funzione tangente non è invertibile su tutto il suo dominio, è periodica e quindi non iniettiva.

Il periodo comunemente scelto, per costruire la funzione inversa è l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Definizione 51 (Funzione arcotangente). La funzione inversa della funzione tangente sull'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è detta $\arctg(\cdot)$ (arcotangente) ed è così definita:

$$\arctg(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Si noti che a differenza dei casi precedenti il dominio della funzione arcotangente è tutto l'asse reale, ciò è conseguenza del fatto che la funzione tangente da cui siamo partiti non era una funzione limitata.

La funzione arcotangente è invece limitata ed i valori che essa può assumere sono ristretti all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

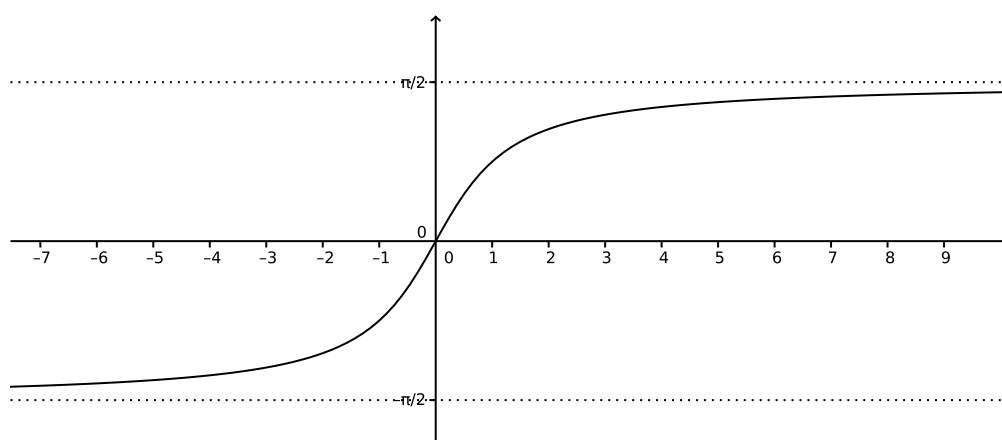


Figura 8.9: Grafico della funzione arcotangente.

Problema 11. Costruire la funzione inversa della funzione:

$$\sin(x) : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

Soluzione. Graficamente il problema si presenta come in Figura 8.10:

La soluzione si potrebbe scrivere:

$$\overline{\arcsin}(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

ma questo, in generale, comporterebbe la costruzione per ogni intervallo di nuove funzioni, pertanto fissati convenzionalmente gli intervalli, è possibile costruire le nuove funzioni applicando semplici traslazioni, nell'esempio:

$$f(x) = \pi + \arcsin(x)$$

□

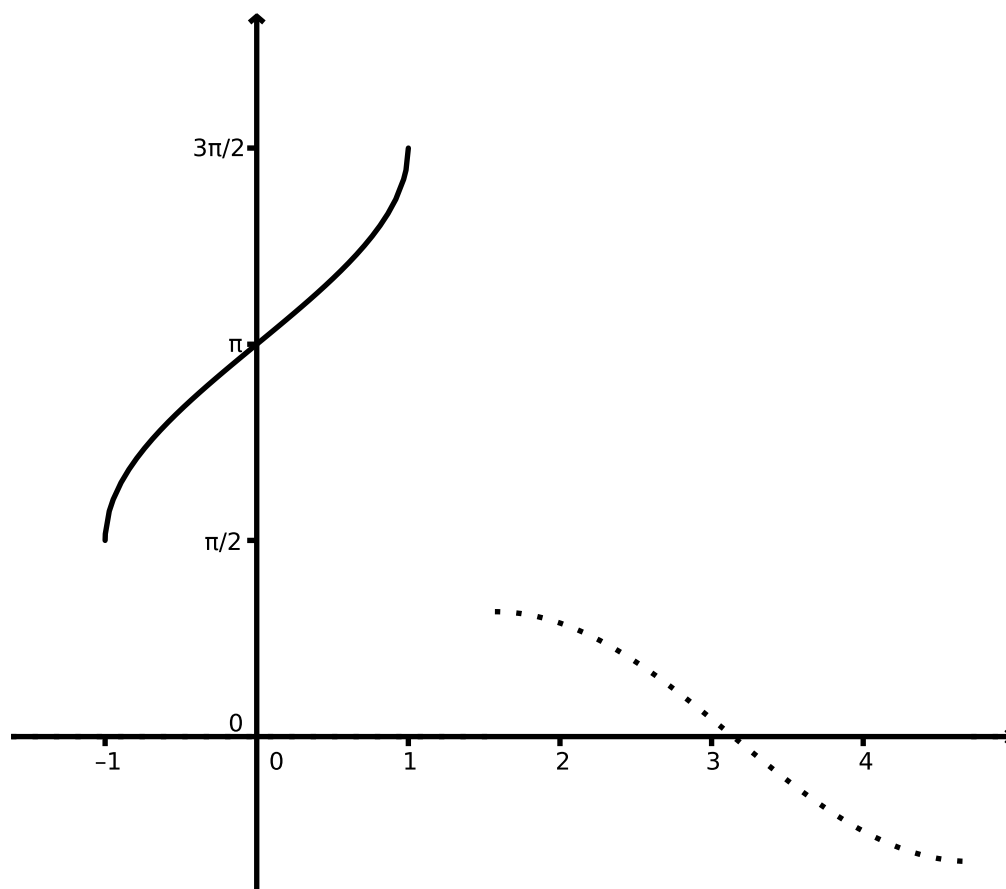


Figura 8.10: Costruzione di una particolare funzione inversa.

8.3 Archi associati

Teorema 24 (Angoli supplementari). Sia dato un angolo α e il suo supplementare $\pi - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg}(\alpha) \\ \cotg(\pi - \alpha) &= -\cotg(\alpha)\end{aligned}\tag{8.6}$$

Teorema 25 (Angoli esplementari). Sia dato un angolo α e il suo esplementare $2\pi - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg}(\alpha) \\ \cotg(2\pi - \alpha) &= -\cotg(\alpha)\end{aligned}\tag{8.7}$$

Angoli opposti Le relazioni per gli angoli opposti discendono direttamente dalle proprietà di parità delle varie funzioni goniometriche descritte.

Teorema 26 (Angoli opposti). Sia dato un angolo α e il suo opposto $-\alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cotg(-\alpha) &= -\cotg(\alpha)\end{aligned}\tag{8.8}$$

Teorema 27 (Angoli complementari). Sia dato un angolo α e il suo complementare $\frac{\pi}{2} - \alpha$ per le funzioni goniometriche ad esso associate valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin(\alpha) \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cotg(\alpha) \\ \cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan(\alpha)\end{aligned}\tag{8.9}$$

dimostrare i precedenti teoremi.

8.4 Formule di addizione, sottrazione, bisezione, duplicazione e prostaferesi

8.4.1 Formule di addizione e sottrazione

Le formule di addizione e sottrazione si occupano di trasformare funzioni goniometriche di somme o differenze di angoli in somme e prodotti di funzioni goniometriche degli angoli stessi. Valgono i seguenti teoremi:

Teorema 28 (Coseno delle differenze). Il coseno della differenza tra due angoli, siano α e β è espresso in funzione del coseno e del seno degli angoli stessi dalla formula:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo teorema si osservi la Figura 8.11 e si considerino $AM = \alpha$ e $AN = \beta$ archi qualsiasi. Sia MN la corda sottesa dall'arco $MN = \alpha - \beta$. Dal punto A si consideri un arco AB di lunghezza pari a MN , risulterà dunque, per costruzione, $\overline{AB} = \overline{MN}$. I punti finora definiti hanno coordinate:

$$\begin{aligned}A &= (1, 0) \\ B &= (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) \\ N &= (\cos(\beta), \sin(\beta)) \\ M &= (\cos(\alpha), \sin(\alpha))\end{aligned}$$

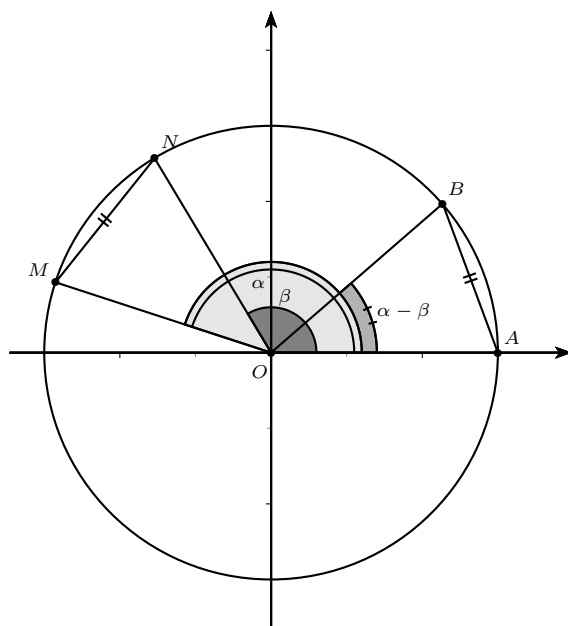


Figura 8.11: coseno della differenza

Ricordando che la distanza fra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, nel piano cartesiano, è data da:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e che essendo la circonferenza data goniometrica (raggio unitario) si ha:

$$AB = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta))^2}$$

$$MN = \sqrt{(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2}$$

Dato che, per costruzione, le corde sono uguali: $\sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta))^2} = \sqrt{(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2}$ Elevando ambo i membri al quadrato e svolgendo i conti si ottiene la tesi. $\square$

Teorema 29 (Coseno delle somma).

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Dimostrazione. Basta scrivere $\cos(\alpha + \beta)$ come $\cos(\alpha - (-\beta))$ applicare il teorema precedente e le proprietà degli angoli opposti. $\square$

Teorema 30 (Seno delle somma).

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

Dimostrazione. Basta scrivere $\sin(\alpha + \beta)$ come $\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$ o meglio $\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$ applicare i teoremi precedente e le proprietà degli angoli complementari. $\square$

Teorema 31 (Seno delle differenze).

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

Dimostrazione. Basta scrivere $\sin(\alpha - \beta)$ come $\sin(\alpha + (-\beta))$ applicare il teorema precedente e le proprietà degli angoli opposti. $\square$

sviluppare tutti i calcoli delle dimostrazioni dei teoremi di somma e sottrazione

ricavare le formule di somma e sottrazione per tangente e cotangente

Teorema 32 (Seno del doppio dell'angolo). $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Teorema 33 (Coseno del doppio dell'angolo). $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

dimostrare utilizzando i teoremi di somma

ricavare e dimostrare le formule del doppio angolo per tangente e cotangente

Teorema 34 (Formula parametrica per il coseno e il seno). Il coseno e il seno di un angolo α sono esprimibili in termini di $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ grazie alla formula:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin(\alpha) &= \frac{2t}{1 + t^2}\end{aligned}$$

dimostrare il teorema

Teorema 35 (Somma e differenza di seni). La somma o la differenza di seni si possono esprimere, grazie alle formule di prostaferesi ⁽³⁾ come:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Dimostrazione. Cerchiamo di utilizzare i teoremi precedentemente dimostrati, in particolari cerchiamo di scrivere α e β come somme e differenze di due nuovi angoli:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$

³prostaferesi : dal greco πρόσθ(εσις) "aggiunta" e ἀφάρσεις "sottrazione"

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

sostituiamo in $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, utilizzando ora le formule di somma e sottrazione si giunge alla tesi. $\square$

sviluppare tutti i calcoli

ricavare e dimostrare le formule di somma e differenza di coseni

8.5 Equazioni goniometriche

Definizione 52 (Equazione goniometrica). Un'equazione si dice goniometrica quando tra le sue incognite compaiono angoli e funzioni goniometriche ad essi associate

Per chiarire le idee è opportuno mostrare alcuni esempi di ciò che intendiamo:

$$\begin{aligned} 3 \sin(x) &= 1 \\ \operatorname{tg}(2x) + 3 \operatorname{tg}(x) + 1 &= 0 \\ 2 \cos^2(x) - \sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ovviamente le equazioni goniometriche possono assumere le forme più svariate e il loro range di soluzioni può andare da nessuna a infinite.

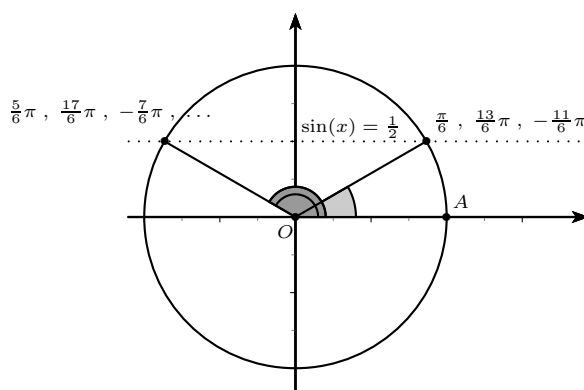
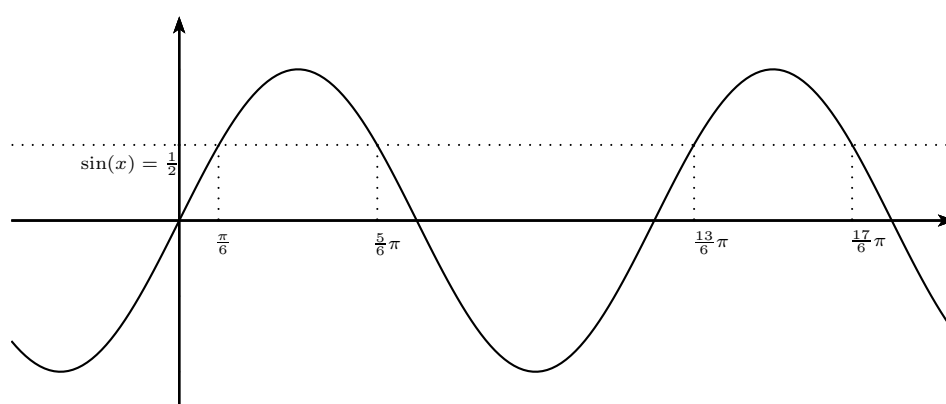
8.5.1 Equazioni elementari

Le equazioni goniometriche elementari sono equazioni in cui appare una sola funzione goniometrica, non compare il suo argomento come incognita libera ed è richiesta l'uguaglianza ad una costante. Esempi sono:

$$\begin{aligned} 3 \sin(x) &= 1 \\ \operatorname{tg}(x) &= \sqrt{3} \\ \cos(x) &= -1 \end{aligned}$$

Equazione in $\sin(\cdot)$

Si noti che per la periodicità delle funzioni goniometriche, la generica equazione elementare ammette infinite soluzioni che si ripetono periodicamente, in Figura 8.12 la soluzione utilizzando la circonferenza goniometrica $\sin(x) = \frac{1}{2}$ in Figura 8.13 le soluzioni evidenziate con l'uso della funzione seno.


 Figura 8.12: Soluzione grafica (I) di $\sin(x) = \frac{1}{2}$

 Figura 8.13: Soluzione grafica (II) di $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Equazione in $\cos(\cdot)$

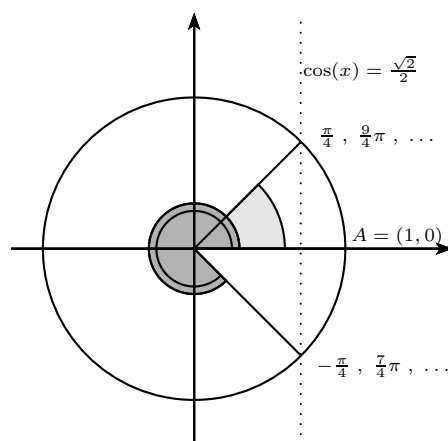
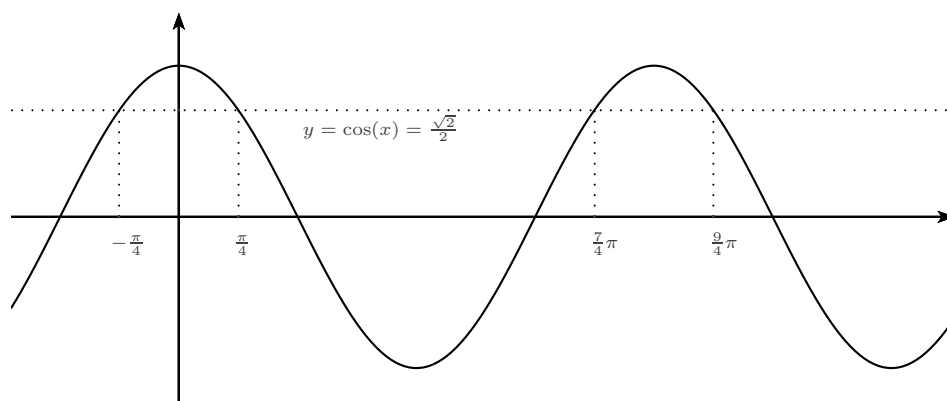
Si noti che per la periodicità delle funzioni goniometriche, la generica equazione elementare ammette infinite soluzioni che si ripetono periodicamente, in Figura 8.14 la soluzione utilizzando la circonferenza goniometrica $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in Figura 8.15 le soluzioni evidenziate con l'uso della funzione coseno.

Equazione in $\text{tg}(\cdot)$

Si noti che per la periodicità delle funzioni goniometriche, la generica equazione elementare ammette infinite soluzioni che si ripetono periodicamente, in Figura 8.16 la soluzione utilizzando la circonferenza goniometrica $\text{tg}(x) = \sqrt{3}$ in Figura 8.17 le soluzioni evidenziate con l'uso della funzione tangente.

8.5.2 Equazioni generiche

Dopo aver ben assimilato i metodi di risoluzione delle equazioni elementari, per risolvere le equazioni generiche è sufficiente, attraverso l'uso delle formule studiate nelle sezioni precedenti, ricondurre l'equazione a uno o più equazioni elementari.


 Figura 8.14: Soluzione grafica (I) di $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

 Figura 8.15: Soluzione grafica (II) di $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alcuni esempi:

Esercizio 5. $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

Soluzione. L'equazione è di tipo *lineare*, possiamo trasformare l'equazione nel seguente sistema:

$$\begin{cases} y + x = \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

dove si sfrutta la definizione delle funzioni goniometriche (rapporto di proporzionalità con segno) e l'uguaglianza fondamentale, si trasferisce quindi il problema in un piano cartesiano e si studia la posizione di una retta e della circonferenza goniometrica Figura 8.18. nell'esempio si osserva che la retta è tangente alla circonferenza, è ovvio che non basta il colpo d'occhio per risolvere l'esercizio, in quanto non sempre si ha a disposizione il computer. Il risultato va quindi ricercato con opportuni calcoli:

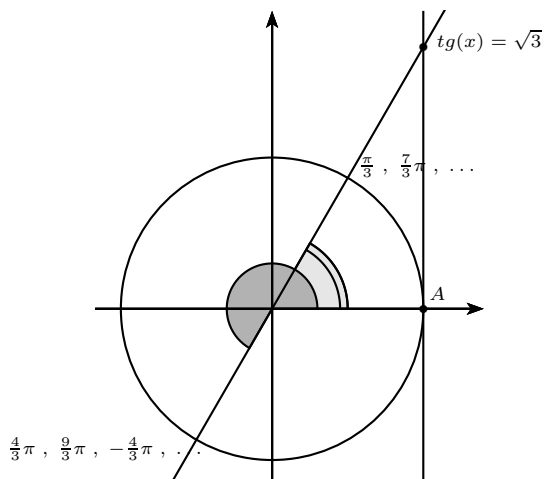


Figura 8.16: Soluzione grafica (I) di $\operatorname{tg}(x) = \sqrt{3}$

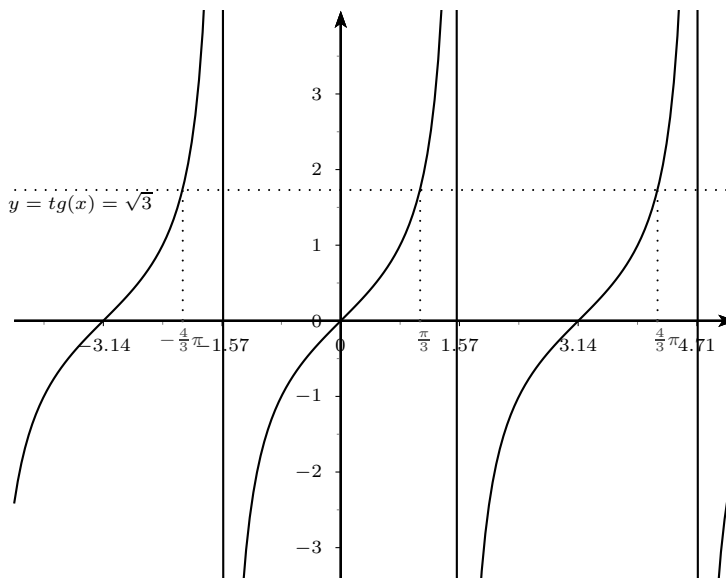


Figura 8.17: Soluzione grafica (II) di $\operatorname{tg}(x) = \sqrt{3}$

i) risoluzione del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y+x=\sqrt{2} \\ x^2+(\sqrt{2}-x)^2=1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y+x=\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}x-1)^2=0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \quad \text{Le}$$

soluzioni sono tutte quelle che soddisfano contemporaneamente le due equazioni elementari:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cioè $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

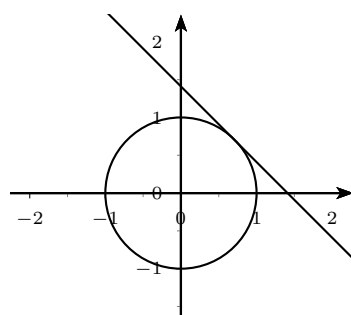


Figura 8.18: Equazione lineare

- ii) oppure, osservato che la retta di equazione $x + y = \sqrt{2}$ ha coefficiente angolare $m = -1$, noto che il coefficiente angolare di una retta è la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse, si può procedere con un ragionamento geometrico che porta alla soluzione Figura 8.19

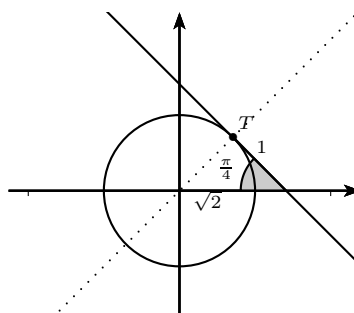


Figura 8.19: Equazione lineare soluzione "geometrica"

□

Esercizio 6. $(1 - \sqrt{3}) \sin(x) \cos(x) + (1 + \sqrt{3}) \cos^2(x) = 1$

Soluzione. Si tratta di una equazione *omogenea* si può risolvere usando due strategie:

- i) si trasforma in una equazione lineare in $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, grazie all'uso delle formule:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(x) &= \frac{\sin(2x)}{2} & \sin^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Usando le 8.10 si ha: $(1 - \sqrt{3}) \frac{\sin(2x)}{2} + (1 + \sqrt{3}) \frac{1 + \cos(2x)}{2} = 1$ che è lineare, e si risolve come visto in precedenza, notare come la forma "geometrica" semplifica notevolmente i conti: si ottengono le seguenti equazioni elementari:

$$\cos(2x) = 0 \quad \wedge \quad \sin(2x) = 1; \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

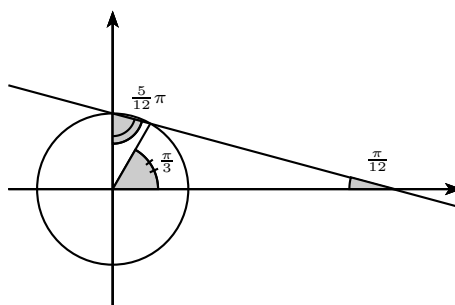


Figura 8.20: Equazione lineare soluzione "geometrica"

che conducono alle soluzioni: $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ e $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ dividendo tutto per due si ha:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

ii) oppure si scrive l'equazione nella forma: $(1 - \sqrt{3}) \sin(x) \cos(x) + (1 + \sqrt{3}) \cos^2(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$, che giustifica il nome omogenea, si divide tutto o per $\cos^2(x)$ o per $\sin^2(x)$ la scelta va fatta dopo aver verificato se $\cos(x) = 0$ o $\sin(x) = 0$ sono soluzioni ⁽⁴⁾, nel nostro caso si verifica facilmente che $\cos(x) = 0$ è soluzione e pertanto conviene risolvere dividendo per $\sin^2(x)$ ottenendo una equazione in $\cotg(x)$. Che conduce alle soluzioni.

□

Risolvere le seguenti equazioni:

- a) $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) \cos(x)} = 2\sqrt{2}$
- b) $\sin^2(2x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$
- c) $\cos(4x) + \cos(2x) = 2 \cos(x)$
- d) $\sqrt{1 + \sin(x)} + \sqrt{1 - \sin(x)} = \sqrt{3}$
- e) $\sqrt{3} \sin(x) + \cos(x) = 0$
- f) $2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} \sin(x) = 2$

8.6 Costruzione dell'equazione di un luogo geometrico

8.6.1 La versiera di Agnesi

Gaetana Agnesi(1718-1799) è una matematica di buona levatura, nota soprattutto per una sua celebre curva, la versiera, ed il poter accogliere una donna italiana tra i matematici famosi è certamente motivo di compiacimento.

...

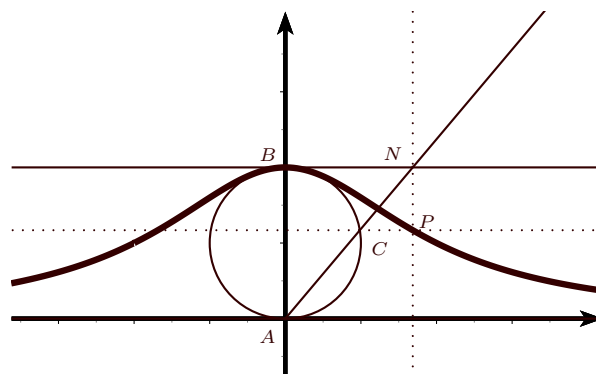
⁴ricordare le proprietà delle equazioni

Brava matematica, in contatto con i più eminenti scienziati del suo tempo, fu aggregata all'Accademia delle Scienze di Bologna, e nel 1748 scrisse un trattato di analisi algebrica e calcolo infinitesimale dal titolo, come dire, programmaticamente severo: "Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana". Benedetto XIV la voleva alla cattedra di matematica dell'Università di Bologna, ma Maria Gaetana rifiutò: in effetti, dopo la morte del padre (1752), si dedicò interamente ad opere di carità.

tratto da: Cresci 1998

Negli esercizi introduttivi del capitolo 3, abbiamo costruito la versiera utilizzando Geogebra. Proviamo ora a scrivere l'equazione di questo luogo.

Prima di tutto fissiamo un opportuno sistema di riferimento:



Indicato con R il raggio della circonferenza Γ , si ricavano le seguenti coordinate $A = (0, 0)$, $B = (0, 2R)$, $O = (0, R)$ (O è il centro della circonferenza). L'equazione analitica della circonferenza è: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$. Dovendo scrivere l'equazione del generico punto C ci accorgiamo che è necessario esplicitare l'equazione rispetto ad una delle due variabili per ricavare l'altra, ad esempio: detta x_C l'ascissa di C si ricava che $y_C = R \pm \sqrt{R^2 - x_C^2}$ dove quel $\pm$ non è proprio ... simpatico.

Proviamo a descrivere la circonferenza usando le funzioni goniometriche, scriviamo quindi un'equazione parametrica di Γ : $\begin{cases} x = R \cos \vartheta \\ y = R + R \sin \vartheta \end{cases}$ è evidente che in questo modo per ogni valore di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ abbiamo un unico punto C .

Quello che dobbiamo fare ora è trovare le coordinate di P . Per prima cosa scriviamo l'equazione della retta AC : $y = \frac{1 + \sin \vartheta}{\cos \vartheta} x$ definita per ogni ϑ esclusi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$, se $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ otteniamo il punto B , mentre nel caso $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ la retta AC diventa la retta s e quindi non esiste N . Negli altri casi, pertanto, il punto N ha coordinate: $\left(\frac{2R \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta}, 2R \right)$. In questo modo abbiamo trovato l'ascissa di P , mentre, per costruzione, l'ordinata di P è l'ordinata di C . Questo ci porta all'equazione parametrica del luogo:

$$v_{\text{Agnesi}} : \begin{cases} x = \frac{2R \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \\ y = R + R \sin \vartheta \end{cases}$$

che utilizzando GeoGebra ci permette di verificare che la curva trovata è proprio quella in precedenza costruita.

Osservando il grafico della curva possiamo pensare che la sua equazione analitica debba essere del tipo $y = f(x)$, vediamo se riusciamo a ricavare f .

Il problema è quello di eliminare ϑ : possiamo osservare che $\sin \vartheta = \frac{y-R}{R}$, e anche che $\sin^2 \vartheta = \left(\frac{y-R}{R}\right)^2$ che permette di ricavare $\cos^2 \vartheta = 1 - \left(\frac{y-R}{R}\right)^2$, l'equazione $x = \frac{2R \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta}$ si può scrivere: $x = \frac{2R \cos \vartheta}{\frac{y}{R}}$, ma anche: $xy = 2R^2 \cos \vartheta$ che elevato al quadrato: $x^2 y^2 = 2R^4 \cos^2 \vartheta$, utilizzando il valore di $\cos^2 \vartheta$ ricavato e sviluppando i calcoli otteniamo: $x^2 y^2 = 4R^4 - 4R^2 y^2 - 8R^3 y + 4R^4$, dato che il punto P non esiste quando $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$, la retta AC , in questo caso, coincide con s ed è perciò parallela ad r , possiamo escludere la soluzione $y = 0$, ricavando:

$$y = \frac{8R^3}{x^2 + 4R^2}$$

8.7 Disequazioni goniometriche

Una disequazione si dice goniometrica quando tra le sue incognite compaiono angoli e funzioni goniometriche ad essi associate. Come fatto per le equazioni trattiamo innanzitutto le

8.7.1 Disequazioni elementari

Alcuni esempi:

$$\begin{aligned} 3 \sin(x) &\leq 1 & x &\in [-\pi, \pi] \\ \operatorname{tg}(x) &\geq \sqrt{3} & x &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2 \cos(x) &\geq -1 & x &\in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Nello studio delle disequazioni, **svolgeremo sempre i calcoli in un intervallo definito**, qualora tale intervallo non fosse indicato è sotto inteso che i calcoli vengono svolti in $[-\pi, \pi]$.

Disequazione in $\sin(\cdot)$

Sia $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$, la disequazione può essere trasformata nel seguente sistema misto:

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che graficamente è rappresentato nelle Figure 8.21

Le soluzioni si scrivono, in $[-\pi, \pi]$, nei seguenti modi: $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$; oppure $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.

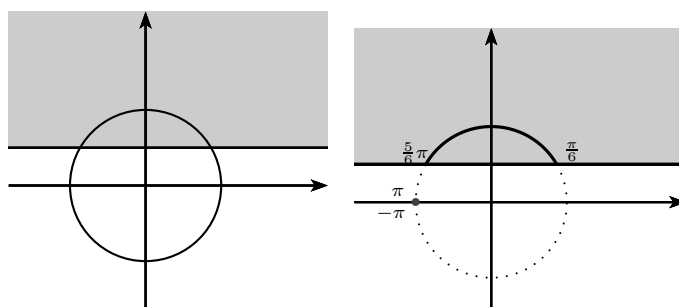


Figura 8.21: In grigio la parte di piano $y \geq \frac{1}{2}$, la soluzione è l'arco di intersezione fra il semipiano e la circonferenza goniometrica

Disequazione in $\cos(\cdot)$

Sia $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, la disequazione può essere trasformata nel seguente sistema misto:

$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che graficamente è rappresentato nella Figura 8.22

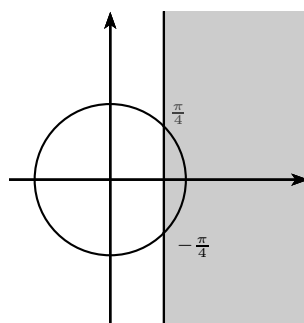


Figura 8.22: In grigio la parte di piano $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, la soluzione è l'arco di intersezione fra il semipiano e la circonferenza goniometrica

Le soluzioni si scrivono, in $[-\pi, \pi]$, nei seguenti modi: $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; oppure $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Disequazione in $\text{tg}(\cdot)$

Sia $\text{tg}(x) \geq \sqrt{3}$, conviene lavorare sulla rappresentazione di Figura 8.23

Le soluzioni si scrivono, in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, nei seguenti modi: $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$; oppure $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Traccia di soluzione di una disequazione goniometrica non elementare:

Esercizio 7. $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 - \text{tg}(x)} \leq 0$

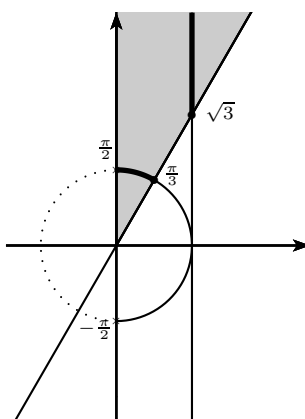


Figura 8.23: Sono evidenziate: la semiretta in cui $\text{tg}(x) \geq \sqrt{3}$ e l'arco soluzione, la parte in grigio rappresenta l'involuppo delle semirette di coefficiente angolare $m \geq \sqrt{3}$

Soluzione. Osserviamo che nella disequazione è presente la funzione $\text{tg}(\cdot)$ che ha periodo π e le funzioni $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$ con periodo 2π , è quindi opportuno, per non perdere soluzioni, lavorare nell'intervallo più ampio: $[-\pi, \pi]$.

Analizziamo il **segno** del numeratore e del denominatore:

Numeratore: $\sin(x) + \cos(x) \geq 0$ questa è una disequazione lineare ed in analogia a quanto sviluppato per le equazioni si può procedere analizzando la Figura 8.24

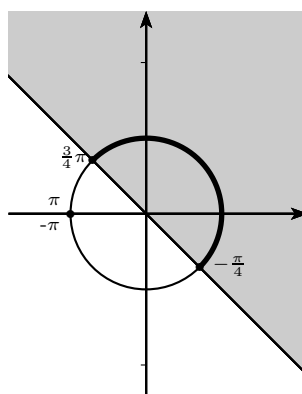


Figura 8.24: Segno di $\sin(x) + \cos(x)$ evidenziata la parte positiva

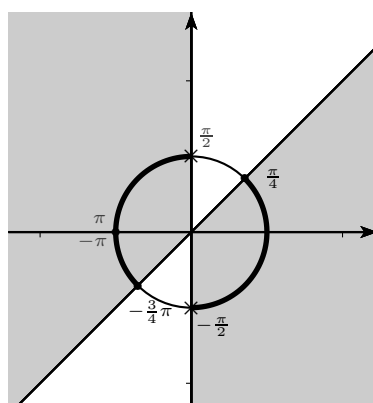
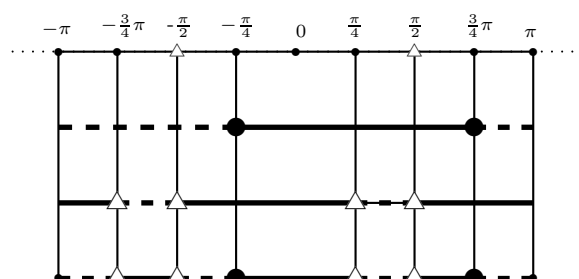
Denominatore: $1 - \text{tg}(x) > 0$ (si usa il segno $>$ in quanto denominatore). Come fatto in precedenza analizziamo la Figura 8.25, prestando attenzione nell'evidenziare le soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Procediamo ora con la sintesi utilizzando la Figura 8.26

□

Osservare che è stata utilizzata la seguente convenzione:

- linea piena segno positivo


 Figura 8.25: Segno di $1 - \operatorname{tg}(x)$ evidenziate le parti positive

 Figura 8.26: Tabellina di sintesi: segno della disequazione $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)} \leq 0$

- linea tratteggiata segno negativo
- pallina sul punto valore compreso
- $\triangle$ sul punto valore escluso

Negli esercizi e nei compiti è possibile utilizzare una qualsiasi altra convenzione, nel qual caso è opportuno inserire una legenda.

8.8 Con Python

```
[1]: from sympy import *
init_printing()
```

8.8.1 Disequazioni goniometriche con sympy

Risolvere in $[0, 2\pi]$, utilizzando prima il metodo grafico: $\sin(2x) - \cos(x) < 0$

Soluzione

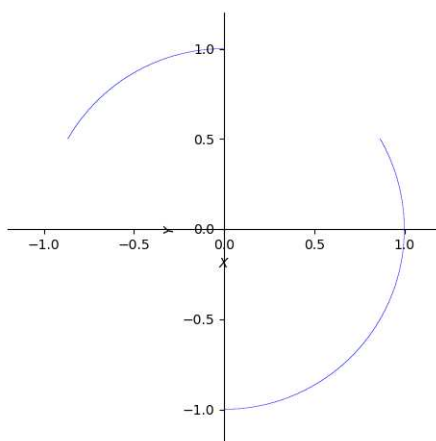
Usiamo il formulario o ci facciamo aiutare da sympy

```
[2]: x = symbols('x')
      expand_trig(sin(2*x)-cos(x))
```

```
[2]: 2 sin(x) cos(x) - cos(x)
```

Soluzione I: $p(x)q(x) < 0$ equivale a scrivere $\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} \quad (+) \cdot (-) = -$

```
[3]: X,Y = symbols('X,Y')
      # Y è sin(.)
      # X è cos(.)
      circgon = Eq(X**2+Y**2,1)
      cond1 = X >= 0
      cond2 = Y <= 1/2
      cond3 = X <= 0
      cond4 = Y >= 1/2
      sol = plot_implicit(Or(And(circgon,cond1,cond2),And(circgon,cond3,cond4)),(X,-1.2,1.2),(Y,-1.2,1.2), show = False)
      sol.aspect_ratio = (1,1)
      sol.show()
```

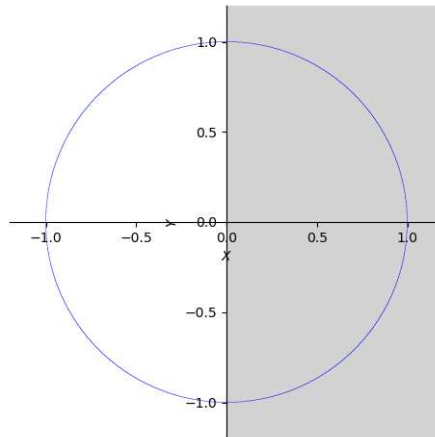


Soluzione II: studio del segno dei fattori

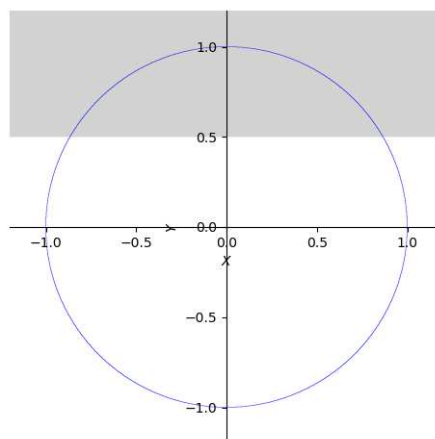
```
[4]: circgon = Eq(X**2+Y**2,1)
      cond11 = X >= 0
      circ = plot_implicit(Eq(X**2+Y**2,1),(X,-1.2,1.2),(Y,-1.2,1.2), show = False)
      sol = plot_implicit(cond11,(X,-1.2,1.2),(Y,-1.2,1.2), show = False, line_color='lightgrey')
```



```
sol.append(circ[0])
sol.aspect_ratio = (1,1)
sol.show()
```



```
[5]: circgon = Eq(X**2+Y**2,1)
cond12 = Y >= 1/2
circ = plot_implicit(Eq(X**2+Y**2,1),(X, -1.2,1.2),(Y, -1.2,1.2), show =
    ↪False)
sol = plot_implicit(cond12,(X, -1.2,1.2),(Y, -1.2,1.2), show = False,
    ↪line_color='lightgrey')
sol.append(circ[0])
sol.aspect_ratio = (1,1)
sol.show()
```



Facendo il prodotto dei segni ottengo la soluzione I

Poi, solo alla fine, controllo se ho fatto giusto

```
[6]: solve_univariate_inequality(sin(2*x)-cos(x) < 0, x, relational=False)
```

```
[6]:  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 
```

Esercizi

Risolvere, utilizzando l'esempio, le seguenti disequazioni: $\cos(2x) + \sin(x) - 1 \leq 0$ $\sqrt{3} \sin(x) + 2 \cos^2(x) > 2$

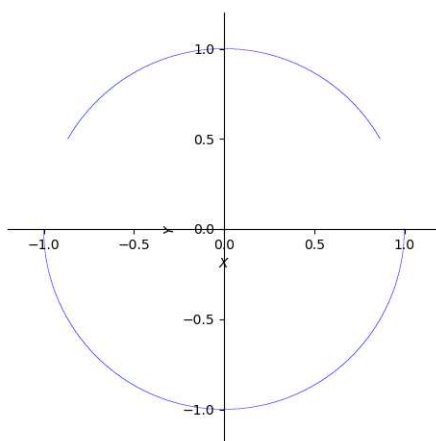
Proposta di soluzione

```
[7]: x = symbols('x')
      expand_trig(cos(2*x)+sin(x)-1)
```

```
[7]:  $\sin(x) + 2 \cos^2(x) - 2$ 
```

così però non ci piace, meglio $\sin(x) - 2(1 - \cos^2(x)) = \sin(x)(1 - 2 \sin(x))$

```
[8]: X,Y = symbols('X,Y')
      # Y è sin(.)
      # X è cos(.)
      circgon = Eq(X**2+Y**2,1)
      cond1 = Y >= 0
      cond2 = 1-2*Y <= 0
      cond3 = Y <= 0
      cond4 = 1-2*Y >= 0
      sol = plot_implicit(Or(And(circgon,cond1,cond2),And(circgon,cond3,cond4)), (X, -1.2, 1.2), (Y, -1.2, 1.2), show = False)
      sol.aspect_ratio = (1,1)
      sol.show()
```



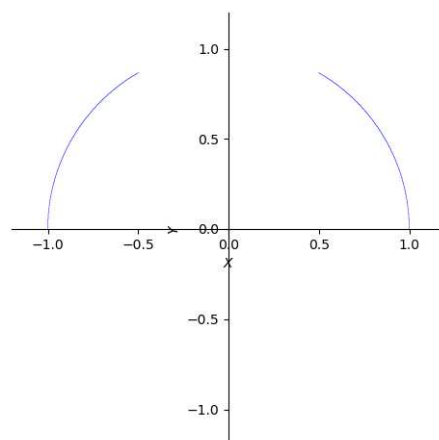
```
[9]: solve_univariate_inequality(cos(2*x)+sin(x)-1 <= 0, x, relational=False)
```

```
[9]: {0} ∪ [π/6, 5π/6] ∪ [π, 2π)
```

```
[10]: x = symbols('x')
      expand_trig(sqrt(3)*sin(x)+2*(cos(x))**2-2)
```

```
[10]: √3 sin(x) + 2 cos²(x) - 2
      meglio: √3 sin(x) - 2(1 - cos²(x)) = sin(x)(√3 - 2 sin(x))
```

```
[11]: X,Y = symbols('X,Y')
      # Y è sin(.)
      # X è cos(.)
      circgon = Eq(X**2+Y**2,1)
      cond1 = Y > 0
      cond2 = sqrt(3)-2*Y > 0
      cond3 = Y < 0
      cond4 = sqrt(3)-2*Y < 0
      sol = plot_implicit(Or(And(circgon,cond1,cond2),And(circgon,cond3,cond4)), (X, -1.2, 1.2), (Y, -1.2, 1.2), show = False)
      sol.aspect_ratio = (1,1)
      sol.show()
```



```
[12]: solve_univariate_inequality(sqrt(3)*sin(x)+2*(cos(x))**2-2 > 0, x, relational=False)
```

```
[12]: (0, π/3) ∪ (2π/3, π)
```

Capitolo 9

Una proposta di recupero

9.1 Taxi Geometria

9.1.1 Teoria I

Molti testi di storia della matematica affermano che la geometria ha iniziato a svilupparsi per risolvere problemi di equa spartizione di terreni fertili. Apparentemente, questo è accaduto inizialmente in Egitto ed in Mesopotamia. Il particolare tipo di geometria sviluppatasi è stato fortemente influenzato dal fatto che le regioni da coltivare erano pianeggianti. Ancora oggi, la gran parte della geometria che studiamo a scuola è geometria piana.

Potremmo chiederci che tipo di geometria avremmo avuto se l'ambiente originario fosse stato un ambiente urbano. Probabilmente, non sarebbe stato necessario cambiare gli oggetti elementari sui quali vengono costruiti definizioni e teoremi: punti, rette, piani. Invece è verosimile che il calcolo delle distanze non sarebbe stato effettuato come su un terreno pianeggiante, sul quale è possibile ogni spostamento, in qualsiasi direzione, perché in città non si può passare attraverso le costruzioni.

Se ci muoviamo in automobile in una città disegnata come un accampamento romano, con strade orientate nelle due direzioni cardinali, nord-sud ed est-ovest, gli unici movimenti possibili sono nelle due direzioni NS e EO. Quindi è naturale calcolare le distanze, per tutto ciò che riguarda la gestione dei consumi automobilistici o per i tempi di percorrenza di un tratto urbano, usando un approccio diverso da quello scelto alcuni millenni fa in Egitto.

Per esempio, un conducente di taxi che deve organizzare il proprio lavoro e calcolare tempi e costi troverà più realistico questo calcolo delle distanze di quello euclideo. Giocando con le parole, chiamiamo “taxidistanza” la distanza calcolata muovendosi solo parallelamente alle due direzioni fondamentali. D’ora in poi parleremo di geometria del taxi per descrivere le proprietà relative alla “taxidistanza”, e di geometria euclidea per quelle tradizionali.

Gli oggetti fondamentali (punti e rette) delle due geometrie sono gli stessi, quindi tutte le proprietà della geometria euclidea relative a questioni di appartenenza o intersezione vengono ereditate senza modifiche dalla geometria del taxi. Invece cambiano, a volte in modo sorprendente, le proprietà dipendenti dalla distanza.

Quando si studia la geometria euclidea nel piano cartesiano (ortogonale) i punti del piano sono determinati da una coppia ordinata di numeri reali. Per esempio in figura 9.1 è $P = (-2, 1)$ e $Q = (1, 3)$. È intuitivo ciò che si intende per retta PQ ; inoltre la distanza tra P e Q è determinata mediante l'applicazione del teorema di Pitagora.⁽¹⁾ Per la distanza tra P e Q (assunta come unità

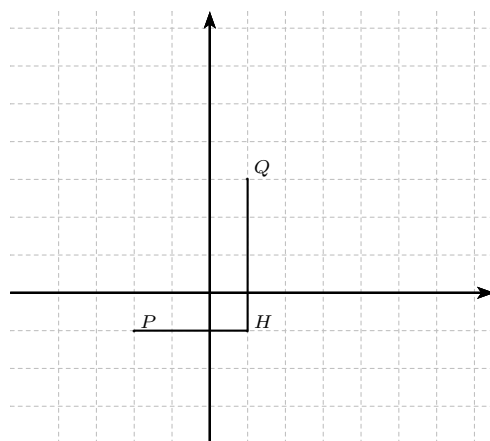


Figura 9.1: Taxi distanza

di misura il lato di un quadratino disegnato in figura 9.1) scriveremo:

$$d_E(P, Q) = 5$$

(essendo $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{QH}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 5$) e leggeremo: “la distanza euclidea tra P e Q è 5”.

La geometria del taxi presenta alcuni punti di contatto con la geometria euclidea. I punti sono i medesimi, le rette sono le stesse e gli angoli sono misurati nello stesso modo. Solo la “funzione” distanza è diversa. Nella 9.1 la distanza tra P e Q , $d_T(P, Q)$ è determinata non in linea retta ma come la intenderebbe un tassista (onesto) che vi conducesse da P a Q . Costui conterebbe quanti isolati dovrebbe percorrere orizzontalmente e quanti verticalmente per andare da P a Q (linea continua). Risulta allora

$$d_T(P, Q) = 7$$

e leggeremo “la taxidistanza da P a Q è 7”. La figura 9.2 ci avverte che non sempre i punti del piano sono espressi da coppie di numeri interi. In 9.1 sono dati $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Le coordinate del punto C sono: (b_1, a_2) appare plausibile assumere come taxidistanza:

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

¹questi semplici concetti sono approfonditi in 5.2.1

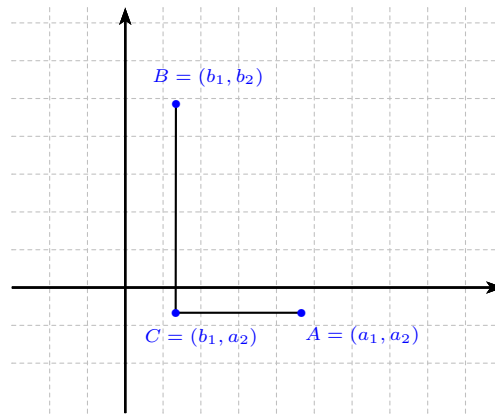


Figura 9.2: Taxi distanza (coordinate dei punti non intere)

9.1.2 esercizi

9.1.2.1) Ricerca $d_T(P_i, Q_i)$ e $d_E(P_i, Q_i)$ delle seguenti coppie di punti:

- a) $P_1 = (5, 4)$ $Q_1 = (1, 2)$;
- b) $P_2 = (-4, 3)$ $Q_2 = (3, 2)$;
- c) $P_3 = (-5, -4)$ $Q_3 = (1, 2)$;
- d) $P_4 = (3, -1)$ $Q_4 = (-2, 4)$;
- e) $P_5 = (4, -3)$ $Q_5 = (-2, -3)$;

9.1.2.2) a) Se $d_T(A, B) = d_T(C, D)$ allora $d_E(A, B) = d_E(C, D)$?

b) Se $d_E(A, B) = d_E(C, D)$ allora $d_T(A, B) = d_T(C, D)$?

c) Quali sono le condizioni affinché $d_T(A, B) = d_E(A, B)$?

9.1.2.3) Sia $A = (-2, -1)$, per ciascun punto P sotto indicato si calcoli $d_T(P, A)$.

(a) $P = (1, -1)$

(b) $P = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

(c) $P = (-2, -4)$

(d) $P = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

(e) $P = (-1, -3)$

(f) $P = (O, O)$

(g) $P = (0, 2)$

(h) $P = (-2, -2)$

9.1.2.4) a) Ricerca altri punti aventi taxidistanza 3 da A .

- b) Traccia il grafico di tutti i punti P alla distanza 3 da A cioè il grafico dell'insieme $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 3\}$
- c) Nella TaxiGeometria quale valore numerico dovrai attribuire a π ?
- 9.1.2.5) Siano dati i punti $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$; costruisci il grafico dei seguenti insiemi di punti:
- a) La taxicirconferenza di centro A e raggio 2.
- b) $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 1\}$
- c) L'insieme di tutti i punti alla taxidistanza $\frac{3}{2}$ da A .
- d) $\left\{P \in \pi : d_T(P, A) = \frac{5}{2}\right\}$
- 9.1.2.6) Dati $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$,
- a) Calcola $d_T(A, B)$.
- b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 3 \text{ e } d_T(P, B) = 5\}$.
- c) Rappresenta il grafico dell'insieme $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 0 \text{ e } d_T(P, B) = 8\}$.
- d) Traccia il grafico di $\left\{P \in \pi : d_T(P, A) = \frac{3}{2} \text{ e } d_T(P, B) = \frac{13}{2}\right\}$.
- e) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 4 \text{ e } d_T(P, B) = 4\}$.
- f) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 5 \text{ e } d_T(P, B) = 3\}$.
- g) Costruisci il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)\}$ (utilizzando in questo caso $d_T(A, B) = 8$).
- 9.1.2.7) Dati $A = (-7, -3)$ e $B = (5, 2)$
- a) Calcola $d_E(A, B)$
- b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_E(P, A) + d_E(P, B) = d_E(A, B)\}$
- 9.1.2.8) Individua sul piano cartesiano ciascuna delle coppie di punti A, B e traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)\}$
- a) $A = (-2, 3) \quad B = (1, -1)$
- b) $A = (1, -3) \quad B = (4, 0)$
- c) $A = (2, 1) \quad B = (6, 1)$
- d) $A = (1, 1) \quad B = (1, 1)$
- 9.1.2.9) Dati $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$
- a) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 5 \text{ e } d_T(P, B) = 5\}$
- b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 7 \text{ e } d_T(P, B) = 7\}$
- c) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 4 \text{ e } d_T(P, B) = 4\}$
- d) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = d_T(P, B)\}$

- 9.1.2.10) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.
- 9.1.2.11) Per ciascuna delle seguenti coppie di punti A , B traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 2d_T(P, B)\}$
- a) $A = (0, 0)$ $B = (4, 2)$;
 - b) $A = (0, 0)$ $B = (2, 4)$;
 - c) $A = (0, 0)$ $B = (3, 3)$;
 - d) $A = (-1, 1)$ $B = (4, 1)$;
- 9.1.2.12) Dopo aver disegnato nel piano i punti $A = (-3, 0)$ e $B = (1, 2)$ traccia il grafico dei punti $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 2d_T(P, B)\}$.
- 9.1.2.13) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.

9.1.3 esercizi

- 9.1.3.1) Si disegni la taxiellisse $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = 10\}$ dove $M = (-2, 1)$ e $N = (4, 1)$.
- 9.1.3.2) Alice e Bruno non hanno ancora trovato casa (Alice lavora al $L_A = (-3, -1)$ e Bruno al $L_B = (-3, 1)$). Essi hanno deciso che la somma delle distanze da percorrere per andare al lavoro sia minore o uguale a 14 Dove cercheranno casa?
- 9.1.3.3) La A.I.C. vuole costruire una fabbrica nella Città Ideale in una località dove la somma delle distanze dalla stazione $S = (-5, -3)$ e dall'aeroporto $A = (5, -1)$ sia di 16. Al fine di un controllo del rumore una ordinanza municipale vieta la costruzione di fabbriche entro 3 unità dalla biblioteca pubblica $B = (-4, 2)$. Dove A.I.C. può costruire?
- 9.1.3.4) Si disegnino i punti $A = (-3, -1)$ e $B = (2, 2)$ e si tracci la taxiiperbole $\{P \in \pi : d_T(P, A) - d_T(P, B) = 3\}$
- 9.1.3.5) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (-3, 1)$ e $B = (5, 1)$.
- 9.1.3.6) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (0, 0)$ e $B = (4, 4)$.
- 9.1.3.7) Alice e Bruno non hanno ancora trovato un appartamento. Il loro ultimo accordo consiste nel fatto che né l'uno né l'altro (per recarsi al lavoro) dovrebbe camminare 4 più dell'altro. Dove cercheranno? (Si ricordi che $L_A = (-3, -1)$ $L_B = (3, 3)$).

9.1.4 Teoria II

Distanza punto retta

Nella geometria euclidea c'è un metodo standard per determinare la distanza di un punto da una retta. Si traccia la perpendicolare r' passante per A alla retta data r ; indicato con B il punto di intersezione di r' con r si indica come “distanza del punto A dalla retta r ” la distanza tra A e B .

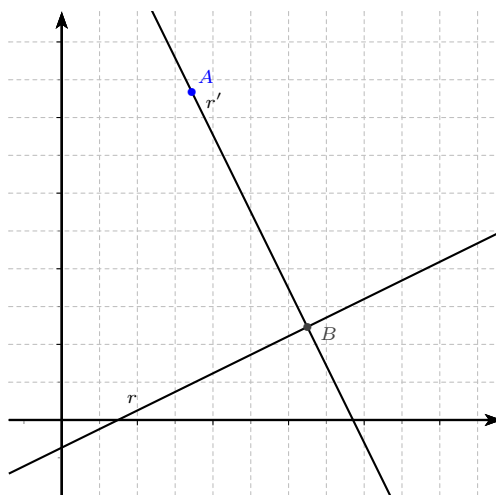


Figura 9.3: Distanza punto retta Euclidea

$$d_E(A, r) = d_E(A, B)$$

Esercizi

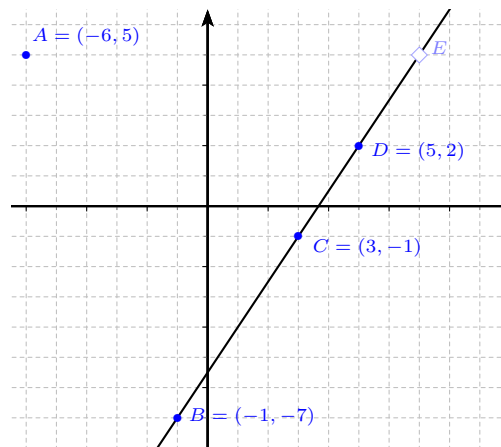


Figura 9.4: Taxi distanza punto retta

- 1) Nella figura 9.4 si consideri il punto A e la retta r .
 - a) si trovi $d_T(A, B)$;
 - b) si trovi $d_T(A, C)$;
 - c) si trovi $d_T(A, D)$;
 - d) si trovi un punto E su r che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria (E è situato sulla perpendicolare per A ?);
 - e) Si può ragionevolmente concludere che la taxidistanza da A ad r sia uguale a 13.
- 2) Sia $A = (-3, 2)$ e r la retta passante per $(-6, 8)$ e $(0, 0)$
 - a) Si trovi un punto $P \in r$ che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria.
 - b) Si calcoli $d_T(A, r)$.
- 3) Si ripeta l'esercizio precedente con $A = (-3, 2)$ ed r passante per $(-2, -1)$ e $(2, 3)$
- 4) Fin qui si sono considerate delle procedure per trovare la distanza di un punto da una retta nella taxigeometria. Ma non è stata formulata alcuna definizione per la distanza. Gli esercizi precedenti suggeriscono la seguente definizione di distanza nella taxigeometria

$$d_T(A, r) = \min_{P \in r} d_T(A, P)$$

- 5) Un altro modo operativo per trovare $d_E(A, r)$ è suggerito dalla figura 9.5
- 6) Ricava la formula della distanza $d_E(P, r)$ ⁽²⁾ utilizzando il metodo suggerito.
- 7) Costruire un metodo per calcolare $d_T(P, r)$.

² $r: y = mx + q$ $P = (x_0, y_0)$

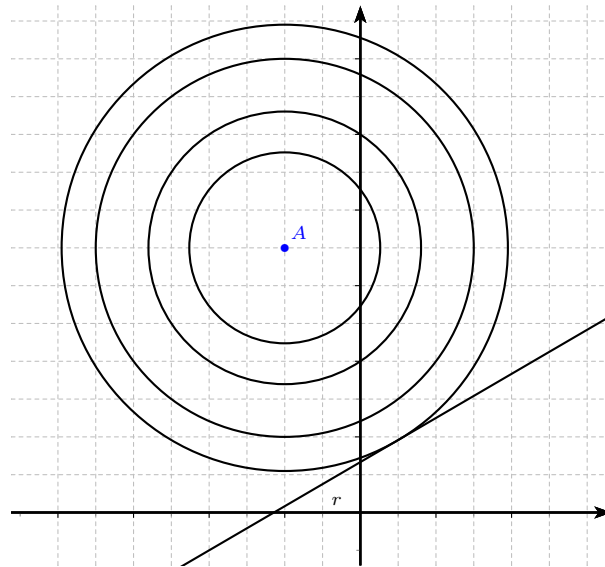


Figura 9.5: Taxi distanza punto retta: un metodo costruttivo

9.2 Con Python

```
[1]: import sympy as sy
      from sympy.plotting import plot
      sy.init_printing()
```

9.2.1 Taxi con python

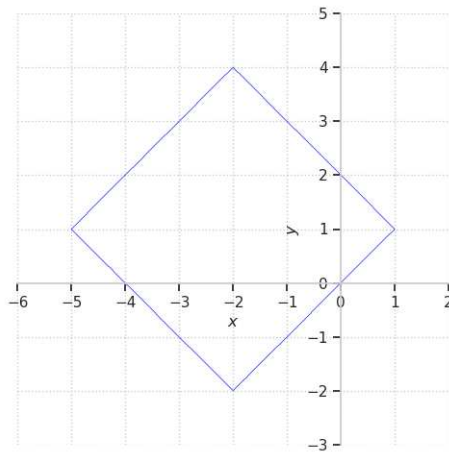
Circonferenza

Ricordiamoci che: la circonferenza è il luogo dei punti del piano la cui distanza da un fissato punto è costante.

In Taxi : $|x - x_C| + |y - y_C| = r$

```
[2]: import seaborn as sns
      sns.set()
      sns.set_style("whitegrid", {"xtick.major.size": 0.25, "xtick.minor.size": 0.
      ↪ 25, 'grid.linestyle': ':'})
```

```
[3]: Cx = -2
      Cy = 1
      r = 3
      x,y = sy.symbols('x,y')
      p = sy.plot_implicit(abs(x-Cx)+abs(y-Cy)-r,(x, -6, 2), (y, -3, 5),
      ↪ 5),show=False,size=(5,5))
      p.show()
```

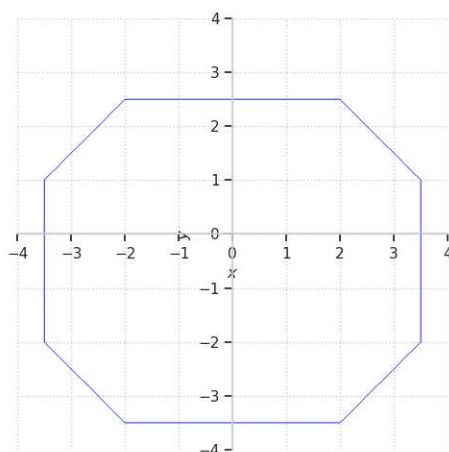


Ellisse

Ricordiamoci che: l'ellisse è il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due fissati punti è costante.

$$\text{In Taxi : } |x - x_{F_1}| + |y - y_{F_1}| + |x - x_{F_2}| + |y - y_{F_2}| = d$$

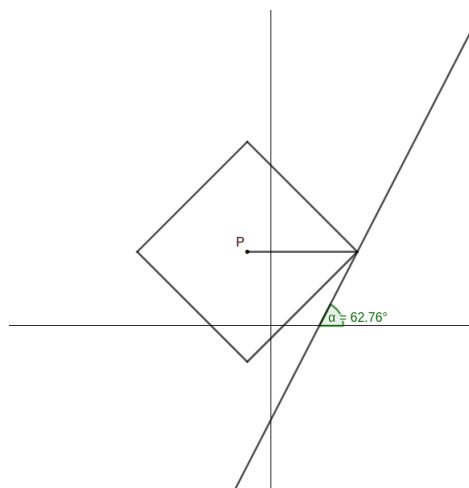
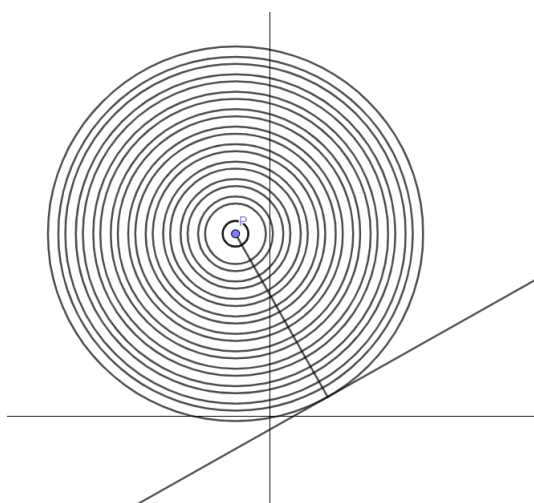
```
[4]: lato = 4
Ax = -2
Ay = 1
Bx = 2
By = -2
d = 10
x,y = sy.symbols('x,y')
p = sy.plot_implicit(abs(x-Ax)+abs(y-Ay)+abs(x-Bx)+abs(y-By)-d,(x, -lato,
↪lato), (y, -lato, lato),show=False,size=(5,5))
p.show()
```



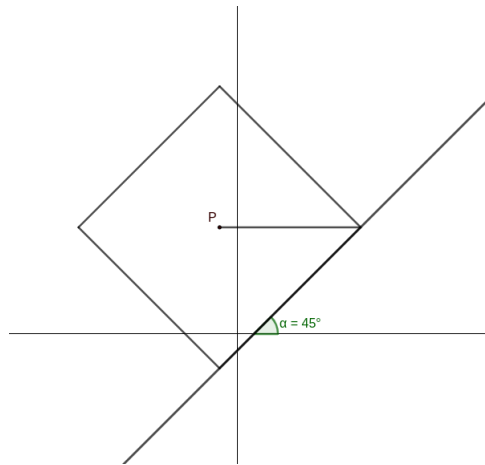
parabola

Per calcolare la distanza punto retta nella TaxiGeometria è opportuno utilizzare questo modello:

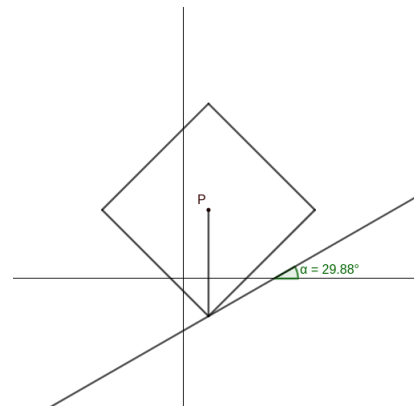
Che nella taxi ci porta a considerare tre casi:
 $|m| > 1$



$$|m| = 1$$



$$|m| < 1$$



Questo ci porta a costruire la seguente formula per la distanza punto P retta $r : y = mx + q$, con r non parallela all'asse delle ordinate:

$$d_T(P, r) = \begin{cases} \left| \frac{P_y - q}{m} - P_x \right| & \text{se } |m| > 1 \\ |mP_x + q - P_y| & \text{se } |m| \leq 1 \end{cases}$$

Se r è parallela all'asse delle ordinate $x = k$ la distanza si ricava semplicemente con $|k - P_x|$

```
[5]: ## distanza punto retta Taxi
def dTPretta(A,B,P):
    # retta
    tiporetta = ''
    m,q = sy.symbols('m,q')
    if (A[0]-B[0] != 0):
        m = (A[1]-B[1])/(A[0]-B[0])
        q = -(A[1]*B[0]+A[0]*B[1])/(A[0]-B[0])
    else:
        tiporetta = 'verticale'
        m = 0
    if abs(m)>1 and tiporetta != 'verticale':
        dTPr = abs((P[1]-q)/m-P[0])
    if abs(m)<=1 and tiporetta != 'verticale':
        dTPr = abs(m*P[0]+q-P[1])
    if tiporetta == 'verticale':
        dTPr = abs(A[0]-P[0])
    return dTPr
## equazione della retta per A e B utile per costruire la direttrice
def retta(A,B):
    # retta
    tiporetta = ''
    v = False
    m,q = sy.symbols('m,q')
    if (A[0]-B[0] != 0):
```

```

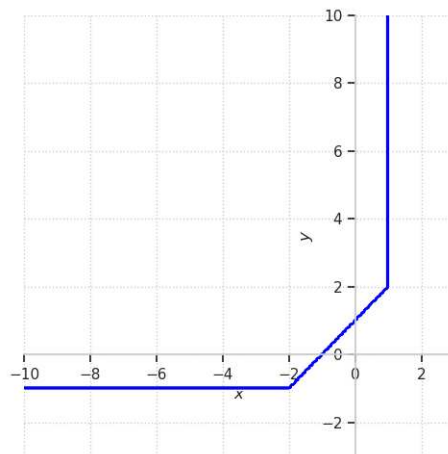
    m = (A[1]-B[1])/(A[0]-B[0])
    q = -(A[1]*B[0]+A[0]*B[1])/(A[0]-B[0])
else :
    tiporetta = 'verticale'
    m = 0
    q = 0
    v = True
return m,q,v

```

```

[6]: #A B punti della retta (direttrice)
      #F fuoco
      A = (-2,-2)
      B = (2,2)
      F = (-2,2)
      lato = 10
      x,y = sy.symbols('x,y')
      pT = sy.plot_implicit(dTPretta(A,B,(x,y))-abs(x-F[0])-abs(y-F[1]), \
                           (x, -lato, 3), (y, -3, l
      ↳ lato),show=False,size=(5,5),adaptive = False)
      pT.show()

```



```

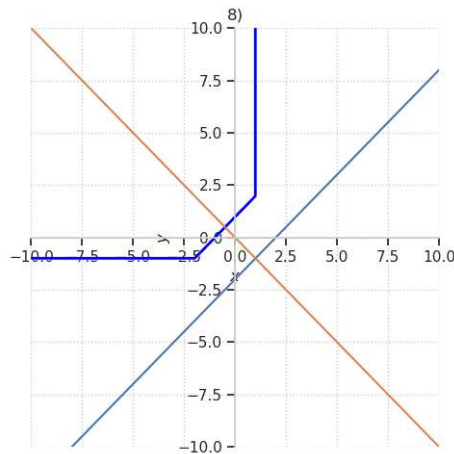
[7]: A = (-2,-2)
      B = (2,2)
      F = (-2,2)
      lato = 10
      x,y,m,q,f,a = sy.symbols('x,y,m,q,f,a')
      m,q,vert = retta(A,B)
      if vert == False :
          f = m*x+q
          a = -(1/m)*(x-F[0])+F[1]

```

```

pT = sy.plot_implicit(dTPretta(A,B,(x,y))-abs(x-F[0])-abs(y-F[1]), \
                    (x, -lato, lato), (y, -lato, \
→lato),show=False,size=(5,5),title = '8)',adaptive = False)
pDirettrice = sy.plot(f, \
                    (x, -lato, lato), (y, -lato, \
→lato),show=False,size=(5,5),title = '8)',adaptive = False)
pAsse = sy.plot(a, \
                    (x, -lato, lato), (y, -lato, \
→lato),show=False,size=(5,5),title = '8)',adaptive = False)
pT.extend(pDirettrice)
pT.extend(pAsse)
pT.show()

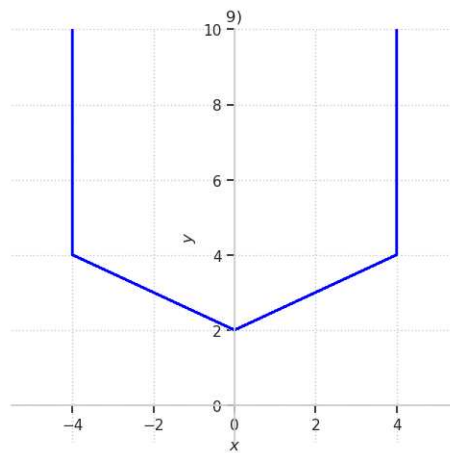
```



```

[8]: A = (0,0)
B = (2,0)
F = (0,4)
lato = 10
x,y = sy.symbols('x,y')
pT = sy.plot_implicit(dTPretta(A,B,(x,y))-abs(x-F[0])-abs(y-F[1]), \
                    (x, -5.5, 5.5), (y, -1, \
→lato),show=False,size=(5,5),title = '9)',adaptive = False)
pT.show()

```

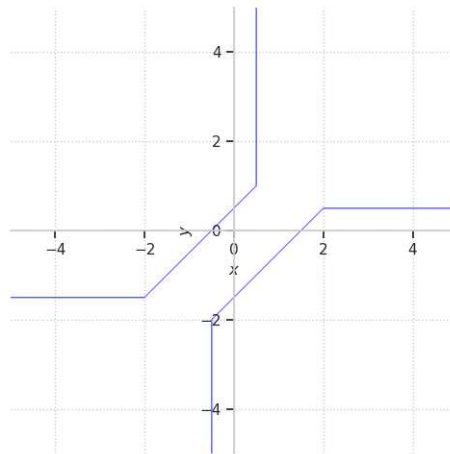



Iperbole

Ricordiamoci che: l'iperbole è il luogo dei punti del piano la cui differenza delle distanze da due punti fissati è costante.

In Taxi : $|x - x_{F_1}| + |y - y_{F_1}| - (|x - x_{F_2}| + |y - y_{F_2}|) = \pm d$

```
[9]: lato = 5
Ax = -2
Ay = 1
Bx = 2
By = -2
d = 2
x,y = sy.symbols('x,y')
p = sy.plot_implicit(abs(x-Ax)+abs(y-Ay)-abs(x-Bx)-abs(y-By)-d,(x, -lato, lato), (y, -lato, lato),show=False,size=(5,5))
p1 = sy.plot_implicit(-abs(x-Ax)-abs(y-Ay)+abs(x-Bx)+abs(y-By)-d,(x, -lato, lato), (y, -lato, lato),show=False,size=(5,5))
p.append(p1[0])
p.show()
```



Capitolo 10

Trigonometria

La trigonometria fornisce importanti strumenti per lo studio delle proprietà dei triangoli. In particolare è estremamente utile per stabilire relazioni quantitative tra i lati e gli angoli di un triangolo. Da ora in poi chiameremo A, B, C i vertici del generico triangolo, a, b, c le lunghezze dei suoi lati e α, β, γ l'ampiezza dei suoi angoli (Figura 13.1) Prima di vedere i legami tra lati e

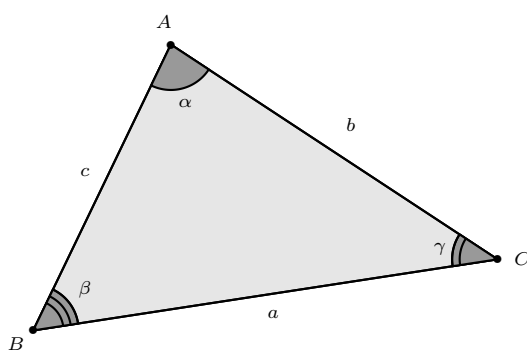


Figura 10.1: Nomi convenzionali per vertici, lati e angoli di un generico triangolo

angoli dettati dalla trigonometria è opportuno ricordare le proprietà elementari dei triangoli:

- somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto π radianti $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- in ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.
- In ogni triangolo a lato maggiore (minore) è opposto angolo maggiore (minore).

10.1 Teoremi sui triangoli rettangoli

Sia dato un triangolo rettangolo (Figura 10.2)

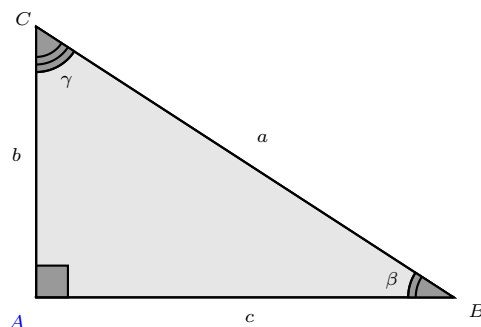


Figura 10.2: Generico triangolo rettangolo

Teorema 36 (sui triangoli rettangoli I). Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto:

$$\begin{aligned} b &= a \sin(\beta) \\ c &= a \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Dimostrazione. La dimostrazione discende direttamente dalla definizione di funzione seno come rapporto di proiezione con segno. $\square$

costruire con cura la dimostrazione

Teorema 37 (sui triangoli rettangoli II). Un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente:

$$\begin{aligned} b &= a \cos(\gamma) \\ c &= a \cos(\beta) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Dimostrazione. Basta ricordare che $\cos(\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(\beta)$ $\square$

Teorema 38 (sui triangoli rettangoli III). Un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto:

$$\begin{aligned} b &= c \operatorname{tg}(\beta) \\ c &= b \operatorname{tg}(\gamma) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Dimostrazione. Si ottiene dai due teoremi precedenti dividendo membro a membro. $\square$

Dai precedenti teoremi discende che in un triangolo generico;

Teorema 39 (sui triangoli rettangoli IV). L'area si calcola facendo il semi prodotto di due lati consecutivi per il seno dell'angolo compreso Figura 10.3

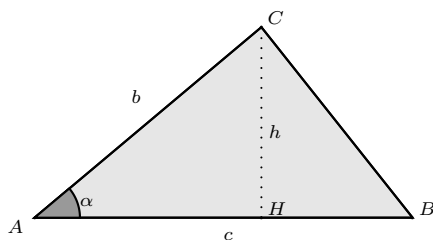


Figura 10.3: Area di un triangolo si osservi che $\overline{CH} = b \sin(\alpha)$

$$Area_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$$

10.2 Teoremi su un triangolo qualunque

Come premessa, oltre al teorema 39, è necessario dimostrare il seguente:

Teorema 40 (della corda). La misura di una generica corda di un cerchio di raggio r è pari al diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza:

$$\overline{AB} = 2r \sin(\alpha)$$

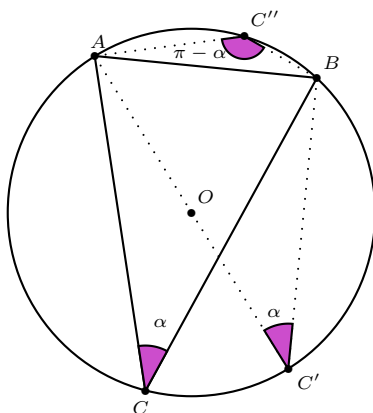


Figura 10.4: Teorema della corda

Dimostrazione. Ricordando che tutti gli angoli alla circonferenza inscritti nello stesso arco sono fra loro congruenti, ⁽¹⁾ si può costruire (Figura 10.4) il triangolo ABC' retto in B in quanto AC' è un diametro, a questo triangolo si applica il teorema sui triangoli rettangoli 10.2 che ci permette di scrivere: $\overline{AB} = \overline{AC'} \sin(\alpha)$ ma come detto $\overline{AC'} = 2r$. Osserviamo che il teorema vale anche per tutti gli angoli inscritti nel minore dei due archi AB , infatti $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\square$

¹osservare che ci sono due archi AB : quindi si ha a che fare con due insiemi di angoli alla circonferenza, quelli il cui vertice si trova sul maggiore dei due archi (come C e C') e quelli sul minore (come C'')

10.2.1 Teorema dei seni

Teorema 41 (dei seni). In un generico triangolo non degenere, il rapporto fra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Prima dimostrazione. Ogni triangolo è inscritto in una circonferenza⁽²⁾, sia r il raggio della circonferenza circoscritta. I lati del triangolo sono corde della circonferenza, pertanto è possibile applicare il teorema 40 ottenendo:

$$a = 2r \sin(\alpha)$$

$$b = 2r \sin(\beta)$$

$$c = 2r \sin(\gamma)$$

da cui:

$$2r = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

□

Seconda dimostrazione. Possiamo utilizzare il teorema 39 ottenendo:

$$2Area_{ABC} = cb \sin(\alpha)$$

$$2Area_{ABC} = ba \sin(\gamma)$$

$$2Area_{ABC} = ca \sin(\beta)$$

eguagliando si ottiene: $cb \sin(\alpha) = ba \sin(\gamma) = ca \sin(\beta)$ è possibile dividere i membri delle uguaglianze per il fattore non nullo abc ⁽³⁾ ottenendo, dopo essere passati ai reciproci:

$$\frac{abc}{2Area_{ABC}} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

□

Dalle due dimostrazioni precedenti emerge un interessante risultato:

Teorema 42 (del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo). Il raggio della circonferenza circoscritta ad un dato triangolo ABC , non degenere, è dato da:

$$r = \frac{abc}{4Area_{ABC}}$$

Ricordiamo, inoltre, che il raggio della circonferenza inscritta ad un generico triangolo è dato dall'area diviso il semiperimetro $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

$$r' = \frac{Area_{ABC}}{p}$$

²perchè

³si ricordi che nell'ipotesi del teorema il triangolo è non degenere

10.2.2 Teorema del coseno

Teorema 43 (del coseno). In un generico triangolo non degenero, vale la seguente relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cos(\alpha)$$

Evidentemente il teorema è un'estensione del teorema di Pitagora ai triangoli non rettangoli, nella dimostrazione distinguiamo tre casi:

Dimostrazione. Analizziamo diversi casi:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ il teorema si riduce al teorema di Pitagora $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ nella dimostrazione si fa riferimento alla Figura 10.5a l'altezza $\overline{CH} = b \sin(\alpha)$, la proiezione AH di AC su AB misura: $\overline{AH} = b \cos(\alpha)$, per differenza si ricava: $\overline{HB} = c - b \cos(\alpha)$, si applica il teorema di Pitagora al triangolo CHB :

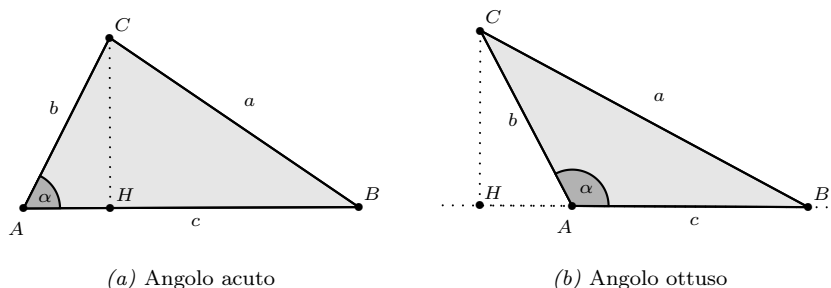


Figura 10.5: Teorema del coseno

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2(\alpha) + (c - b \cos(\alpha))^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 + b^2 \cos^2(\alpha) - 2bc \cos(\alpha) \\ a^2 &= b^2 (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$\alpha > \frac{\pi}{2}$ si procede come nel punto precedente: l'altezza $\overline{CH} = b \sin(\alpha)$, ma dato che il triangolo è ottusangolo, la proiezione AH di AC su AB misura: $\overline{AH} = b \cos(\pi - \alpha)$, per cui: $\overline{HB} = c + b \cos(\pi - \alpha) = c - b \cos(\alpha)$, a si calcola, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHB :

$$\begin{aligned} a^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2(\alpha) + (c - b \cos(\alpha))^2 \\ a^2 &= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 + b^2 \cos^2(\alpha) - 2bc \cos(\alpha) \\ a^2 &= b^2 (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \end{aligned}$$

□

Capitolo 11

*Geometria: allineamento e intersezione

11.1 Teorema di Ceva

Questo capitolo di approfondimento è stato ricavato da un testo rivolto a studenti messicani che si preparano alle gare matematiche nel loro paese. (*Concurrencia y Colinealidad 2005*)

Teorema 44 (di Ceva). Dato un triangolo ABC , siano D, E ed F punti presi rispettivamente sulle rette BC, CA e AB .

Le rette AD, BE e CF si incontrano nello stesso punti se e solo se $\Leftrightarrow$:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

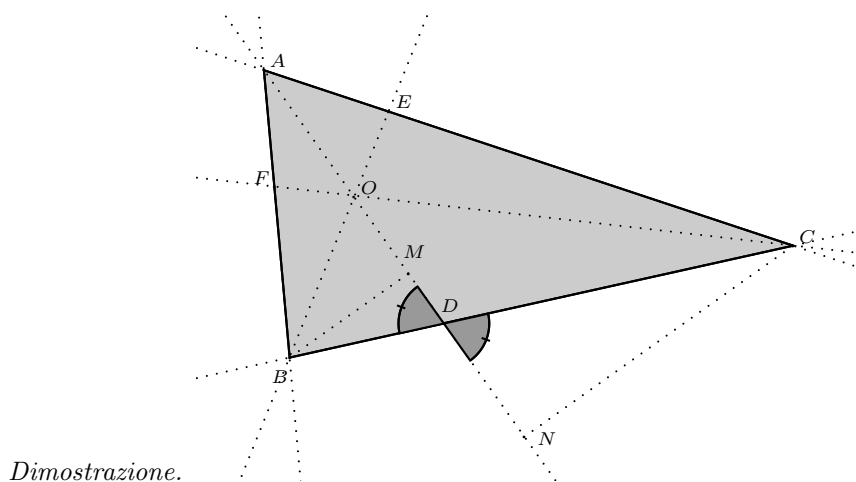


Figura 11.1: Il teorema di Ceva AD, BE e CF sono le ceviane

($\Rightarrow$) I triangoli AOB e AOC hanno la stessa base AO pertanto le loro area stanno nello stesso rapporto delle altezze $\frac{Area_{AOB}}{Area_{AOC}} = \frac{BM}{CN}$, i triangoli BDM e CDN sono simili, in quanto entrambi retti ed hanno $\widehat{CDN} = \widehat{BDM}$ opposti al vertice, pertanto $\frac{BM}{CN} = \frac{BD}{DC}$ e quindi $\frac{Area_{AOB}}{Area_{AOC}} = \frac{BD}{DC}$, lo stesso ragionamento si può fare per gli altri lati ottenendo: $\frac{Area_{BOC}}{Area_{AOC}} = \frac{AF}{FB}$ e $\frac{Area_{BOC}}{Area_{AOB}} = \frac{AE}{EC}$, moltiplicando le tre relazioni si ottiene la tesi.

($\Leftarrow$) Sia O il punto di intersezione delle rette BE e CF , detto D' il punto di intersezione della retta AO con BC , si ha che i segmenti AD' , BE e CF sono ceviane concorrenti e per quanto appena dimostrato si ha $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ ma per ipotesi si ha che:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$$

da cui si ricava che: $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$ che può essere scritto come $\frac{BC - D'C}{D'C} = \frac{BC - DC}{DC}$ da cui $\frac{BC}{D'C} = \frac{BC}{DC}$ ed infine $D'C = DC$ quindi $D' \equiv D$ che conduce alla tesi $\square$

11.1.1 Forma Trigonometrica del Teorema di Ceva

La tesi del teorema di Ceva si può anche scrivere:

$$\frac{\sin(\widehat{ACF})}{\sin(\widehat{FCB})} \cdot \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = 1$$

Teorema 45 (di Menelao). Dato un triangolo ABC , siano D, E ed F punti presi rispettivamente sulle rette BC, CA e AB .

I punti D, E ed F sono allineati se e solo se:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Dimostrare il teorema di Menelao

11.2 Figure in prospettiva

Si dice che due figure sono in prospettiva, se tutte le rette che uniscono i punti corrispondenti delle due figure si incontrano in un solo punto, detto centro della prospettiva. Figure omotetiche sono in prospettiva ma non è sempre vero il contrario, infatti non è in generale vero che segmenti corrispondenti siano paralleli.

Teorema 46 (di Desargues). ⁽¹⁾ Se due triangoli sono in prospettiva i punti di intersezione dei lati corrispondenti sono allineati e vice versa.

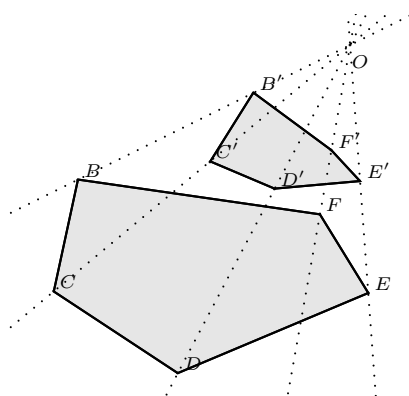


Figura 11.2: Figure in prospettiva

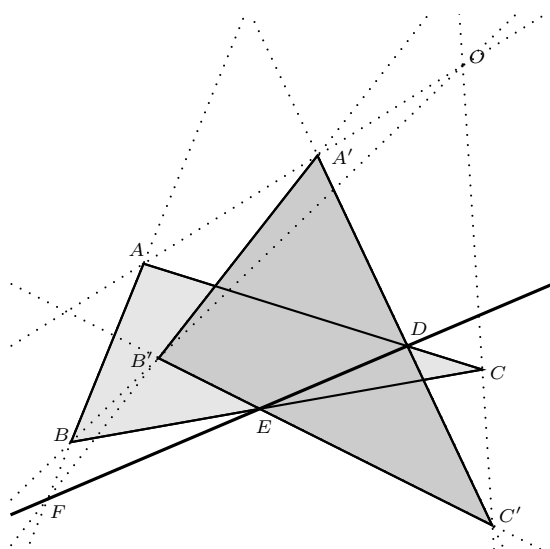


Figura 11.3: Teorema di Desargues

Costruisci la figura in GeoGebra e verifica il teorema

Teorema 47 (di Pappo). ⁽²⁾ Siano A, B, C e D, E, F due terne di punti allineati, se le rette AD, BE e CF si incontrano con le rette EC, FA e DB rispettivamente in P, Q, R . Allora i punti P, Q, R sono allineati.

Costruisci la figura in GeoGebra e verifica il teorema

¹Girard Desargues (1591 - 1661) matematico francese mise i fondamenti della geometria proiettiva. Lavorò principalmente sulla teoria della sezioni coniche e sulle trasformazioni prospettiche

²Il seguente teorema fu dimostrato da Pappo di Alessandria intorno al 300 a.C.

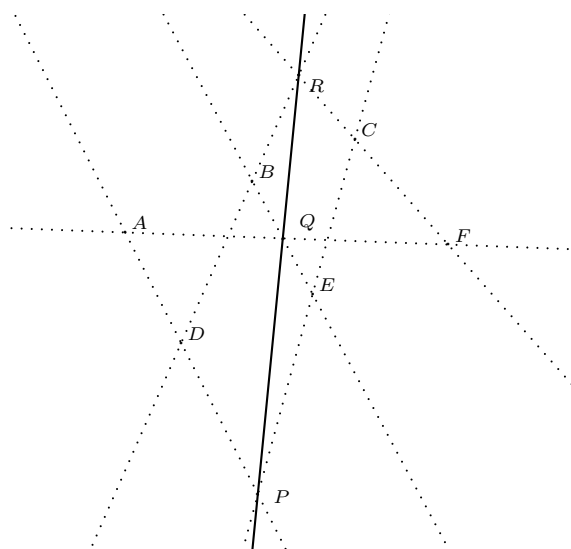


Figura 11.4: Teorema di Pappo

Teorema 48 (di Pascal). I punti di intersezione dei lati opposti di un esagono inscritto in una circonferenza sono allineati.

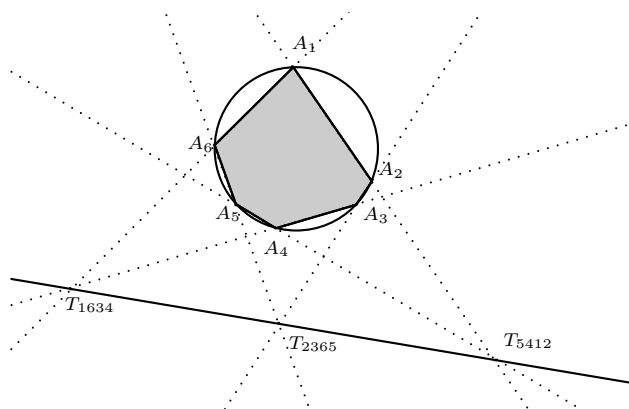


Figura 11.5: Teorema di Pascal

*Costruisci la figura in GeoGebra e verifica il teorema
verifica che il teorema vale in generale per un qualsiasi esagono
inscritto in una generica conica*

11.2.1 Casi limite

Il teorema di Pascal ammette casi limite, quando due vertici consecutivi coincidono nella Figura 11.6 il caso del pentagono

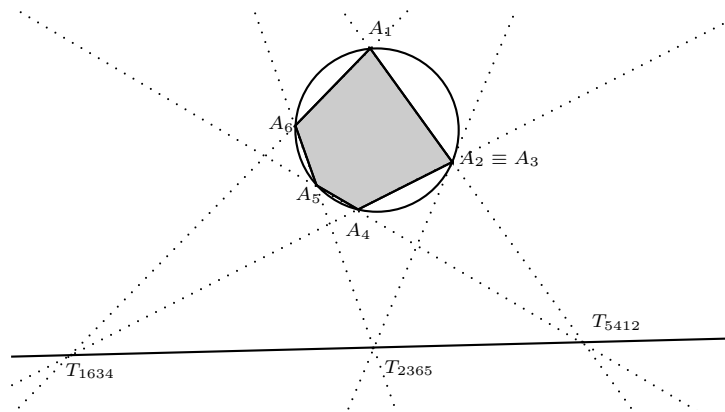


Figura 11.6: Teorema di Pascal caso limite: pentagono

costruire i casi limite per quadrilatero e triangolo

Capitolo 12

Le trasformazioni nel piano cartesiano

12.1 Le trasformazioni del piano in sé

Una trasformazione geometrica τ tra i punti di un piano è una corrispondenza biunivoca che ad ogni punto P del piano associa uno e un solo punto P' appartenente al piano stesso e viceversa. $P' = \tau(P)$ è detto trasformato di P , $P = \tau^{-1}(P')$ è detto antitrasformato di P' .

Si dice trasformazione identica o identità la trasformazione che associa ad ogni punto P il punto stesso: $\tau(P) = P$.

Si dice involutoria una trasformazione che composta con se stessa, (ovvero applicata due volte), dà l'identità.

Fissato un sistema di riferimento (cartesiano ortogonale), le coordinate del punto $P' = (x', y')$ possono essere espresse in funzione delle coordinate del punto $P = (x, y)$:

$$\tau = \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (12.1)$$

Queste equazioni rappresentano l'espressione analitica della trasformazione e forniscono le coordinate del punto trasformato P' quando sono assegnate le coordinate del punto P . Affinché la legge di trasformazione sia ben definita, occorre che le funzioni f e g siano ovunque definite, e invertibili. Dal punto di vista algebrico esse dovranno soddisfare le seguenti condizioni:

- non possono essere funzioni razionali fratte perché eventuali coppie che rendano nullo il denominatore non avrebbero corrispondente nella trasformazione;
- non possono contenere potenze di grado pari di x o y perché la trasformazione non sarebbe biunivoca;
- non possono essere irrazionali con indice pari perché le eventuali coppie che rendono negativo il radicando non avrebbero immagine nella trasformazione.

12.1.1 Punti uniti

Un punto si dice unito (vedi 3) rispetto alla trasformazione τ se la sua immagine P' coincide con P .

Operativamente per determinare i punti uniti di una data trasformazione basta esprimere la condizione in termini di coordinate:

$$P \equiv P' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases} \quad (12.2)$$

E' bene ricordare (Paragrafo 5.1.3) che un sistema di equazioni può essere:

- determinato in tal caso si avrà un numero finito di punti uniti (soluzioni);
- indeterminato a cui corrisponderanno un numero infinito di punti uniti;
- impossibile e non si avranno punti uniti.

12.1.2 Figure unite

Definizione 53 (Figura unita). Si dice unita una figura che nella trasformazione corrisponde a se stessa.

Le figure unite non sempre sono costituite da punti uniti; per esempio in una simmetria assiale le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono unite, ma non costituite da punti uniti. Costruiamo ora la più semplice trasformazione τ scegliendo f e g funzioni lineari di (x, y) .

12.1.3 Affinità

Definizione 54 (Affinità). Un'affinità (o trasformazione affine) del piano in sé è un'applicazione biettiva τ che fa corrispondere al punto $P = (x, y)$ il punto $P' = (x', y')$ secondo la formula:

$$\tau = \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \quad (12.3)$$

Dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$

L'applicazione è biettiva (quindi invertibile) quando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

La $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è matrice associata alla trasformazione τ con $|A| \neq 0$; se $|A| > 0$ l'affinità viene detta **diretta**; **inversa** se $|A| < 0$.

Proprietà fondamentali dell'affinità

- trasforma rette in rette;
- se tre punti P, Q, R sono allineati, i loro corrispondenti in un'affinità P', Q', R' sono anch'essi allineati;
- a rette parallele corrispondono rette parallele e a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conserva il rapporto fra segmenti paralleli (in particolare al punto medio di un segmento corrisponde il punto medio del segmento trasformato);

- se la figura S' è l'immagine corrispondente di una figura S , allora $Area_{S'} = |det(A)| Area_S$
(¹)

Verificare le proprietà

Esercizio 8. Dato il triangolo T di vertici $O = (0,0)$ $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$. Costruire i trasformati T' e T'' ottenuti applicando le affinità:

$$\tau' = \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \quad e \quad \tau'' = \begin{cases} x'' = x + 2y \\ y'' = x - y \end{cases} \quad (12.4)$$

Soluzione. Detta $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associata a τ' si ha $|A'| = 3$ quindi affinità diretta, i vertici trasformati sono: $O' = (0,0)$ che è punto unito $B' = (1,1)$ e $C' = (-2,1)$.

Detta $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associata a τ'' si ha $|A''| = -3$ quindi affinità inversa, i vertici trasformati sono: $O' = (0,0)$ che è punto unito $B'' = (1,1)$ e $C'' = (2,-1)$. $\square$

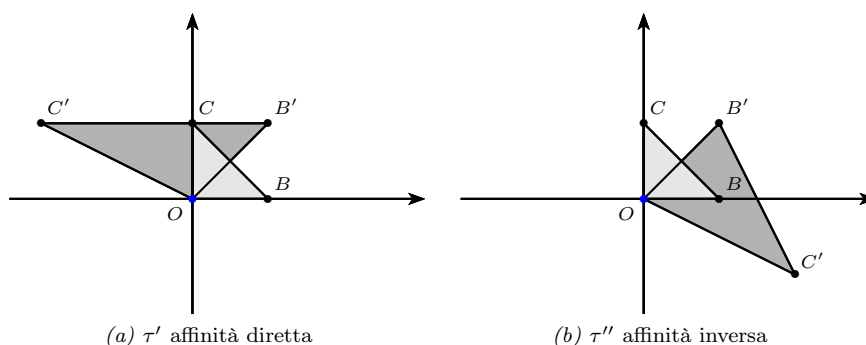


Figura 12.1: Triangolo trasformato, osservare l'ordinamento dei punti

12.1.4 Similitudini

Definizione 55 (Similitudine). Una similitudine è una trasformazione geometrica affine in cui resta invariato il rapporto fra le distanze di coppie di punti corrispondenti A, B e A', B' ovvero:

$$\overline{A'B'} = k \overline{AB}$$

Dato che è un'affinità partiamo dall'equazione 12.3 ed imponiamo le proprietà che caratterizzano la similitudine. Siano $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ due generici punti del piano π ; detti $A' = (x'_1, y'_1)$ e $B' = (x'_2, y'_2)$ i trasformati si deve avere:

$$\sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2} = k \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (12.5)$$

¹Dove $det(A) = |A|$

appliciamo ora alla 12.5 la trasformazione 12.3, e utilizzando l'identità dei polinomi si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = k^2 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = k^2 \\ a_{21}a_{22} + a_{11}a_{12} = 0 \end{cases} \quad (12.6)$$

Che, con non pochi calcoli, porta alle soluzioni: $a_{11} = a_{22} \wedge a_{21} = -a_{12}$ oppure $a_{11} = -a_{22} \wedge a_{21} = a_{12}$, nei due casi $|A|$ si riduce a $\pm k^2$. Dato che il modulo del determinante di A è il rapporto fra le aree delle figure, si ha che $|k|$ è il rapporto di similitudine.

12.1.5 Isometrie

Traslazioni

Se $a_{11} = a_{22} = 1 \wedge a_{21} = a_{12} = 0$, τ diviene una **traslazione** di vettore $\vec{u} = (b_1, b_2)$

La matrice A della trasformazione è la matrice identità.

$$\tau = \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$$

- la traslazione identità (traslazione di vettore nullo), ovvero la trasformazione che porta ogni punto del piano in se stesso, è un particolare tipo di traslazione. Tutti i suoi punti sono uniti;
- una traslazione diversa dall'identità non ha punti uniti;
- le rette parallele al vettore di traslazione sono rette unite;
- qualunque retta viene trasformata in una retta ad essa parallela;
- una traslazione trasforma una figura geometrica in una figura congruente.

Componendo:

$$\tau' = \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \text{con} \quad \tau'' = \begin{cases} x'' = x' + b_1 \\ y'' = y' + b_2 \end{cases}$$

si ottiene

$$\tau = \begin{cases} x'' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y'' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

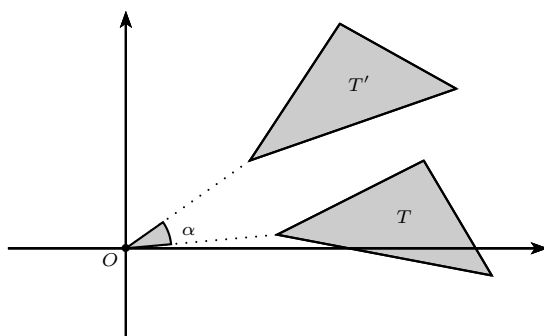
Quindi si possono considerare le affinità nella forma τ' a meno di traslazioni.

Rotazioni

Se consideriamo una similitudine con $|A| = 1$ cioè: $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ ora ricordando quanto visto in goniometria (Capitolo 8) la trasformazione può essere scritta:

$$\tau = \begin{cases} x' = \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ y' = \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{cases}$$

La trasformazione così ottenuta è una rotazione di centro l'origine del sistema di riferimento e angolo di rotazione α


 Figura 12.2: Rotazione di centro O e angolo α

Simmetria centrale

Si ottiene spostando nell'origine del sistema di riferimento il centro di simmetria $C = (x_0, y_0)$ con una traslazione di vettore $\overrightarrow{CO}$, applicando poi una rotazione di angolo $\alpha = \pi$ e riportando poi C nella sua posizione originale (traslazione di vettore $\overrightarrow{OC}$):

$$\tau = \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Si può osservare che $\frac{x + x'}{2} = x_0$

Simmetria assiale

La simmetria assiale di asse: $ax + by + c = 0$ è una trasformazione che ad ogni punto A del piano associa un punto A_1 tale che il segmento AA_1 è perpendicolare all'asse e il punto medio H di AA_1 appartiene all'asse.

Esprimendo le condizioni imposte dalla definizione nei termini delle coordinate si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \\ a\left(\frac{x + x'}{2}\right) + b\left(\frac{y + y'}{2}\right) + c = 0 \end{cases}$$

Da cui, risolvendo rispetto x' e y' , si ricava la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = -\frac{2ab y + (a^2 - b^2)x + 2ac}{b^2 + a^2} \\ y' = -\frac{(b^2 - a^2)y + 2abx + 2bc}{b^2 + a^2} \end{cases}$$

in cui il determinante della matrice A dei coefficienti, vale $|A| = \frac{-(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}{(b^2 + a^2)^2} = -1$, è quindi può essere scritta come:

$$\sigma : \begin{cases} x' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + b_1 \\ y' = \sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y + b_2 \end{cases} \quad b_1 = \frac{2ac}{b^2 + a^2} \quad b_2 = \frac{2bc}{b^2 + a^2} \quad \alpha = \arctg\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)$$

In particolare se l'asse passa per l'origine ($c = 0$) i termini noti si annullano.

Proprietà fondamentali

- tutti i punti dell'asse di simmetria sono uniti: l'asse è quindi una retta unita luogo di punti uniti;
- tutte le rette perpendicolari all'asse sono unite, ma non costituite da punti uniti.

Passi di costruzione della trasformazione Data una retta r di equazione $y = mx + q$ ($m, q \in \mathbb{R}$), costruiamo le equazioni di trasformazione che portano un punto $A = (a, b)$ in un punto $A_1 = (a_1, b_1)$ simmetrico di A rispetto all'asse r .

Passo 1 Calcolo dell'equazione della retta s passante per A e perpendicolare ad r ,

$$s : y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$$

Passo 2 Calcolo di $H = s \cap r$: $\begin{cases} y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \\ y = mx + q \end{cases}$ risolvendo rispetto a x si ha:

$$\begin{aligned} mxq - b &= -\frac{1}{m}(x - a) \\ m^2x + mq - bm &= -x + a \\ x(m^2 + 1) &= a + bm - mq \\ x_H &= \frac{a + bm - mq}{1 + m^2} \end{aligned}$$

Passo 3 Calcolo di A_1 , nella simmetria assiale il punto H è punto medio del segmento AA_1 , pertanto, dato che $\frac{a + a_1}{2} = x_H$ si ricava:

$$\begin{aligned} a + a_1 &= 2 \left(\frac{a + bm - mq}{1 + m^2} \right) \\ a(1 + m^2) + a_1(1 + m^2) &= 2a + 2b - 2mq \\ a_1(1 + m^2) &= 2a + 2b - 2mq - a - am^2 \\ a_1 &= \frac{1 - m^2}{1 + m^2}a + \frac{2m}{1 + m^2}b - \frac{2mq}{1 + m^2} \end{aligned}$$

Utilizzando la condizione di appartenenza di A_1 alla retta s si ottiene che $b_1 = \frac{2m}{1 + m^2}a - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}b - \frac{2q}{1 + m^2}$.

Passo 4 La simmetria assiale di asse r è la trasformazione τ di equazione:

$$\tau : \begin{cases} x' = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \frac{2m}{1 + m^2}y - \frac{2mq}{1 + m^2} \\ y' = \frac{2m}{1 + m^2}x - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}y - \frac{2q}{1 + m^2} \end{cases}$$

Ricavare le equazioni delle simmetrie:

- i) rispetto all'asse delle ascisse;
- ii) rispetto all'asse delle ordinate;
- iii) rispetto ad una retta parallela all'asse delle ascisse;
- iv) rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate;
- v) rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ($y = x$);
- vi) rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante ($y = -x$)

12.1.6 Omotetie

Se il centro dell'omotetia O coincide con l'origine degli assi, le equazioni analitiche dell'omotetia sono:

$$\tau = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

- se $k > 0$ l'omotetia si dice diretta. P e P' si trovano dalla stessa parte rispetto ad O ;
- se $k < 0$ l'omotetia si dice inversa. P e P' si trovano da parti opposte rispetto ad O ;
- se $k = 1$ si ha l'identità;
- se $k = -1$ si ha la simmetria rispetto all'origine.

Verificare che una similitudine si ottiene componendo un'omotetia con una isometria

12.1.7 *Affinità qualche idea in più

(Tratto da *Conferenza - Cesenatico 8 maggio 2009*) Ricerchiamo alcuni invarianti nell'affinità, già se ne sono visti nel paragrafo 12.1.3 alcuni. Osserviamo come data una generica curva ed una retta ad essa tangente, una volta applicata l'affinità otterremo ancora una curva ed una retta ad essa tangente: infatti, le affinità trasformano rette in rette ed inoltre sono trasformazioni biunivoche, pertanto dato che curva e retta hanno un solo punto in comune questo punto non può essere trasformato in due o nessun punto!

Problema 12. Fra tutti i triangoli inscritti in una data ellisse trovare quello di area massima

Soluzione. È noto che il triangolo equilatero è fra tutti i triangoli inscritti in una circonferenza quello di area massima. Una circonferenza con una opportuna affinità viene trasformata in un'ellisse, ad esempio nella Figura 12.3 alla circonferenza goniometrica ($x^2 + y^2 = 1$) viene

applicata l'affinità $\tau = \begin{cases} x = \frac{X}{2} \\ y = \frac{Y}{3} \end{cases}$ ottenendo l'ellisse di equazione: $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$, costruiamo

nella circonferenza di centro O il triangolo equilatero utilizzando proprietà invarianti nell'affinità: sia T un generico punto della circonferenza, T' simmetrico di T rispetto O ⁽²⁾, tracciamo per T' la tangente t alla circonferenza ora, sia M il punto medio fra O e T' , tracciamo la parallela a T il triangolo TAB è equilatero.

²l'affinità mantiene i punti medi

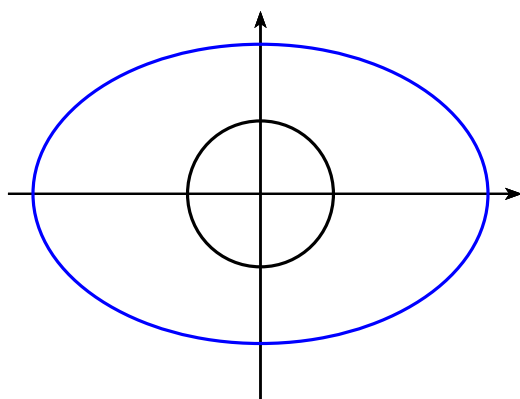


Figura 12.3: La circonferenza goniometrica e la sua trasformata secondo τ

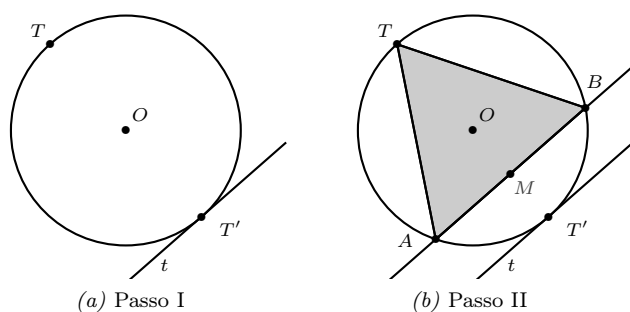


Figura 12.4: Costruzione del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza

Ripetiamo ora la stessa costruzione nel caso dell'ellisse, si veda Figura 12.5

□

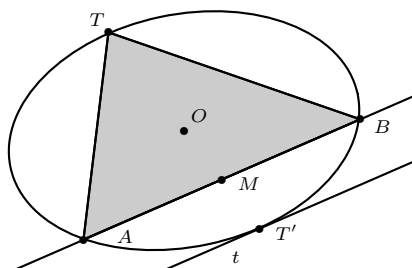
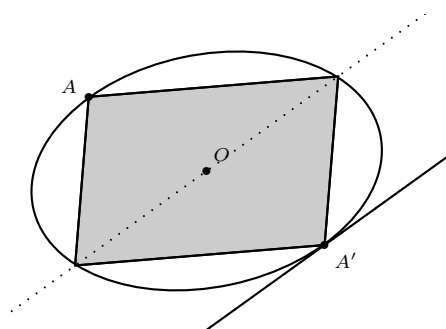
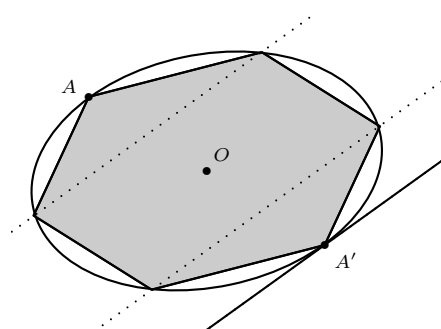


Figura 12.5: La costruzione del triangolo di area massima inscritto nell'ellisse

Trovando le opportune costruzioni che utilizzano proprietà invarianti nell'affinità è possibile costruire quadrilateri (Figura 12.6a) ed esagoni (Figura 12.6b) di area massima inscritti nell'ellisse.



(a) Quadrilatero di area massima



(b) Esagono di area massima

Costruire usando GeoGebra altri poligoni di area massima inscritti in una ellisse

Capitolo 13

*Gruppi e grafi

13.1 I Gruppi prime idee

Tratto da: Grossman e Magnus 1975

Una teoria dei gruppi incominciò a formarsi alla fine del secolo diciottesimo. Si sviluppò lentamente ed attirò molto poco l'attenzione durante i primi decenni del secolo diciannovesimo. Ma poi nel corso di pochi anni, intorno al 1830, fece un balzo gigantesco in avanti e diede un grande contributo allo sviluppo generale della matematica con i lavori di Galois⁽¹⁾ e di Abel⁽²⁾ sulla risolubilità delle equazioni algebriche.

Da allora i concetti che stanno alla base della teoria dei gruppi sono stati sviluppati ed estesi a diversi rami della matematica. Si sono avute applicazioni ai campi più diversi, dalla meccanica quantistica alla cristallografia e alla teoria dei nodi.

13.2 Gli assiomi dei gruppi

Affinché un insieme dotato di un'operazione binaria, detta anche legge di composizione interna, costituisca un gruppo, dobbiamo postulare che l'operazione binaria possieda certe proprietà relativamente agli elementi dell'insieme:

- (1) associatività
- (2) esistenza dell'elemento neutro(o identità)
- (3) esistenza dell'elemento inverso

13.3 Esempio di gruppo

Volendo decidere se un dato insieme di elementi dotato di un'operazione binaria specifica costituisca un gruppo, dovremo cercare di vedere se gli assiomi sono soddisfatti.

¹Evariste Galois nato il 25 ottobre 1811 a Bourg La Reine (vicino Parigi), morto il 31 maggio 1832 a Parigi

²Niels Henrik Abel nato il 5 agosto 1802 in Frindo e (Norvegia), morto il 6 aprile 1829 a Froland (Norvegia)

Si considerino i movimenti di un triangolo equilatero che ruoti nel suo piano intorno a un asse passante per il suo centro. Il gruppo che ci proponiamo di studiare avrà come elementi certi movimenti scelti fra la totalità delle rotazioni e l'operazione binaria che in questo insieme verrà chiamata "seguito da", ci interesseremo quei movimenti che portano il triangolo a coincidere con se stesso. Un movimento così definito è un movimento di congruenza. Per avere l'immagine concreta dei movimenti di congruenza scegliamo dapprima ad arbitrio una posizione particolare nel piano come posizione iniziale del nostro triangolo equilatero, prima che vi siano rotazioni, poi diamo un numero a ciascun vertice come segno di identificazione. Il triangolo equilatero potrà allora apparire come quello della figura 13.1 Il puntino nel centro rappresenta l'intersezione dell'asse di

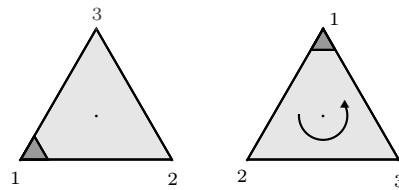


Figura 13.1: Le rotazione del triangolo equilatero

rotazione col piano del triangolo e la numerazione dei vertici ci servirà per rintracciarli quando verranno spostati dai movimenti del nostro insieme. Dobbiamo tener presente che affinché il triangolo coincida con se stesso non è necessario che ciascun singolo vertice (numerato) coincida con se stesso, ma soltanto che l'insieme dei punti che costituisce i lati del triangolo dopo la rotazione coincida con l'insieme che formava i lati nella posizione iniziale. Per esempio, se il triangolo della figura 13.1 viene ruotato di $\frac{2}{3}\pi$ attorno all'asse in senso antiorario, possiamo immaginare il triangolo ruotato come un secondo triangolo sovrapposto al primo nella posizione iniziale. Si può vedere che questa rotazione è associata con uno scambio dei vertici, precisamente 1 è sostituito da 2, 2 è sostituito da 3, 3 è sostituito da 1.

Sarà conveniente rappresentare questo modo particolare di portare il triangolo a coincidere con se stesso, "separando" le due posizioni del triangolo; si veda la figura 13.1. Si osservi che una regione vicino al vertice 1 è stata annerita per aiutare a vedere i movimenti del triangolo. Benché le posizioni del triangolo siano state disegnate l'una accanto all'altra non bisogna dimenticare che la figura è soltanto un modo conveniente di indicare una sovrapposizione risultante da una delle rotazioni che portano il triangolo a coincidere con se stesso.

Ci sono altre rotazioni che portano il triangolo dalla sua posizione iniziale nella seconda posizione raffigurata sopra?

Certo una rotazione in senso orario di $\frac{4}{3}\pi$ lo fa, come lo fa una rotazione antioraria di $\frac{8}{3}\pi$ o di $\frac{14}{3}\pi$. Quindi una qualsiasi delle rotazioni dell'insieme infinito $A = \left\{ \text{rotazioni antiorarie di } \frac{2}{3}\pi \pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ha il medesimo effetto. (Una rotazione antioraria negativa si deve interpretare come una rotazione oraria).

I movimenti dell'insieme A hanno in comune la proprietà che ognuno di essi associa i vertici del nostro triangolo nella posizione iniziale con i vertici dopo la rotazione in questo preciso modo:

Posizione iniziale		Posizione dopo rotazione
1	→	2
2	→	3
3	→	1

Si osserva che le rotazioni dell'insieme A hanno questa proprietà qualunque sia la posizione che scegliamo come posizione iniziale del triangolo.

Ora indichiamo con a un elemento qualunque dell'insieme A . Il movimento a si può considerare come rappresentante dell'insieme A nel senso che la rotazione a porta il triangolo dalla posizione iniziale (scelta ad arbitrio) a coincidere con se stesso nella posizione che corrisponde al seguente modo di accoppiare i vertici:

$$a \quad 1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$$

In una determinata situazione potremmo trovare opportuno che a indichi un particolare movimento dell'insieme A ; per esempio a potrebbe essere la rotazione antioraria di $\frac{2}{3}\pi$.

13.4 Le tavole di moltiplicazione

Dobbiamo prendere in considerazione la domanda seguente: come si può definire un determinato gruppo? In altre parole, quanta informazione è necessaria per determinare un gruppo come ente matematico? E in che modo potremo esibire i dati che definiscono un particolare gruppo? Una risposta a queste domande è stata data da Cayley⁽³⁾ nel 1854 quando introdusse la tavola di moltiplicazione di un gruppo. Si tratta di un quadro simile alle ben note tavole di moltiplicazione dell'aritmetica. Gli elementi del gruppo vengono disposti nella prima riga in alto e, nel medesimo ordine, nella prima colonna a sinistra di una tabella, mentre nelle caselle della tabella ci sono i prodotti del gruppo.

Costruiremo la tavola di moltiplicazione per il gruppo delle rotazioni di congruenza di un triangolo equilatero in un piano, dove: I è l'identità; r = rotazione antioraria di $\frac{2}{3}\pi$;

r_1 = rotazione antioraria di $\frac{4}{3}\pi$

per rappresentare i tre elementi di questo gruppo, li disponiamo insieme con i loro prodotti nella tabella.

	I	r	r_1
I	$I \cdot I$	$I \cdot r$	$I \cdot r_1$
r	$r \cdot I$	$r \cdot r$	$r \cdot r_1$
r_1	$r_1 \cdot I$	$r_1 \cdot r$	$r_1 \cdot r_1$

Sono opportune alcune spiegazioni e semplificazioni. Non possiamo ritenere sicuro in anticipo che due elementi qualsiasi di questo gruppo siano fra loro commutabili; per tale motivo i fattori di ciascun prodotto sono scritti nell'ordine in cui la moltiplicazione deve essere eseguita ed il primo fattore è elencato nella colonna a sinistra, il secondo nella riga superiore.

³Arthur Cayley nato il 16 agosto 1821 a Richmond, Surrey, (Inghilterra) morto il 26 gennaio 1895 a Cambridge, Cambridgeshire, (Inghilterra)

	I	r	r_1
I	I	r	r_1
r	r	r_1	I
r_1	r_1	I	r

Molte delle proprietà di questo gruppo di rotazioni si possono leggere direttamente nella sua tavola di moltiplicazione. Gli inversi si possono trovare osservando in quali righe e colonne figura I nella tavola. Si osservi l'interessante «coincidenza» per cui le righe sono permutazioni della riga superiore e le colonne sono permutazioni della colonna di sinistra. La tavola mostra anche che tutti gli elementi del gruppo sono commutabili fra loro, dato che tutti i prodotti situati simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono gli stessi. La diagonale principale va dall'angolo superiore sinistro all'angolo inferiore destro ed è, nel caso attuale:

$$\begin{array}{c}
 |I| \\
 |r_1| \\
 |r|
 \end{array}$$

In qualsiasi tavola di moltiplicazione se un prodotto è rs , allora il prodotto disposto simmetricamente è sr . Diciamo commutativo un gruppo se due elementi qualsiasi sono commutabili. Perciò possiamo dire:

Un gruppo finito è commutativo se, e solo se, la sua tavola di moltiplicazione ha la proprietà che prodotti situati simmetricamente rispetto alla diagonale principale danno luogo al medesimo elemento del gruppo.

Un'altra proprietà importante del gruppo di rotazioni di congruenza di un triangolo equilatero non si può leggere nella tavola di moltiplicazione nella sua forma attuale, ma risulterà in evidenza dopo che avremo introdotto alcune nuove notazioni e le avremo adoperate per scrivere la nostra tavola in un'altra forma ancora.

D'accordo con l'idea che la moltiplicazione di gruppo è una generalizzazione della moltiplicazione ordinaria, indicheremo l'elemento del gruppo rr con r^2 , rrr con r^3 e in generale un prodotto di k volte r verrà scritto r^k . Analogamente scriveremo $(r^{-1})(r^{-1})$ come r^{-2} . Poiché $r^k r^{-k} = I$ è naturale definire $r^0 = I$. Gli elementi r^n del gruppo, dove n è un intero qualsiasi, si chiamano potenze di r . Nel gruppo in esame, $r_1 = rr = r^2$, $rr_1 = rrr = r^3 = I$, e così la sua tavola di moltiplicazione si può scrivere come nella tabella 13.1. In quest'ultima forma la tavola mostra che ogni elemento del gruppo è una potenza dell'unico elemento r . Un gruppo che abbia questa proprietà si dice generato dall'elemento r e r si chiama generatore.

Un gruppo non commutativo

Benché si siano incontrati esempi di coppie di elementi non commutabili, non abbiamo ancora visto un gruppo non commutativo. Vogliamo ricordare che abbiamo definito un gruppo commutativo come un gruppo nel quale due elementi qualsiasi sono commutabili. Questi gruppi vengono chiamati abeliani, in onore di Abel che per primo li applicò alla teoria delle equazioni. Se un gruppo ha due elementi non commutabili allora il gruppo viene chiamato non commutativo, a prescindere da quante altre coppie di elementi commutabili vi possano essere. Vi può essere un gruppo in cui due elementi non siano mai commutabili? La risposta evidentemente è «no» poiché ogni gruppo contiene l'elemento unità I che è commutabile con ogni elemento.

	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

Tabella 13.1: Tabella moltiplicativa delle rotazioni del triangolo equilatero

13.4.1 Gruppo non commutativo

Costruiremo ora un gruppo non commutativo di ordine 6. Risulterà evidente in seguito che questo è il più piccolo ordine possibile per un gruppo non commutativo. Per costruire il nostro gruppo consideriamo i movimenti di un triangolo equilatero che lo portano a coincidere con se stesso. Abbiamo già esaminato un tale insieme di movimenti con la condizione restrittiva che il triangolo ruotasse nel proprio piano ed abbiamo visto che quelle rotazioni costituivano un gruppo d'ordine 3. Se togliamo la restrizione, altri movimenti diventano possibili poiché il triangolo può essere ribaltato. Per esempio far girare il triangolo intorno ad una delle sue altezze lo porta a coincidere con se stesso, ma non si tratta di una delle rotazioni già studiate. Vedremo che vi sono ora sei posizioni nelle quali il triangolo coincide con se stesso. Le denotiamo con I , r , r^2 , f , fr , fr^2 . Le posizioni sono illustrate dai sei diagrammi della figura 13.2.

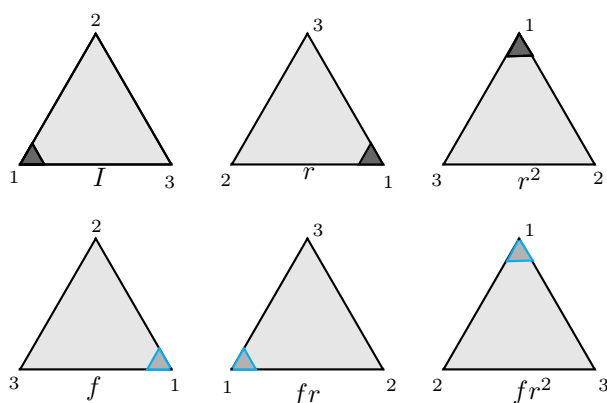


Figura 13.2: Elementi del gruppo non commutativo di ordine 6

Un simbolo adoperato per indicare un movimento verrà spesso dotato di un significato specifico: r indicherà una rotazione antioraria di $\frac{2}{3}\pi$ intorno all'asse passante per il centro del triangolo equilatero. Ma può anche rappresentare qualsiasi elemento dell'insieme A di rotazioni antiorarie di angoli $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$; analogamente ad un movimento f verrà dato un significato preciso per comodità nel visualizzare i movimenti, ma che rappresenterà anche un elemento qualsiasi di un certo insieme di movimenti. L'aspetto essenziale è che considereremo come «lo stesso» movimento tutti quelli che associano i vertici nello stesso modo.

In ciò che segue troveremo conveniente supporre che r rappresenti una rotazione antioraria di

$\frac{2}{3}\pi$ intorno a un asse perpendicolare al piano del triangolo e passante per il suo centro. Allora le prime tre posizioni si possono raggiungere con i movimenti I, r, r^2 .

Per raggiungere una delle nuove posizioni dobbiamo in qualche modo rovesciare il triangolo. Possiamo fare ciò ruotando il triangolo di π attorno all'altezza passante per uno dei suoi vertici. Scegliamo l'altezza passante per il vertice 2 come asse di rotazione. La rotazione di π avente come asse questa altezza verrà indicata con f . Naturalmente f rappresenta anche qualsiasi rotazione di un angolo di ampiezza $\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ intorno a questo asse.

Dobbiamo cercare di chiarire ciò che intendiamo col simbolo fr . Le posizioni contrassegnate f ed fr nella figura 13.2 si può notare che la rotazione r sembra essere di $\frac{2}{3}\pi$ in senso orario, invece che di $\frac{2}{3}\pi$ in senso antiorario, come prescritto. Questa diversità apparente scompare se osserviamo che l'aver ribaltato il triangolo ha invertito il senso dell'asse della rotazione r .

Ma prima ci occorre una descrizione più particolareggiata della rotazione r : abbiamo preso come asse di rotazione la retta passante per il centro del triangolo equilatero e perpendicolare al suo piano; abbiamo assegnato poi un senso o verso a questo asse, indicato dalla punta della freccia

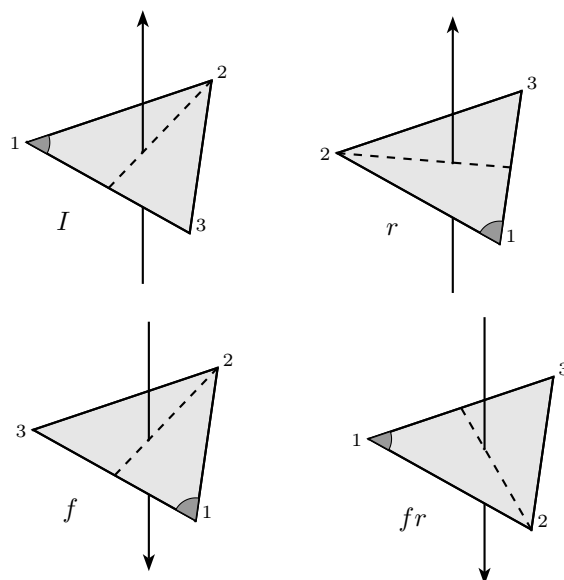


Figura 13.3: Rotazioni e ribaltamenti

nella figura 13.3, e la nostra rotazione r è associata al seguente accoppiamento dei vertici: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$. Si immagini ora che la punta della freccia dell'asse sia l'estremità filettata di una vite destrorsa; per effettuare la rotazione r , si dovrà ruotare il triangolo di $\frac{2}{3}\pi$ nel senso in cui occorre girare per stringere la vite destrorsa. Se il primo triangolo della figura 13.3 è assoggettato al movimento f verrà a trovarsi nella posizione contrassegnata f nella figura 13.3. Si osservi che l'asse è stato invertito dal ribaltamento. Se, successivamente, il triangolo subisce una rotazione r , dove r si interpreta come lo stringere di una vite destrorsa, si raggiungerà la posizione indicata con fr nella figura 13.3. Così, la rotazione r , sia che agisca sul triangolo nella posizione I o

nella posizione contrassegnata f , accoppia sempre i vertici nello stesso modo: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$.

L'insieme delle sei classi di movimenti illustrate dalle sei posizioni possibili del triangolo, con l'operazione binaria di successione, cioè «seguito da», costituisce un gruppo.

Sappiamo che l'operazione è associativa e che l'elemento unità I è un elemento dell'insieme. Che l'assioma sugli inversi sussista anch'esso si può vedere intuitivamente pensando che, se c'è un movimento che trasforma una posizione in un'altra, ce ne sarà anche uno che inverte la trasformazione (l'inverso).

Sarà istruttivo dimostrare alcune delle proprietà del gruppo mediante la tavola di moltiplicazione. Si osservi che $r^2 = I$ e $f^2 = I$, a causa del significato stesso di tali movimenti. Adoperando queste particolari proprietà costruiamo la tavola di moltiplicazione del nostro gruppo:

	I	r	r^2	f	fr	fr^2
I	I	r	r^2	f	fr	fr^2
r	r	r^2	I	rf	rfr	$rf r^2$
r^2	r^2	I	r	$r^2 f$	$r^2 fr$	$r^2 fr^2$
f	f	fr	fr^2	I	r	r^2
fr	fr	fr^2	f	frf	$frfr$	$frfr^2$
fr^2	fr^2	f	fr	$fr^2 f$	$fr^2 fr$	$fr^2 fr^2$

In primo luogo mostriamo che $frfr = I$. Consideriamo la successione dei disegni della figura 13.4 Il primo rappresenta fr . Partendo dal triangolo in questa posizione lo facciamo ruotare di

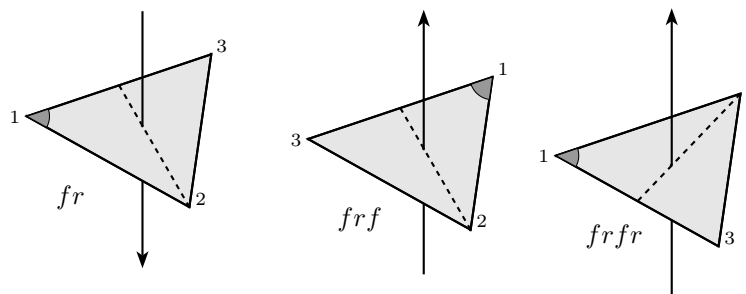


Figura 13.4: $frfr = I$

π intorno all'altezza passante per il vertice 2. Il risultato frf (fr seguito da f) è raffigurato nel secondo disegno. Poi lo facciamo ruotare di $\frac{2}{3}\pi$, nel senso di una vite destrorsa, intorno all'asse passante per il centro; il risultato $frfr$ è raffigurato nell'ultimo disegno e si vede che è identico alla posizione iniziale, indicata con I . Perciò $frfr = I$. La tavola rivela che:

- 1) «Seguito da» è un'operazione binaria sui nostri elementi;
- 2) poiché I figura esattamente una volta in ciascuna riga e colonna, l'assioma sugli inversi è soddisfatto. Possiamo determinare subito l'inverso di qualsiasi elemento del gruppo. Per esempio la configurazione

M	fM
fM	M

Tabella 13.2: Struttura-nella-struttura

$$\begin{array}{ccc} & & fr \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ fr & \dots & I \end{array}$$

ci mostra che $(fr)^{-1} = fr$;

- 3) il gruppo è non commutativo. Un'occhiata agli elementi situati simmetricamente rispetto alla diagonale principale mostra, per esempio, che $(fr)f = r^2 \neq r = f(fr)$;
- 4) le righe e le colonne sono permutazioni degli elementi della riga superiore e della colonna a sinistra, rispettivamente: si tratta della «coincidenza» notata in precedenza.
- 5) il quadrato di 3×3 caselle nell'angolo superiore sinistro è esattamente la tavola di moltiplicazione del gruppo d'ordine 3 delle rotazioni di un triangolo equilatero nel suo piano. All'altra estremità della diagonale principale, nell'angolo a destra in basso, c'è un quadrato di 3×3 caselle che è un riordinamento del quadrato superiore a sinistra. Invece, nei due quadrati 3×3 in basso a sinistra e in alto a destra vediamo riprodotti i due quadrati disposti lungo la diagonale principale, con ciascun prodotto preceduto dal prefisso f . Se M rappresenta l'insieme degli elementi nel quadrato 3×3 in alto a sinistra, allora la tabella rappresenta simbolicamente questa struttura-nella-struttura che abbiamo scoperto nella tavola 13.2 di moltiplicazione del nostro gruppo.

13.4.2 Struttura della tavola di moltiplicazione di un gruppo

Osserviamo ora più da vicino la struttura interna della tavola di moltiplicazione di un gruppo. In primo luogo esaminiamo la «coincidenza» ricordata prima, che le righe e le colonne della tavola di moltiplicazione di un gruppo sono permutazioni della riga superiore e della colonna a sinistra rispettivamente. Mostriamo che questa non è affatto una coincidenza, ma piuttosto una proprietà caratteristica della tavola di moltiplicazione di qualsiasi gruppo. Dopo aver fatto questo, considereremo la tavola di moltiplicazione di un gruppo come una configurazione che viene mostrata attraverso uno schieramento di simboli disposti in quadrato. Entro tale schieramento osserveremo configurazioni spaziali di simboli e indicheremo come esse corrispondano a relazioni nel gruppo. In questo modo, la struttura del gruppo si riflette in proprietà «geometriche» della sua tavola di moltiplicazione. Si può dimostrare che, inversamente, uno schieramento di elementi disposti in quadrato che abbia quelle proprietà «geometriche» è la tavola di moltiplicazione di un gruppo.

« Risoluzione » di una « equazione » in un gruppo

Nel trattare con elementi di un gruppo e con le loro relazioni è necessario qualche volta saper rispondere alla seguente domanda: Se a e b sono elementi noti di un gruppo, esiste un elemento x del gruppo tale che $ax = b$? Affermiamo che $x = a^{-1}b$ è l'elemento del gruppo che cerchiamo, poiché $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = Ib = b$; cioè, $x = a^{-1}b$ soddisfa l'«equazione» di gruppo $ax = b$.

Sono possibili altre soluzioni? Risponderemo a questa domanda mostrando che, ogni volta che y è una soluzione di $ax = b$, allora $y = a^{-1}b$; in altre parole, $a^{-1}b$ è una soluzione unica. Supponiamo in primo luogo che vi sia un elemento del gruppo y per cui $ay = b$. Sappiamo che a^{-1} esiste.

Possiamo moltiplicare i due membri di $ay = b$ a sinistra per a^{-1} : troveremo che $a^{-1}(ay)$ e $a^{-1}b$ rappresentano il medesimo elemento del gruppo, cioè $a^{-1}(ay) = a^{-1}b$. Ne discende che $(a^{-1}a)y = a^{-1}b$ (Associatività), $Iy = a^{-1}b$ (Identità) ossia $y = a^{-1}b$.

Siccome abbiamo già verificato mediante sostituzione che l'elemento $a^{-1}b$ soddisfa l'equazione di gruppo $ax = b$, la nostra affermazione che $a^{-1}b$ è una soluzione unica è così dimostrata. Si osservi che per la dimostrazione sono stati necessari tutti gli assiomi di gruppo.

La soluzione di un'equazione della forma $xa = b$ dove a e b sono elementi di un gruppo, si può trattare in modo analogo. Moltiplicando a destra per a^{-1} si ottiene la soluzione $xaa^{-1} = x = ba^{-1}$.

Formuliamo i nostri risultati sotto forma di «regola»: per «risolvere» $ax = b$ si moltiplichi a sinistra per a^{-1} e si troverà $x = a^{-1}b$; per «risolvere» $xa = b$ si moltiplichi a destra per a^{-1} e si troverà $x = ba^{-1}$.

Abbiamo dimostrato la nostra affermazione per la moltiplicazione a sinistra. Lo stesso ragionamento si può applicare all'insieme dei prodotti ottenuti mediante moltiplicazione a destra degli elementi del gruppo per un elemento fissato e così si completa la dimostrazione del seguente teorema sui gruppi finiti:

Teorema 49 (della tavola di moltiplicazione di un gruppo). Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono elementi distinti di un gruppo d'ordine n e se b è un elemento qualunque fissato del gruppo (dovrà, naturalmente, essere uno degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$), allora ciascuno degli insiemi di prodotti $ba_1, ba_2, \dots, ba_n$, ed $a_1b, a_2b, \dots, a_nb$ comprende tutti gli n elementi del gruppo, eventualmente riordinati (e precisamente, ogni volta che $b \neq I$).

Questo teorema assicura che ogni tavola di moltiplicazione di un gruppo consiste di righe e colonne che sono permutazioni della riga superiore e della colonna a sinistra rispettivamente.

Le idee che saranno presentate successivamente mirano a dimostrare, da un lato che gli assiomi di gruppo e le loro conseguenze impongono determinate configurazioni alle relazioni spaziali dei simboli entro la tavola di moltiplicazione, e d'altra parte che uno schieramento di simboli disposti in quadrato in cui compaiono quelle configurazioni è la tavola di moltiplicazione di un gruppo.

Supponiamo di avere un insieme di simboli formanti una tavola quadrata che sia la tavola di moltiplicazione di un gruppo. Allora la tavola ha le cinque proprietà seguenti:

- 1) la tavola contiene esattamente tanti simboli diversi quante sono le sue righe (o le sue colonne); così, se la tavola quadrata ha n righe ed n colonne vi sono esattamente n simboli diversi nell'insieme di n^2 simboli che formano la tavola. Questa proprietà della tavola traduce il fatto che il gruppo è un insieme di n elementi con un'operazione binaria;
- 2) ogni riga e ogni colonna contengono ciascun simbolo esattamente una volta. Ciò traduce l'enunciato del Teorema 49;
- 3) supponiamo che i simboli che rappresentano tutti gli elementi diversi di un gruppo siano disposti in un certo ordine, arbitrario ma ben definito, e che le righe e le colonne della tavola di moltiplicazione del gruppo siano intestate in accordo con quell'ordinamento. Per esempio, possiamo avere i simboli ordinati $a, b, I, c, \dots, k$. Sappiamo che il simbolo I dell'elemento unità

deve apparire in qualunque ordinamento dei simboli. (Nel nostro esempio è collocato come terzo elemento). In corrispondenza all'assioma di gruppo sull'elemento unità o sull'identità, abbiamo la proprietà della tavola quadrata: una riga della nostra tavola, e precisamente quella contrassegnata col simbolo I , è identica alla riga di simboli in cima alla tavola, e una colonna, precisamente la colonna con in testa il simbolo I , è identica alla colonna di simboli a sinistra della tavola.

- 4) l'assioma di gruppo sull'esistenza di elementi inversi determina la seguente proprietà della tavola quadrata: ogni simbolo nella tavola si può associare con un altro simbolo in modo che la riga contrassegnata col primo simbolo, r , e la colonna con in testa l'associato s , si intersechino in una casella contenente I ; anche la riga contrassegnata s e la colonna con in testa r si intersecano in un valore I , e questi due valori I sono collocati simmetricamente rispetto alla diagonale principale. Questa proprietà rispecchia il fatto che $rs = sr = I$ cioè che s è l'inverso di r ;
- 5) la proprietà associativa corrisponde alla seguente proprietà di una tavola quadrata che sia la tavola di moltiplicazione di un gruppo: supponiamo di scegliere due simboli qualsiasi r ed s dentro la nostra tavola in modo che la colonna contenente r e la riga contenente s si intersechino dentro la tavola in una casella in cui appare il simbolo I . La colonna contenente r ha in testa un certo elemento y del gruppo e la riga contenente r è contrassegnata a sinistra con un elemento che indichiamo con u . Analogamente la colonna contenente s ha in testa x , e la riga contenente s è contrassegnata con v : la proprietà associativa dice che l'intersezione della riga contenente r e della colonna contenente s , cioè il valore corrispondente al prodotto ux , deve essere rs . Per vederlo si osservi che $vy = yv = I$, $uy = r$, $vx = s$, cosicché $ux = u(yv)x = (uy)(vx) = rs$. Pertanto la tavola di moltiplicazione deve includere questa configurazione :

	rs	$\dots$	r
.			.
.			.
.			.
s	$\dots$		I

13.5 Generatori di un gruppo

Benché la tavola di moltiplicazione di un gruppo ci dica implicitamente tutto ciò che vogliamo sapere su di un gruppo specificando tutti i prodotti di due elementi, si possono prevedere alcune difficoltà nel tentativo di farne uso senza limiti, fra l'altro, basta pensare alla difficoltà fisica del cercare di analizzare un gruppo d'ordine 60 per mezzo della sua tavola di moltiplicazione.

Ci rivolgiamo ora al concetto di generatore, che permette di descrivere i gruppi indipendentemente dall'ordine del gruppo. Il concetto di generatore di un gruppo servirà anche come ponte di passaggio verso la rappresentazione grafica di un gruppo.

Supponiamo che a e b siano elementi di un gruppo. Allora, per l'assioma sugli inversi, a^{-1} e b^{-1} sono anch'essi nel gruppo e così pure $ab^{-1}a$, $aba^{-1}b$, ecc. Ogni prodotto che si possa scrivere adoperando a, b, a^{-1}, b^{-1} come fattori, in una successione qualsiasi e con qualsiasi frequenza finita, è un elemento del gruppo, per la definizione di operazione binaria. Se tutti gli elementi del gruppo si possono esprimere come prodotti che fanno intervenire soltanto a e b (ed i loro inversi) diciamo che a e b sono generatori del gruppo. Possiamo estendere questo concetto di generatori

di un gruppo a un insieme di più di due elementi del gruppo. Se S è un insieme di elementi di un gruppo G , $S = \{a, b, c, \dots\}$, e se tutti gli elementi di G si possono esprimere come prodotti nei quali intervengono solo gli elementi di S (ed i loro inversi), allora chiamiamo gli elementi di S generatori del gruppo G .

Il caso più semplice è quello di un gruppo con un solo generatore, ad esempio a ; tutti i suoi elementi si possono esprimere come prodotti nei quali intervengono solo a e il suo inverso a^{-1} come fattori. Il gruppo delle rotazioni di un triangolo ne è un esempio la tabella 13.1, infatti $I = aa^{-1}$, è chiaro che ciascuno dei tre elementi del gruppo I, a, a^2 è un prodotto che contiene come fattori soltanto l'unico generatore a oppure a^{-1} .

13.5.1 Gruppi ciclici

Un aspetto essenziale del gruppo delle rotazioni del triangolo si può mettere in evidenza elencando le potenze del generatore a :

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5 a^6, \dots$$

Poiché $a^3 = I$, esse possono scriversi:

$$a, a^2, I, a, a^2, I, \dots$$

Vi è una ripetizione ciclica dello schema fondamentale a, a^2, I . Ed è per tale motivo che il gruppo viene chiamato gruppo ciclico d'ordine 3.

Possiamo definire gruppi ciclici di qualsiasi ordine: se ogni elemento di un gruppo si può esprimere come potenza di un unico generatore a allora il gruppo si chiama gruppo ciclico. Adoperiamo C come simbolo generale per indicare un gruppo ciclico: l'ordine del gruppo verrà indicato da un indice in basso. Così C_3 indicherà un gruppo ciclico d'ordine 3 e C_n un gruppo ciclico d'ordine n , se n è il più piccolo esponente positivo per cui $a^n = I$, il gruppo generato da a sarà di ordine n . Il minimo esponente positivo n tale che $a^n = I$ si chiama anche periodo dell'elemento a .

Se a genera un gruppo ciclico C_n , allora un elenco di potenze successive di a mostrerà una ripetizione ciclica dello schema fondamentale $a, a^2, \dots, a^n = I$. Questa caratteristica si presta ad un'interpretazione geometrica che conduce al nostro scopo di rappresentare graficamente un gruppo. Per esempio un gruppo ciclico d'ordine 3 suggerisce un triangolo con ciascun vertice che corrisponda a un elemento del gruppo (figura 5.1). Ogni lato del triangolo ha una direzione che

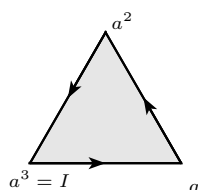


Figura 13.5: Il grafo delle rotazioni del triangolo

gli è assegnata, indicata dalla freccia. Il muoversi nella direzione della freccia corrisponde alla moltiplicazione a destra per l'elemento generatore a . Così partendo dal vertice contrassegnato a^2 e muovendosi nella direzione della freccia verso il vertice I si forma il prodotto $a^2 a = a^3 = I$.

Il muoversi nella direzione opposta a quella della freccia corrisponde alla moltiplicazione a destra per a^{-1} , l'inverso del generatore a . Per esempio, partendo dal vertice contrassegnato a^2 e

muovendosi nella direzione opposta a quella della freccia che punta verso a^2 si forma il prodotto $a^2a^{-1} = aaa^{-1} = a$.

13.6 Grafo di un gruppo

Sembra dunque che un poligono, modificato mediante l'assegnazione di una direzione a ciascun lato, possa essere un equivalente figurativo di un gruppo ciclico, ossia un grafo di un gruppo ciclico. Vediamo di passare in rivista ciò che sappiamo delle proprietà fondamentali di un gruppo e vediamo come queste si possano mettere in relazione con la rappresentazione figurativa ora presentata.

Se a è un generatore di un gruppo ciclico, sappiamo per definizione che ogni elemento si può rappresentare come un prodotto contenente soltanto i fattori a e a^{-1} . Viceversa ogni prodotto formato con a e a^{-1} come fattori è un elemento del gruppo. Per esempio, si considerino i prodotti $a, aaa^{-1}, a^{-1}aaa^{-1}a$; si dà il caso che tutti e tre questi prodotti rappresentino il medesimo elemento del gruppo. Con un'ovvia analogia chiamiamo parola ogni successione finita di generatori e loro inversi: ad ogni parola in a e a^{-1} corrisponde un elemento del gruppo ciclico generato da a .

Poiché ogni dato elemento del gruppo si può rappresentare come parola in infiniti modi, una rappresentazione di un elemento del gruppo come parola non è unica.

Se x è un elemento del gruppo ciclico di ordine 3, potremo tradurre ogni parola rappresentante x in movimenti sul grafo proposto. Supponiamo che la parola aaa^{-1} rappresenti x . Traduciamo questa parola in movimento sul grafo nel modo seguente:

- 1) prendiamo il vertice contrassegnato I come punto di partenza. Poiché il primo fattore nella parola esprime x è a , partiremo da I nella medesima direzione della freccia verso l'altro estremo del segmento. Questo estremo è il vertice contrassegnato con a e sarà il punto di partenza per ogni ulteriore movimento;
- 2) poiché il secondo fattore nella parola è a partiremo dall'ultimo vertice raggiunto e ci muoveremo nella medesima direzione della freccia verso l'altro estremo del segmento: questo estremo è il vertice contrassegnato a^2 e sarà il punto di partenza per ogni ulteriore movimento;
- 3) poiché il terzo fattore è a^{-1} , l'inverso di a , partiamo dall'ultimo vertice raggiunto e muoviamoci nella direzione opposta a quella della freccia verso l'altro estremo del segmento: questo estremo è il vertice contrassegnato con a e sarà il punto di partenza di ogni ulteriore movimento;

ma il terzo fattore è l'ultimo fattore di questa particolare parola; non vi sarà nessun ulteriore movimento e il cammino corrispondente alla parola aaa^{-1} termina nel vertice contrassegnato con a .

La parola corrispondente a x è stata interpretata come indicazione di un insieme di direzioni per muoversi lungo un cammino sulla rete che costituisce il grafo. Ad ogni parola corrisponde una successione specifica di movimenti lungo i segmenti orientati e, inversamente, ogni cammino che parte da I lungo i segmenti orientati del grafo di un gruppo corrisponde a una parola specifica.

La rappresentazione di un gruppo come rete di segmenti orientati, nella quale i vertici corrispondono ad elementi e i segmenti corrispondono al moltiplicare per generatori del gruppo e per loro inversi, è stata inventata da Cayley, un matematico del secolo diciannovesimo. Una tale rete o grafo si chiama spesso **diagramma di Cayley**.

Le rotazioni di un quadrato nel proprio piano costituiscono un gruppo ciclico d'ordine 4, C_4 . Il grafo di questo gruppo è illustrato nella figura 13.6. Osservazioni:

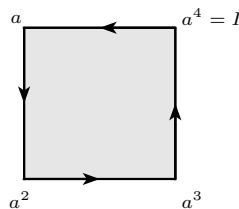


Figura 13.6: Il grafo delle rotazioni del quadrato

- 1) vi sono tanti vertici quanti elementi del gruppo;
- 2) il vertice I è stato scelto ad arbitrio;
- 3) per ciascun vertice passano due segmenti, uno corrispondente alla moltiplicazione a destra per il generatore a e orientato nel verso che si allontana dal vertice, l'altro corrispondente alla moltiplicazione a destra per l'inverso a^{-1} del generatore a e orientato nel verso che si avvicina al vertice;
- 4) la forma specifica della rete del grafo non ha nessun significato. Ciò che importa è la configurazione delle interconnessioni fra i vertici. I segmenti orientati che collegano i vertici non debbono essere necessariamente rettilinei e non è detto che la forma complessiva del grafo debba essere quella di un poligono regolare.

13.6.1 Un gruppo con due generatori

La tavola di moltiplicazione del gruppo dei moti di congruenza di un triangolo equilatero offre un'esempio di gruppo con due generatori, una rotazione r e un ribaltamento f . Gli elementi del gruppo sono:

$$I, r, r^2, f, fr, fr^2,$$

dove ciascun elemento dell'esempio si ottiene dal suo vicino a sinistra (oppure a destra) moltiplicando a destra per r (o per r^{-1}); e gli elementi della seconda riga si ottengono dagli elementi posti sopra di essi moltiplicando a sinistra per f . Questo suggerisce di adoperare come grafo per questo gruppo due triangoli collegati da segmenti corrispondenti al generatore f ; si veda la figura 6.7.

Distinguiamo il generatore r dal generatore f nel grafo adoperando un tratto continuo per la moltiplicazione per r e una linea a tratti per la moltiplicazione per f .

Come conseguenza del fatto che ora abbiamo due generatori, ogni cammino nel nostro grafo si può descrivere mediante una successione che contiene soltanto simboli dell'insieme: r, f, r^{-1}, f^{-1}

Proprietà fondamentali del grafo di un gruppo

I nostri esempi di grafi per vari gruppi hanno in comune certe proprietà fondamentali.

Elemento del gruppo $\longleftrightarrow$ Vertice del grafo

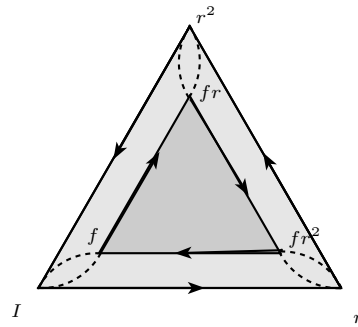


Figura 13.7: Grafo con due generatori

Gli elementi del gruppo sono in corrispondenza biunivoca coi vertici del grafo. Ogni vertice di un grafo di un gruppo corrisponde esattamente a un elemento del gruppo e viceversa.

Generatore $\longleftrightarrow$ Lati con la stessa grafica (tratteggio, linea piena)

Ogni lato (o spigolo) della rete di un grafo è un segmento orientato: segmenti dello stesso tipo sono associati a uno stesso generatore del gruppo. Partire da un vertice e muoversi lungo un segmento nella direzione della freccia corrisponde a moltiplicare a destra per il generatore associato, diciamo a , mentre muoversi lungo il segmento nella direzione opposta alla freccia corrisponde a moltiplicare a destra per a^{-1} , l'inverso del generatore.

Parola $\longleftrightarrow$ Cammino

Ogni parola rappresentante un elemento del gruppo si può interpretare come un cammino, cioè come una successione specifica di segmenti orientati del grafo e viceversa. Per ogni vertice lungo il cammino corrispondente a una parola, il movimento successivo è prescritto dal successivo fattore nella parola. Poiché ogni fattore è uno dei generatori oppure l'inverso di un generatore, ogni vertice del grafo è estremo di due segmenti orientati dello stesso tipo, uno diretto ad allontanare dal vertice e l'altro diretto verso il vertice. Se il gruppo ha due generatori a e b , vi saranno quattro lati per ogni vertice, poiché i quattro fattori a, b, a^{-1}, b^{-1} corrispondono a quattro movimenti possibili a partire da ciascun vertice. In generale, in ciascun vertice vi è un lato entrante e un lato uscente per ogni generatore.

Moltiplicazione di elementi $\longleftrightarrow$ Successione di cammini

La moltiplicazione di due elementi del gruppo corrisponde a percorrere sul grafo un cammino composto di due cammini successivi. Il prodotto $rs = t$ degli elementi r ed s del gruppo si può interpretare come un cammino sul grafo come segue: si scrivano r ed s come parole nei simboli dei generatori o dei loro inversi. Col vertice corrispondente a I come punto di partenza, si segua il cammino prescritto dalla parola di r : il punto finale di questo cammino corrisponde a r . Ora, col vertice r come punto di partenza, si segua il cammino prescritto dalla parola di s : questo cammino avrà termine nel vertice corrispondente a $t = rs$, indipendentemente dalle particolari parole adoperare per rappresentare r ed s .

Parola corrispondente a $I \longleftrightarrow$ Cammino chiuso

Ogni parola corrispondente a I dà luogo a un cammino chiuso sul grafo. Supponiamo che W sia una parola corrispondente a I . Per esempio, nel gruppo dei moti di congruenza di un triangolo

equilatero, W può essere $frfr$. Se il vertice che corrisponde a I viene preso come punto iniziale, allora il cammino prescritto dalla parola W terminerà nel vertice I . Diciamo che un cammino è chiuso se i punti iniziale e finale coincidono. Se viene preso come punto iniziale un vertice corrispondente a t diverso da I , allora il cammino prescritto dalla parola W terminerà nel vertice t poiché $tW = t$. Pertanto, se W è una parola corrispondente a I , il cammino prescritto da W è chiuso qualunque sia il vertice che viene preso come punto iniziale. Quando un grafo ha questa proprietà viene chiamato « omogeneo ». Segue dalla « omogeneità » del grafo di un gruppo che i vertici possono essere contrassegnati in modo che qualsiasi vertice scelto ad arbitrio corrisponda a I ;

Risolubilità di $rx = s \iff$ La rete del grafo è connessa

Il grafo di un gruppo è una rete connessa; cioè, vi sono cammini che vanno da ciascun vertice ad ogni altro vertice. Se r ed s sono due elementi qualsiasi di un gruppo, allora esiste un elemento $x = r^{-1}s$ tale che $rx = s$. È chiaro che se W è una qualsiasi parola corrispondente a $x = r^{-1}s$, allora $rW = s$; sicché se il vertice corrispondente a r viene preso come punto di partenza, il cammino prescritto da W conduce dal vertice r al vertice s .

Riassumiamo le corrispondenze dimostrate nella precedente discussione:

Gruppo	Grafo
Elemento	Vertice
Generatore	Lati orientati dello stesso «colore»
Parola	Cammino
Moltiplicazione di elementi	Successione di cammini
Parola corrispondente a I	Cammino chiuso
L'equazione è risolubile $rx = s$	La rete è connessa

D'ora in poi i vertici del grafo di un gruppo verranno contrassegnati solo quando la chiarezza lo richiede. Osservazioni sulle parole che rappresentano I . Una parola rappresenta I se, e solo se, il cammino corrispondente sulla rete del grafo del gruppo è chiuso. (Si ricordi che un cammino è chiuso quando i punti iniziale e finale coincidono). Possiamo distinguere due tipi essenzialmente diversi di cammini chiusi; come esempio, nelle figure 13.8 e 13.9 sono presentati due cammini nel grafo del gruppo dei movimenti di un triangolo equilatero. Entrambi i cammini sono chiusi, ma

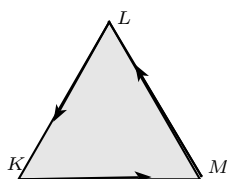


Figura 13.8: Cammino da K a M ad L , parola $W_1 = rrr = r^3 = I$

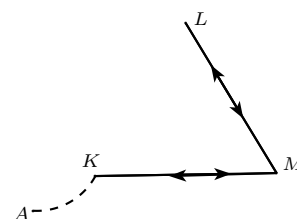


Figura 13.9: Cammino da A a K ad M ad L ad M a A , parola $W_2 = fr^{-1}r^{-1}rrf^{-1} = I$

sono essenzialmente diversi se considerati da un punto di vista topologico oppure dal punto di

vista delle proprietà di gruppo. La topologia è quel ramo della geometria che studia i modi in cui gli enti geometrici sono connessi e non si occupa per niente di proprietà come la lunghezza. La topologia considera soltanto quelle proprietà di una configurazione geometrica che non cambiano di fronte a qualsiasi deformazione che non spezzi alcuna linea o connessione. Da un punto di vista topologico i cammini che corrispondono alle parole $W_1 = r^3$ e $W_2 = fr^{-1}r^{-1}rrf^{-1}$ sono essenzialmente diversi: il cammino chiuso corrispondente a W_1 non percorre mai due volte lo stesso segmento, mentre il cammino chiuso corrispondente a W_2 , ritorna su se stesso e percorre ogni segmento una seconda volta in ordine e direzione inversi.

La differenza fondamentale tra W_1 e W_2 si può vedere anche dal punto di vista degli assiomi che stanno alla base di tutte le proprietà dei gruppi. $W_2 = fr^{-1}r^{-1}rrf^{-1}$ rappresenta I in qualsiasi gruppo che abbia due elementi ai quali si diano i nomi r ed f ; invece, $W_1 = r^3$ rappresenta I solo in quei particolari gruppi in cui è vero che $r^3 = I$.

Per vedere che $W_2 = I$ è vero in ogni gruppo, scriviamo:

$$\begin{aligned} W_2 &= fr^{-1}r^{-1}rrf^{-1} = fr^{-1}(r^{-1}r)rf^{-1} = fr^{-1}(I)rf^{-1} = \\ &= fr^{-1}rf^{-1} = f(r^{-1}r)f^{-1} = f(I)f^{-1} = ff^{-1} = \\ &= I \end{aligned}$$

Ricorrendo agli assiomi dei gruppi abbiamo successivamente eliminato tutti i simboli che rappresentano i generatori e i loro inversi, riducendo così la parola W_2 a I . W_2 si chiama parola vuota, perché si può esprimere, mediante applicazione degli assiomi di gruppo, in forma vuota da ogni elemento del gruppo diverso da I ; concludiamo:

- 1) un cammino chiuso sulla rete del grafo che ritorni su se stesso percorrendo due volte ogni segmento (la seconda volta con ordine e direzione inversi) corrisponde alla parola vuota;
- 2) tutti gli altri cammini chiusi corrispondono a speciali *relazioni* fra i generatori che non sono vere in generale per tutti i gruppi.

13.7 Gruppi di permutazioni

Gran parte di quanto è stato scritto sulla teoria dei gruppi si occupa della classe di gruppi noti come gruppi di permutazioni, o di sostituzioni. I gruppi di permutazioni sono particolarmente interessanti perché ci forniscono modelli concreti per tutti i gruppi finiti.

Abbiamo dato numerosi esempi di rappresentazioni scritte in forma di «doppia riga tra parentesi», con gli elementi dell'insieme dato nella riga in alto e gli elementi immagine nella riga in basso. Inoltre abbiamo dimostrato che l'insieme di tutte le rappresentazioni biunivoche di un insieme di n elementi su se stesso costituisce un gruppo di rappresentazioni. Tali rappresentazioni si chiamano permutazioni e i gruppi i cui elementi sono permutazioni sono chiamati gruppi di permutazioni.

Supponiamo che i tre elementi di un insieme siano disposti in un ordine arbitrario, ma ben definito a_1, a_2, a_3 . Converrà fare attenzione solo agli indici e pensare l'insieme così ordinato come se fosse scritto 1, 2, 3; ad esempio, il terzo elemento, a_3 , è indicato semplicemente da 3.

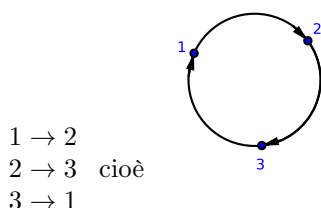
Supponiamo ora che M sia una rappresentazione biunivoca di tale insieme su se stesso.

$$M : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 1 \end{array}$$

Interpretiamo la rappresentazione M come il riordinamento o permutazione della successione 1, 2, 3 che dà luogo alla successione 2, 3, 1. Questa interpretazione è la base per considerare un gruppo di rappresentazioni di un insieme finito su se stesso, come un gruppo di permutazioni. Possiamo anche pensare che M consista della sostituzione di ciascun elemento dell'insieme con qualche elemento dell'insieme stesso: 1 è sostituito da 2, 2 da 3 e 3 da 1; per questa ragione un gruppo di rappresentazioni di un insieme finito su se stesso è stato spesso chiamato, in passato, gruppo di sostituzioni.

13.7.1 Permutazioni rappresentate come cicli

La rappresentazione o permutazione M definisce le corrispondenze



Questo schema ciclico suggerisce di scrivere M come singola riga tra parentesi

$$M : (123)$$

, interpretando tale simbolo in questo modo: M rappresenta ciascuna cifra sulla sua vicina a destra e completa il ciclo rappresentando l'ultima cifra a destra sulla prima cifra. M può scriversi come ciclo in 3 modi:

$$(123), (231), (312)$$

poiché non ha importanza quale elemento del ciclo scriviamo per primo.

Supponiamo di avere una rappresentazione N di un insieme di quattro elementi a_1, a_2, a_3, a_4 ,

$$N : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Possiamo esprimere anche questa rappresentazione N con un ciclo? Poiché 4 è rappresentato su 4 possiamo esprimere N con

$$(123)$$

intendendo che ciascun elemento non presente nel ciclo è rappresentato su se stesso. Analogamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4)$$

perché la rappresentazione a sinistra è completamente definita dal ciclo a due elementi $(2\ 4)$ che va letto: $2 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 3$.

Potrà una rappresentazione qualsiasi di un insieme finito

su se stesso essere scritta in forma ciclica? Ad esempio, come scriveremo la rappresentazione:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

in cui, a differenza della N scritta in precedenza, l'insieme delle singole corrispondenze non costituisce un unico schema ciclico? Cominciamo con la cifra 1 e scriviamo la sua immagine 2 alla sua destra:

$$(1 \ 2.$$

Per estendere il ciclo oltre la cifra 2, esaminiamo le corrispondenze della rappresentazione A : vediamo che l'immagine di 2 è 4. Il ciclo esteso è ora

$$(1 \ 2 \ 4.$$

Se cerchiamo di applicare ulteriormente il ciclo, vediamo che A rappresenta 4 su 1, ed il ciclo completo è

$$(1 \ 2 \ 4).$$

Ma questo ciclo non è A , perché non specifica la rappresentazione di 3 su 5 e di 5 su 3 come A richiede. Il ciclo $(3 \ 5)$ fa proprio questo, mentre rappresenta ciascuno degli altri elementi su se stesso. E quindi chiaro che se eseguiamo la rappresentazione

$$(1 \ 2 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

seguita dalla rappresentazione

$$(3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

il prodotto è la rappresentazione A , cioè:

$$(1 \ 2 \ 4)(3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si noti che questi due cicli non hanno cifre in comune nessuno dei due influisce sull'altro e non ha importanza quale delle due rappresentazioni si esegue per prima quindi

$$(1 \ 2 \ 4)(3 \ 5) = (3 \ 5)(1 \ 2 \ 4)$$

Il procedimento da noi usato per giungere a A in forma ciclica può essere applicato a qualunque rappresentazione di un insieme finito su se stesso. Segue che ogni permutazione di un insieme finito può essere scritta come un prodotto di cicli senza cifre in comune.

Consideriamo le rappresentazioni

$$(1 \ 2)(2 \ 3) \quad e \quad (2 \ 3)(1 \ 2)$$

per vedere se i cicli $(1 \ 2)$ e $(2 \ 3)$, che hanno in comune la cifra 2, godono della proprietà commutativa. $(1 \ 2)(2 \ 3)$ significa

$1 \rightarrow 2$ seguito da $2 \rightarrow 3$ col risultato $1 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 3$ seguito da $3 \rightarrow 3$ col risultato $3 \rightarrow 3$

$2 \rightarrow 1$ seguito da $1 \rightarrow 1$ col risultato $2 \rightarrow 1$

Quindi

$$(1 \ 2)(2 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$$

Invece $(2 \ 3)(1 \ 2)$ significa $1 \rightarrow 1$ seguito da $1 \rightarrow 2$ col risultato $1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 3$ seguito da $3 \rightarrow 3$ col risultato $2 \rightarrow 3$

	I	a	a^2	a^3	
	g_1	g_2	g_3	g_4	
I	I	a	a^2	a^3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = m_1$
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	
a	a	a^2	a^3	I	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = m_2$
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	
a^2	a^2	a^3	I	a	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = m_3$
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	
a^3	a^3	I	a	a^2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = m_4$
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	

 Tabella 13.3: Tavola di moltiplicazione di C_4

$3 \rightarrow 2$ seguito da $2 \rightarrow 1$ col risultato $3 \rightarrow 1$

Quindi

$$(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3)$$

e questi cicli non sono commutabili.

Quando i cicli non hanno cifre in comune, sono commutabili; se hanno una cifra in comune possono non esserlo.

13.7.2 Un gruppo finito è isomorfo con un gruppo di permutazioni

Quanto abbiamo detto nei paragrafi precedenti ci fornisce la base per un fondamentale teorema riguardante le costruzioni di modelli per gruppi finiti. In precedenza abbiamo detto che qualunque particolare gruppo può essere considerato come uno dei molti possibili esempi concreti di un gruppo astratto isomorfo a ciascun esempio. Il teorema che stabiliremo ci garantisce che qualunque gruppo astratto finito può essere esemplificato concretamente mediante un gruppo di permutazioni. (Ricordiamo che una permutazione di n elementi è una rappresentazione biunivoca di un insieme di n elementi su se stesso).

Teorema 50 (di isomorfismo con il gruppo di permutazione). Dato un gruppo finito qualsiasi di ordine n , esiste un gruppo di permutazioni di n elementi isomorfo col gruppo dato.

Troveremo un modo di presentare il gruppo ciclico C_4 , di ordine 4, come gruppo di permutazioni. Prima di tutto costruiamo la tavola di moltiplicazione di C_4 (Tabella 13.3), indicando gli elementi I, a, a^2, a^3 anche con g_1, g_2, g_3, g_4 rispettivamente. Ogni riga della Tabella 13.3 è una permutazione della riga in alto; ad esempio l'insieme ordinato g_2g_3, g_4, g_1 (o semplicemente $2, 3, 4, 1$) nella seconda riga è una permutazione dell'insieme ordinato $1, 2, 3, 4$ della prima riga. Le quattro permutazioni, o rappresentazioni biunivoche, si vedono a destra della tavola. Sotto forma di cicli, possiamo scrivere

(per scrivere $m_1 = I$ come prodotto di cicli abbiamo introdotto cicli con una cifra).

Problema 13. Verificare direttamente dai cicli che:

a) $m_2^2 = m_3$

b) $m_3^2 = I$

c) $m_2^3 = m_4$

d) $m_2 m_4 = I$

e che le rappresentazioni m_1, m_2, m_3, m_4 formano un gruppo M .

Soluzione. Per vedere che il gruppo M delle permutazioni m_1, m_2, m_3, m_4 , è isomorfo a C_4 , si considerino i vertici di un quadrato come i quattro oggetti che devono essere riordinati secondo

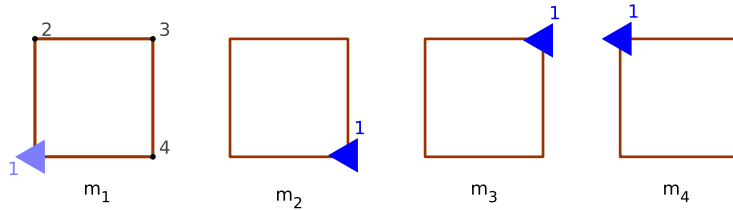


Figura 13.10: Rotazione del quadrato rispetto al suo centro

le rappresentazioni m_1, m_2, m_3, m_4 (Figura 13.10).

È chiaro che m_1 è l'identità del gruppo di Permutazioni M : si associ m_1 all'elemento I di C_4 . La Permutazione m_2 è equivalente a una rotazione di 90° in senso antiorario: si associ m_2 all'elemento generatore a di C_4 . $\square$

Problema 14. Rappresentare i restanti elementi m_3 ed m_4 , di M sugli elementi di C_4 , in modo tale che M sia rappresentato su C_4 , isomorficamente.

Ci si potrebbe chiedere perché le rappresentazioni definite nella tabella 13.3 formano un gruppo isomorfo a quello iniziale. Quanto segue è un breve cenno delle idee su cui ci si fonda. Le quattro rappresentazioni m_j ($j = 1, 2, 3, 4$) possono scriversi

$$m_j = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_j g_1 & g_j g_2 & g_j g_3 & g_j g_4 \end{pmatrix}$$

cioè m_j , è la rappresentazione

$$g_i \rightarrow g_j g_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

La rappresentazione $m_j m_k$ è la m_j seguita dalla m_k , quindi $m_j m_k$ è la rappresentazione

$$g_i \rightarrow g_j g_i \quad \text{seguito da} \quad g_i \rightarrow g_k g_j$$

Perciò $m_j m_k$ è la rappresentazione

$$g_i \rightarrow g_j (g_k g_i) = (g_j g_k) g_i$$

Vi è quindi una corrispondenza biunivoca tra i prodotti $m_j m_k$ del gruppo delle permutazioni e i prodotti $g_j g_k$ del gruppo C_4 .

Cercheremo ora una rappresentazione del tetragruppo D_2 come gruppo di permutazioni.

Gli elementi del gruppo di permutazioni N , sono scritti in forma di doppia riga tra parentesi.

Espressi mediante cicli sono: $m_1 = (1)(2)(3)(4) = I$ $m_2 = (1\ 2)(3\ 4)$

$m_3 = (1\ 3)(2\ 4)$ $m_4 = (1\ 4)(2\ 3)$

	I	a	b	ab	
	g_1	g_2	g_3	g_4	
I	I	a	b	ab	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = m_1$
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	
a	a	b	ab	I	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = m_2$
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1	
b	b	ab	I	a	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = m_3$
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2	
ab	ab	I	a	b	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = m_4$
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3	

 Tabella 13.4: Tavola di moltiplicazione di D_2

Problema 15. a) Per il gruppo M , verificare che $m_1^2 = m_3^2 = (m_2 m_3) = I$

b) Scrivere, in forma di doppia riga tra parentesi la rappresentazione isomorfa del gruppo di permutazioni M sul tetragruppo di elementi I, a, b, ab per cui è: $a^2 = b^2 = (ab)^2 = I$

Come nel caso dell'esempio precedente per C_4 la rappresentazione del tetragruppo mediante permutazioni suggerisce un'interpretazione concreta basata sul riordinamento di quattro oggetti. Questa volta sono i quattro vertici di un tetraedro regolare; si veda la Figura 13.11. La permutazione m_1 , che è l'identità, lascia i vertici nelle loro posizioni originarie. Per eseguire

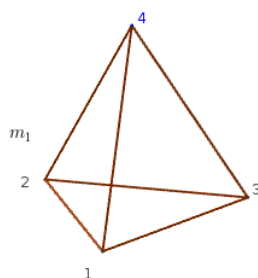


Figura 13.11: Il tetraedro

la permutazione $m_2 = (1\ 2)(3\ 4)$ scambiamo i vertici 1 e 2 e i vertici 3 e 4; si veda la figura 10.4. Il tetraedro regolare può portarsi dalla posizione iniziale alla posizione risultante dalla m_2 , mediante una rotazione di 180° intorno all'asse AB indicato nella Figura 13.12. L'asse AB passa per i punti medi dei due spigoli "opposti" $1 - 2$ e $3 - 4$. Chiameremo AB una mediana del tetraedro. Analogamente, m_3 ed m_4 possono essere interpretate come rotazione di 180° attorno alle mediane CD , EF rispettivamente

Quindi, il tetragruppo Può essere raffigurato come un particolare insieme di movimenti che portano il tetraedro regolare a coincidere con se stesso: le rotazioni di 180° intorno alle mediane. Si può mostrare che le tre mediane di un tetraedro regolare si incontrano in un punto ad esse comune e sono perpendicolari tra loro: quindi si può considerare il tetragruppo come un insieme di rotazioni in se stesso di un insieme di assi mutuamente perpendicolari (per questo è chiamato gruppo trirettangolo). Successivamente, esamineremo, la totalità dei movimenti di congruenza

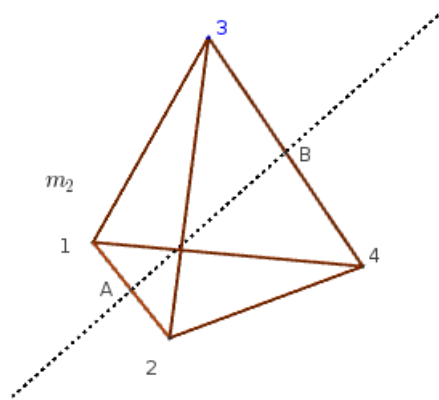


Figura 13.12: Il tetraedro rotazione con asse spigolo spigolo

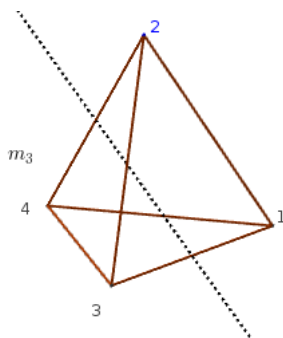


Figura 13.13: Il tetraedro rotazione con asse spigolo spigolo

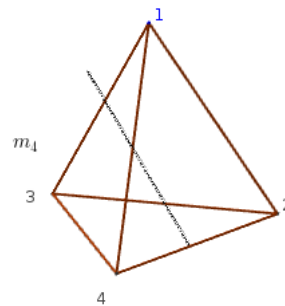


Figura 13.14: Il tetraedro rotazione con asse vertice faccia

di un tetraedro regolare - il gruppo tetraedrico - e vedremo che il tetragruppo costituisce un sottogruppo del gruppo tetraedrico.

Problema 16. a) Costruire un gruppo di permutazioni di sei simboli isomorfo al gruppo diedrico D_3 , di ordine 6.

b) Rappresentare ciascun elemento di questo gruppo di permutazioni mediante cicli.

Problema 17. Dati sei elementi $I, a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2), c = (1\ 2), d = (1\ 3), e = (2\ 3)$, mostrare che costituiscono il gruppo diedrico D_3 , di ordine 6. (Osservazione: Gli elementi del gruppo sono qui espressi mediante permutazioni su tre cifre, mentre nell'esercizio precedente erano espressi mediante permutazioni su sei cifre).

13.7.3 Il gruppo tetraedrico

Un importante e interessante insieme di gruppi è associato ai movimenti di congruenza dei cinque poliedri regolari.

Questi cinque poliedri sono il tetraedro il cubo (o esaedro) l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Segue, una breve discussione del gruppo del tetraedro. Va tenuto presente che l'operazione binaria di gruppo è la successione, "seguito da", come in tutti i gruppi di movimenti.

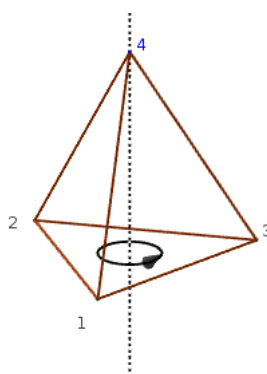
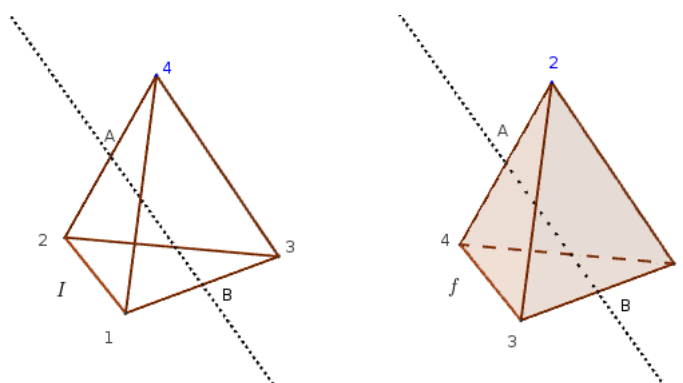


Figura 13.15: Il tetraedro: analisi delle rotazioni

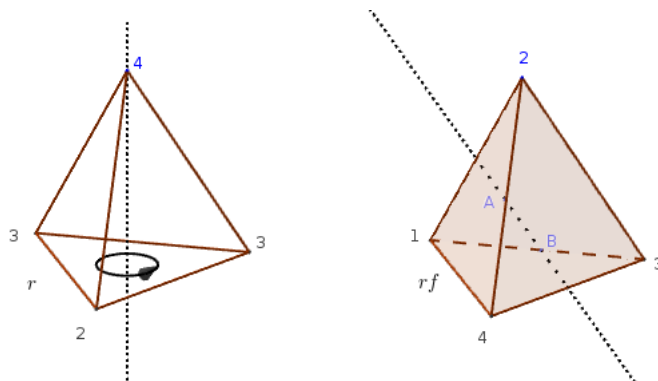
Cominciamo con la nostra discussione sul gruppo di movimenti di congruenza di un tetraedro regolare contando gli elementi distinti del gruppo e poi isolando certi movimenti fondamentali che generano l'intero gruppo. Il nostro procedimento sarà un'estensione di quello precedentemente usato nello studio dei movimenti di congruenza di un triangolo equilatero.

Scegliamo come asse di rotazione l'altezza del tetraedro tracciata dal vertice 4 al triangolo di vertici 1, 2, 3 e gli diamo la direzione indicata nella Figura 13.15. Supponiamo che la punta della freccia dell'asse sia la punta filettata di una vite destrogira e indichiamo con r la rotazione di 120° nella direzione di avvitamento della vite. Se ruotiamo il tetraedro attorno a questo asse, il vertice 4 rimane fisso e possiamo ottenere le tre posizioni distinte indicate con I, r, r^2 , nella figura. Per giungere alle altre posizioni in cui il tetraedro coincide con se stesso abbiamo bisogno di movimenti che sostituiscano il vertice 4 con gli altri tre vertici. Poiché con ciascuno dei quattro vertici messo all'apice vi sono tre posizioni del tetraedro, in tutto vi sono dodici distinti movimenti di congruenza di un tetraedro regolare. Il gruppo tetraedrico è di ordine 12.

Un movimento di congruenza che sostituisca un vertice all'apice con un altro vertice è una rotazione di 180° intorno alla mediana del tetraedro. Indichiamo con f il ribaltamento (o rotazione di 180°) attorno alla mediana AB : con questo movimento arriviamo alla nuova posizione mostrata nella Figura 13.16. (Si noti che f scambia le coppie di vertici 2, 4 e 1, 3). La posizione che risulta quando il movimento r è seguito da f è mostrata nella Figura 13.17, la Figura 13.18


 Figura 13.16: $ff = I$

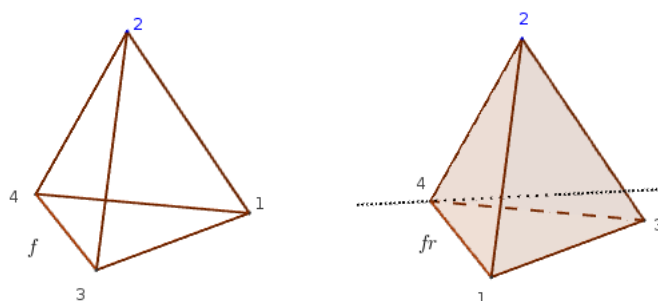
mostra f seguito da r . È bene verificare che tutti i dodici movimenti di congruenza del tetraedro possono ottenersi combinando delle r e delle f , cioè, r ed f generano il gruppo tetraedrico. Si noti, in particolare, che le posizioni risultanti da ribaltamenti attorno a ciascuna delle mediane possono esprimersi con parole in r ed f . Ma abbiamo già visto che questi movimenti costituiscono un'interpretazione concreta del tetragruppo. Quindi il tetragruppo è un sottogruppo del gruppo tetraedrico. Gli elementi generatori r ed f espressi come rappresentazioni dell'insieme


 Figura 13.17: Rotazione rf

dei quattro vertici su se stesso sono:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che sia r che f sono prodotti di due cicli con due simboli in ciascun ciclo.


 Figura 13.18: Rotazione fr

13.7.4 Relazioni di definizione del gruppo tetraedrico A_4

In precedenza abbiamo presentato una dettagliata discussione sulle relazioni di definizione del gruppo diedrico D_3 . Argomenti analoghi possono venire usati per dimostrare che il gruppo A_4 è completamente determinato dai seguenti dati:

- 1) A_4 è generato da due dei suoi elementi, detti r ed f ;

- 2) questi elementi generatori soddisfano le tre relazioni di definizione del gruppo $r^2 = I$ $f^2 = I$
 $rf r f r f = I$ (ossia $(rf)^3 = I$)

Capitolo 14

*Trasformazioni lineari

14.1 Rappresentare nel piano un oggetto



Figura 14.1: René Magritte, olio 1928–1929. Los Angeles County Museum of Art

In figura 14.1, in realtà è la rappresentazione di una pipa: si tratta di una “trasformazione” di un oggetto in un altro⁽¹⁾.

In questo capitolo vogliamo studiare le “trasformazioni geometriche” che portano un oggetto tridimensionale in un oggetto bidimensionale.

Iniziamo con la lettura di “Geometria descrittiva” di Annibale Comessatti:

14.2 Scopi della Geometria descrittiva

La Geometria descrittiva insegna a rappresentare le figure dello spazio mediante immagini piane, ed a servirsi di queste per ricondurre al piano i problemi di geometria spaziale, rendendone così possibile la risoluzione grafica.

¹Interessanti considerazioni su questo tema si trovano in D'Amore 2015

Le immagini che la geometria descrittiva insegna a costruire, possono essere, per dir così, fine a sé stesse, in rispondenza a scopi di carattere estetico (prospettive, ombre, ecc.); ma, ai fini più propri della disciplina e delle sue applicazioni tecniche, occorre per lo più considerarle quali strumenti per lo studio delle figure spaziali e per la risoluzione grafica dei problemi relativi.

In un sistema che soddisfi completamente a tali esigenze, l'insieme dei legami tra la figura obbiettivo dello spazio e la sua immagine o rappresentazione piana, dev'essere tale da consentire la piena sostituibilità tra le due figure, cioè da permettere di dedurle scambievolmente l'una dall'altra. Ogni insieme di convenzioni costruttive che possieda i requisiti predetti dicesi un metodo di rappresentazione.

Accanto ai metodi di rappresentazione, la geometria descrittiva considera anche talune categorie di procedimenti rappresentativi, che, pur non soddisfacendo in pieno alle condizioni caratteristiche dei metodi, rispondono a specifiche ed importanti esigenze della tecnica e dell'arte. A ciascuno di essi s'intitola uno speciale capitolo di quella che può dirsi la parte applicativa della disciplina, della quale i metodi di rappresentazione costituiscono la base teorica e l'algoritmo coordinativo.

Il problema di rappresentare, secondo determinate esigenze, le figure spaziali mediante immagini piane, ha origini antichissime che si confondono con quelle della pittura e dell'architettura. L'uso di pianta ed alzato per le rappresentazioni di edifici o di loro parti era probabilmente invalso già presso gli Egiziani ed i Greci; e per quanto riguarda i Romani, ne abbiamo notizia esplicita da un passo di Vitruvio (contemporaneo di Cesare ed Augusto) redatto con una terminologia tuttora in uso ai nostri giorni. Sembra che agli antichi fossero note anche talune regole prospettiche, per quanto frammentarie, mentre tra i procedimenti rappresentativi da essi posseduti va ricordata la proiezione stereografica della sfera, la cui invenzione è attribuita ad Ipparco di Nicea, astronomo del -II secolo.

Dopo la stasi medievale, nel fecondo risveglio del Rinascimento, s'inizia in Italia, per opera d'artisti insigni, la trattazione razionale della prospettiva, che, proseguita nei secoli XVII e XVIII da studiosi d'ogni paese, raggiunge alla fine del '700 una notevole perfezione teorica; mentre va diffondendosi l'impiego della doppia proiezione ortogonale, perfezionato da A. Dürer (1471-1528) e da studiosi ed architetti francesi dei secoli XVII, XVIII segnatamente per le sue applicazioni alla Stereotomia, e nasce, per opera degli ingegneri militari francesi, il metodo delle proiezioni quotate.

Alla fine del secolo XVIII si trovano così in corso di evoluzione alcuni tra i più importanti procedimenti della disciplina; però la loro organizzazione è in parte frammentaria e vincolata a particolari applicazioni tecniche, in difetto di vedute sistematiche e coordinatrici. Spetta a Gaspard Monge (1746-1818) il merito di avere per primo additato in vaste ed organiche proporzioni la vera funzione di un metodo rappresentativo; a lui si deve il primo trattato, e lo stesso nome di geometria descrittiva, con lui questa assume veste e dignità di disciplina scientifica.

L'opera di Monge ebbe una rapida diffusione in Europa, e, nel fervore di progresso del secolo XIX, diede impulso a ricerche, che, raccolte in opere e trattati, contribuirono al perfezionamento della geometria descrittiva, col risultato di fondere e cementare in un unico corpo di dottrina i vari procedimenti rappresentativi dianzi sviluppatisi separatamente e disorganicamente. Durante questo periodo, e principalmente per opera di J. V. Poncelet (1788-1867) J. Steiner (1796-1863), M. Chasles (1793-1880) A. F. Möbius (1790-1868) G. K. Ch. v Staudt (1798-1867) L. Cremona (1830-1903), Th. Reye (1838-1919), la geometria proiettiva si stacca dal tronco comune costituendosi in disciplina autonoma; ma i concetti ed i procedimenti di tal disciplina contribuiscono po-

derosamente all'assestamento della nostra, che, attraverso la concezione fusionista di W. Fiedler, (1832-1912), ne attinge sempre maggiore unità di vedute e di metodi.

14.3 Principi generali

In linea teorica le convenzioni che caratterizzano un metodo rappresentativo, cioè determinano i legami tra figura obbiettiva e la sua rappresentazione, possono essere fissate a piacere, compatibilmente con la condizione caratteristica di sostenibilità, e quindi consentono una illimitata libertà di movimenti; ma ad evitare complicazioni poco vantaggiose dal punto di vista tecnico ed infeconde da quello teorico, il requisito della massima semplicità ed evidenza si impone sopra ogni altro. In omaggio a tale esigenza, e in armonia con il naturale processo visivo, l'operazione fondamentale della geometria descrittiva. è quella di proiezione.

Con tal nome si designa un procedimento costruttivo ben noto:

- A) Per proiezione di un punto P da un centro di proiezione O sopra un piano di proiezione ω , si intende il punto P' , intersezione, o traccia della retta OP (retta o raggio proiettante) sul piano ω . Quando questo coincide col piano del disegno dicesi anche quadro.

La proiezione si dice centrale o parallela secondo che il centro O è proprio od improprio⁽²⁾; la proiezione parallela può, a sua volta, essere obliqua od ortogonale, a seconda che lo sia, rispetto al quadro, la direzione dei raggi proiettanti (del centro O_∞).

Proiezione di una figura è l'insieme delle proiezioni dei suoi punti. In particolare la proiezione di una retta a (non passante per O) è una retta a' , luogo delle proiezioni di tutti i punti di a (incluso il punto improprio). Vedi figura 14.2.

In proiezione centrale:

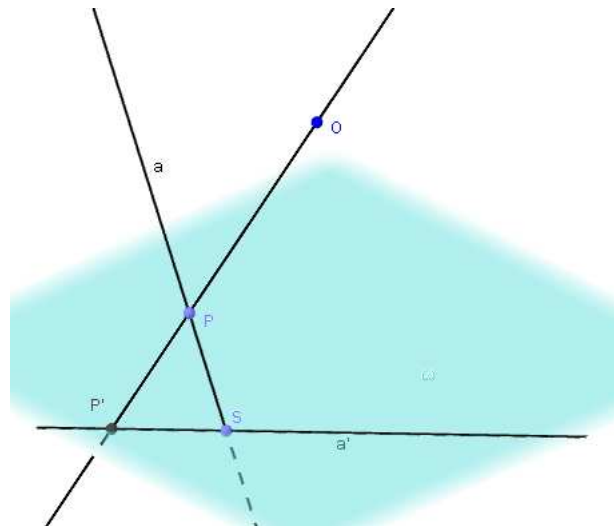
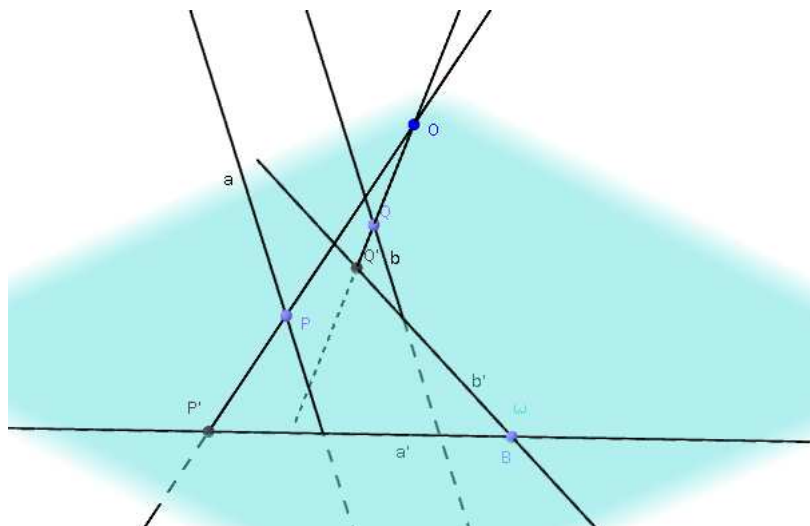


Figura 14.2: Proiezione centrale (centro O) di una retta a su di un piano ω

²ricordo che un punto improprio è una "direzione del piano"

- a) Se la proiezione di un punto proprio R è impropria allora R giace nel piano π passante per il centro O e parallelo al piano di proiezione ω . Al piano π si dà il nome di piano (parallelo) anteriore (Verschwindungsebene).
- b) La proiezione d'un punto improprio Q_∞ non appartenente al quadro ω è un punto proprio B quindi due rette a, b parallele (tra di loro e non al quadro) hanno le proiezioni concorrenti nel punto (proprio) B che è proiezione del loro comune punto improprio Q_∞ . Il punto Q' dicesi punto di fuga di ciascuna delle a, b , o meglio della loro direzione comune. Vedi figura 14.2.


 Figura 14.3: Proiezione centrale (centro O) di una retta a su di un piano ω

- c) Due rette c, d incidenti hanno le proiezioni parallele, allora la loro intersezione R appartiene al piano anteriore.

Invece in proiezione parallela (in particolare ortogonale) le proiezioni di tutti i punti propri sono proprie, rette parallele hanno le proiezioni parallele, segmenti equipollenti (cioè eguali, paralleli, e concordemente orientati) hanno proiezioni equipollenti. Ricorderemo queste due ultime proprietà (d'altronde non indipendenti) col nome di principio delle proiezioni parallele.

L'operazione di proiezione pone tra una retta a non passante per il centro O e la sua immagine a' una corrispondenza proiettiva che, a motivo della sua particolare generazione, si dice prospettività di centro O . Quindi il birapporto⁽³⁾ di quattro punti d'una retta

3

Definizione 56 (Rapporto semplice). Dati tre punti allineati A, B, C il loro rapporto semplice, denotato con (A, B, C) , è quel numero reale che esprime il rapporto, con segno, della lunghezza del segmento AC rispetto al segmento BC : $(A, B, C) = \frac{AC}{BC}$

Il segno è da intendersi positivo se i vettori rappresentati dai segmenti AC e BC sono orientati nella stessa direzione, negativo in caso contrario.

Definizione 57 (Birapporto). Dati quattro punti allineati A, B, C, D il loro birapporto, denotato con (A, B, C, D) , è quel numero reale che esprime il rapporto, con segno, del rapporto semplice (A, B, C) rispetto al rapporto semplice (A, B, D) : $(A, B, C, D) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, D)}$

è eguale a quello delle loro proiezioni; in particolare la proiezione di un gruppo armonico, è ancora un gruppo armonico.

Se la proiezione è parallela la corrispondenza proiettiva predetta è una similitudine ed allora è invariante anche il rapporto semplice di tre punti; ne discende che, per una data retta a , è costante il rapporto fra la misura (positiva) d'un segmento obbiettivo preso su a e quella, pure positiva, della sua proiezione. Quando questa è ortogonale quel rapporto eguaglia il coseno dell'angolo (acuto) che la a forma col piano di proiezione.

Un piano α non passante per O non ha proiezione propriamente detta, perché le immagini dei suoi punti invadono tutto il piano di proiezione ω . I due piani α , ω sono prospettivi dal centro O , onde la relazione tra i punti di α e le loro proiezioni, è una corrispondenza omografica⁽⁴⁾, in particolare, se la proiezione è parallela, un'affinità. In questo caso il

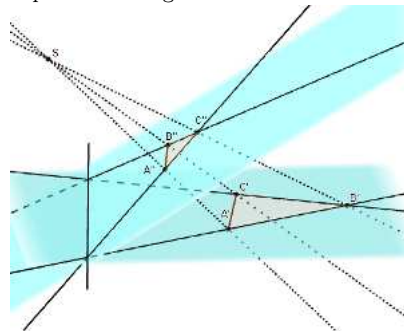
Definizione 58 (Quaterna armonica). Una quaterna armonica è una quaterna di punti allineati A, B, C, D per cui vale: $(A, B, C, D) = -1$.

⁴Due piani sono proiettivi quando possono essere dedotti l'uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni di proiezione e sezione.

La corrispondenza biunivoca che lega due piani proiettivi è detta anche **omografia**.

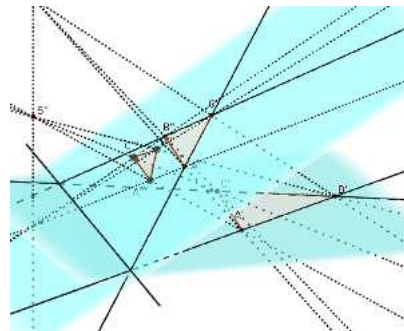
Un'omografia non identica tra due piani sovrapposti ma non coincidenti è detta **omologia** piana quando esiste una retta di punti uniti ed un fascio di rette unite.

Proiettività da un centro di proiezione S Dati due piani α' e α'' , non paralleli tra loro, un centro di proiezione S non appartenente ai due piani e una figura $A'B'C'$ di α' costruiamo la figura $A''B''C''$ di α'' .



Sia u la retta d'intersezione tra α' e α'' , u viene chiamata **asse della proiettività** (i due piani sono legati tra loro mediante una proiettività, chiamata **omografia** o **collineazione**).

Proiettività nello spazio tra due piani coincidenti, da due centri di proiezione distinti Dati due piani distinti, ma coincidenti, α'' e α''' , un piano α' non parallelo ai piani dati, due centri di proiezione S' ed S'' , distinti dai tre piani dati e una figura $A'B'C'$ in α' , si effettua la proiezione da S' e da S'' della figura $A'B'C'$ sul piano α'' o α''' .



Ad ogni punto su α'' , tramite S' corrisponde un punto del piano α' , così come ciascun punto di α' può essere messo in corrispondenza biunivoca, tramite il centro di proiezione S'' con i punti α''' . Questa corrispondenza biunivoca tra α'' o α''' tramite α' si chiama doppia proiettività o omologia. Essa ha per centro dell'omologia U ,

rapporto tra la misura (positiva) di un'area del piano α e quella della sua proiezione è costante, e, quando la proiezione è ortogonale, eguaglia il coseno dell'angolo (acuto) che il piano α forma col piano di proiezione.

- B) Una figura F dello spazio non è individuata da una sua proiezione F' (da O su ω) perché ogni punto P di F resta indeterminato sul raggio (proiettante) OP' ; e pertanto alla condizione caratteristica dei metodi rappresentativi non può soddisfarsi con una sola proiezione.

Invece in generale una figura F dello spazio è individuata dalla conoscenza di due sue proiezioni fatte da centri distinti su due piani distinti o no, con la condizione essenziale che la posizione degli elementi di riferimento (centri e piani di proiezione) sia nota. In assenza d'altri sistemi di riferimento a cui convenga od occorra collegare le figure, si tratta naturalmente di posizione relativa (orientazione interna del sistema).

È utile in proposito, prestare attenzione al fatto che le due proiezioni della figura F son da ritenersi conosciute solo quando è nota, o desumibile da elementi noti, la legge di corrispondenza che permette di rintracciare le due proiezioni d'ogni punto della figura stessa.

Ha speciale interesse il caso in cui le due proiezioni son fatte da due centri distinti O, S , sopra uno stesso quadro ω (proiezione bicentrale) e la figura che si proietta è un altro piano α . Allora la corrispondenza che intercede fra le due proiezioni A', A'' di uno stesso punto A di α , è un'omologia (vedi nota 4) avente per asse l'intersezione t dei due piani α, ω (traccia di α su ω) e per centro il punto T intersezione di ω con la congiungente i centri O, S .

- C) Un'applicazione importante della proprietà enunciata riguarda la relazione tra proiezioni e ribaltamenti.

Premettiamo che per ribaltamento di un piano α su di un altro piano ω , s'intende l'operazione che consiste nel far ruotare α , in un verso fissato, intorno alla retta t (intersezione di α e ω), che supponiamo propria, fino ad adagiarlo su ω . Il diedro completo generato dalla rotazione di α dicesi diedro di ribaltamento; la posizione finale assunta da un punto A di α a ribaltamento eseguito (ribaltamento di A) s'indica comunemente con (A) .

L'operazione di ribaltamento è pure fondamentale per la geometria descrittiva, e viene impiegata per riportare al piano del disegno le costruzioni da eseguirsi su altri piani.

Alla relazione tra proiezioni e ribaltamenti è applicabile la conclusione precedente relativa alle proiezioni bicentrali, in quanto il ribaltamento del piano α sul piano ω equivale ad una proiezione parallela avente per centro il punto improprio S_∞ della direzione ortogonale al piano bisettore del diedro di ribaltamento.

Ne consegue che tra le proiezioni (da un centro O) ed i ribaltamenti dei punti (o più in generale delle figure) d'un piano α su di un piano ω intercede un'omologia avente per asse la traccia t di α e per centro la proiezione T di O effettuata in direzione ortogonale al piano bisettore del diedro di ribaltamento.

Il punto T risulta improprio se lo è O (e solo in tal caso), dunque quando la proiezione è parallela l'omologia tra proiezioni e ribaltamenti è affine; in particolare ortogonale quando lo è anche la proiezione.

intersezione della retta $S'S''$ con i due piani coincidenti, e per asse dell'omologia, l'intersezione di α' con α'' o α''' .

14.4 Assonometria

Col nome di Assonometria si suol designare l'insieme delle proposizioni che si riferiscono al seguente problema:

Problema 18. Dati gli elementi numerici od analitici (coordinate, equazioni) mediante cui, con riferimento ad una terna cartesiana ortogonale $O(x, y, z)$, può determinarsi una figura F dello spazio, costruirne la proiezione, centrale o parallela, sopra un piano π .

Dedicheremo la parte principale di quest'esposizione all'Assonometria propriamente detta o parallela, la quale distinguesi in obliqua ed ortogonale, in base alla direzione l dei raggi proiettanti, considerata in relazione al quadro π .

Elementi essenziali di riferimento sono le proiezioni x', y', z' degli assi obbiettivi x, y, z sul quadro. Sono tre rette orientate concorrenti in un punto O' (proiezione di O) alle quali si dà il nome di assi assonometrici.

Accanto ad una figura F , conviene, per gli scopi rappresentativi, considerare le sue proiezioni (ortogonali) F_1, F_2, F_3 sui piani coordinati xy, yz, zx . Proiettando secondo la direzione l sul quadro, se ne deducono quattro figure F', F'_1, F'_2, F'_3 delle quali la prima dicesi prospettiva assonometrica o proiezione vera della F le altre, proiezioni assonometriche, relative, ordinatamente, agli assi z, x, y . Supposto, come generalmente nella pratica, l'asse z verticale, e quindi il piano xy orizzontale, alla F'_1 si dà anche il nome di pianta assonometrica.

Generalmente le figure F'_i hanno solo funzione intermediaria nella considerazione dei rapporti tra la F e la F' ; il loro intervento diviene sistematico solo quando si vuol considerare l'assonometria come vero e proprio metodo di rappresentazione.

Nelle applicazioni pratiche questo non è generalmente il caso, bastando agli scopi la considerazione delle sole prospettive assonometriche, giacché pregio principale di tali prospettive è quello di accomunare al valore espressivo anche un vero e proprio significato rappresentativo. Ciò non contraddice quanto detto in precedenza, in quanto la possibilità di ricostruire la F partendo dalla F' è subordinata a particolarità favorevoli di posizione e di forma che effettivamente sono verificate nei più interessanti casi pratici, ma non in generale.

Al raggiungimento degli indicati pregi rappresentativi si giunge attraverso la considerazione delle scale assonometriche, che sono le proiezioni, sugli assi assonometrici, di tre scale costruite sugli assi obbiettivi, con lo zero in O , e con la stessa unità obbiettivo u . Le unità u_x, u_y, u_z delle tre scale assonometriche, diconsi unità assonometriche o ridotte; i loro rapporti con la u (rapporti di riduzione) s'indicano comunemente con λ, μ, ν , mentre con l, m, n si designano tre segmenti o tre numeri (coefficienti d'assonometria) proporzionali ad u_x, u_y, u_z . Devesi osservare che, se l'assonometria è obliqua, λ, μ, ν possono essere maggiori dell'unità, mentre son certo minori di 1 se l'assonometria è ortogonale ed allora prendono il nome di rapporti d'accorciamento.

Segnate sugli assi x', y', z' le scale assonometriche, si costruisce assai facilmente la prospettiva assonometrica P' d'un punto P di cui si conoscono le coordinate x_0, y_0, z_0 rispetto agli assi obbiettivi. Basta invero segnare sugli assi assonometrici i punti P'_x, P'_y, P'_z (prospettive delle proiezioni ortogonali di P sugli assi obbiettivi) che, nelle rispettive scale, hanno le quote x_0, y_0, z_0 indi procedere come nella figura 14.4. La costruzione da quella indicata, è nota sotto il nome di costruzione fondamentale dell'assonometria.

Il fondamento della medesima risiede essenzialmente nel principio delle proiezioni parallele in base al quale il rapporto di riduzione $\frac{s'}{s}$ relativo ad un segmento obbiettivo s , dipende solo dalla

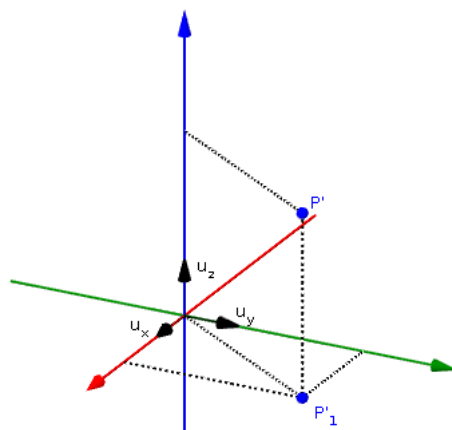


Figura 14.4: Costruzione assonometria

direzione di s . Tale rapporto è noto per le direzioni parallele agli assi, ma può determinarsi facilmente per tutte le direzioni parallele ai piani coordinati, notando che la prospettiva assonometrica d'un circolo di centro O e raggio u , giacente su un piano coordinato, per esempio xy , è un'ellisse avente per semidiametri coniugati i segmenti unitari $(0, 1)$ degli assi assonometrici (x', y') (ellisse isometrica).

Pertanto dalla prospettiva assonometrica F' d'una figura F possono desumersi le misure delle coordinate di quei punti che stanno nei piani coordinati, e di quei segmenti che sono paralleli ai piani coordinati. Quindi se F è individuata dalla conoscenza di quei punti e di quei segmenti, com'è il caso frequentemente offerto nella tecnica da oggetti che presentano facce parallele a tre piani ortogonali, o vertici e spigoli giacenti in piani (di simmetria) siffatti (elementi architettonici, conci di pietrame, connessioni di legnami, cristalli, ecc.), la sua prospettiva F' riesce a soddisfare in pieno alle condizioni rappresentative.

Nei riguardi dei vantaggi espressivi, conviene rilevare, che, per figure del tipo predetto, la rappresentazione mongiana, ad esempio rispetto ai piani $\pi_1 = xy$, $\pi_2 = yz$, dalla quale spesso si parte, fornisce in genere immagini poco espressive, rendendo evanescenti le proiezioni di segmenti perpendicolari ai piani fondamentali, ed introducendo altri inconvenienti facilmente segnalabili, che la prospettiva assonometrica su quadro e con direzione opportunamente scelti, elimina facilmente. Appunto per impedire il verificarsi di quegli inconvenienti, nell'assonometria ortogonale si evita di scegliere il quadro parallelo a qualcuno dei piani o assi coordinati, mentre ciò è consentito. anzi è di uso corrente, nell'assonometria obliqua.

Per quanto la prospettiva parallela non interpreti rigorosamente il fenomeno della visione, pure le immagini da essa fornite hanno sufficiente espressione prospettica, senza segnalare all'occhio anomalie sgradevoli, se la disposizione dell'oggetto rispetto agli assi è stata opportunamente studiata.

Come risulta da quanto precede, un determinato tipo di assonometria, o, come suol dirsi un sistema assonometrico, è determinato quando lo sono le posizioni degli assi assonometrici, e le unità ridotte corrispondenti ad un'assegnata unità obbiettiva u . Sorge quindi spontanea la domanda: quali sono, in tale argomento, i casi possibili, o in altre parole, quali vincoli necessari sussistono fra gli elementi predetti, o tra essi ed i corrispondenti elementi obbiettivi?

In una formulazione precisa del problema conviene fissare come elementi caratteristici d'un sistema assonometrico tre rette orientate x', y', z' (assi assonometrici) uscenti da uno stesso punto O' , e tre segmenti l, m, n da considerarsi come unità ridotte relative ad un'unità obbiettiva k incognita, cioè insomma, se l'unità u è data, proporzionali alle unità assonometriche u_x, u_y, u_z ; (*per guisa*) in modo che il complesso degli elementi caratteristici resterà individuato dai tre segmenti $O'A' = l, O'B' = m, O'C' = n$ dei semiassi positivi x', y', z' , vale a dire dai quattro punti O', A', B', C' . Con tali notazioni e convenzioni, la soluzione della questione proposta, qual è fornita da un celebre teorema di K. Pohlke (1810-1876), può così enunciarsi:

Gli elementi caratteristici d'un sistema assonometrico, possono essere dati ad arbitrio, o in altre parole, tre segmenti arbitrari $O'A', O'B', O'C'$ d'un piano si possono sempre considerare come proiezioni parallele di tre segmenti eguali OA, OB, OC presi sopra tre assi ortogonali.

L'unica restrizione necessaria alla validità del teorema, è che i quattro punti O', A', B', C' non siano allineati senza che ne resti esclusa la coincidenza di due tra quei punti. La direzione dei raggi proiettanti, che generalmente risulta obliqua, resta individuata dai dati a meno di una simmetria rispetto al quadro, mentre, per ciascuna delle due direzioni, il triedro obbiettivo è determinato a meno d'una traslazione secondo la direzione stessa, com'è d'altronde implicito nella posizione del problema.

Nel caso dell'assonometria ortogonale gli elementi caratteristici considerati non sono più tutti arbitrari. A conclusioni più espressive e complete, di fondamentale importanza per l'assonometria ortogonale, guida la considerazione dei rapporti che intercedono tra gli elementi considerati ed i seguenti:

- 1) Le tracce assonometriche X, Y, Z , cioè le intersezioni degli assi obbiettivi col quadro, ed il relativo triangolo (triangolo delle tracce);
- 2) Gli angoli (acuti) α, β, γ che gli assi x, y, z formano con il quadro, cioè con le loro proiezioni;
- 3) Gli angoli (convessi) ξ, η, ζ che le proiezioni $O'X, O'Y, O'Z$ dei semiassi incidenti (al quadro) formano tra di loro a due a due ($\xi = y'z'$, ecc.).

Le principali conclusioni al riguardo sono le seguenti:

Il triangolo delle tracce è acutangolo, ha per altezze gli assi assonometrici, e quindi per ortocentro il punto O' ; la distanza principale $O'O$ è media proporzionale tra i segmenti in cui ciascuna altezza è divisa dal punto O' . Viceversa un arbitrario triangolo acutangolo XYZ si può sempre considerare come triangolo delle tracce d'un triedro trirettangolo che resta determinato a meno d'una simmetria rispetto al quadro.

Gli angoli ξ, η, ζ sono ottusi, e legati dalla evidente relazione $\xi + \eta + \zeta = 2\pi$. Dati gli assi assonometrici, con la condizione che ciascuno di essi attraversi l'angolo ottuso formato dagli altri due, il triangolo delle tracce è determinato a meno di una omotetia di centro O' , e la terna obbiettiva a meno di una simmetria ortogonale rispetto al quadro e di una traslazione nella direzione dei raggi proiettanti.

Gli angoli α, β, γ soddisfano alla relazione fondamentale

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 \quad (14.1)$$

dalla quale si ricava $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$, quindi che $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, ecc. Pertanto la somma di due fra gli angoli α, β, γ è ancora un angolo acuto.

Si hanno poi le relazioni notevoli

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{u_x}{u} = \frac{l}{k} = \cos \alpha \\ \mu &= \frac{u_y}{u} = \frac{m}{k} = \cos \beta \\ \nu &= \frac{u_z}{u} = \frac{n}{k} = \cos \gamma\end{aligned}\quad (14.2)$$

$$\begin{aligned}u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 &= 2u^2 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 2k^2\end{aligned}\quad (14.3)$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \mu^2 &> \nu^2 \\ u_x^2 + u_y^2 &> u_z^2 \\ l^2 + m^2 &> n^2\end{aligned}\quad (14.4)$$

$$\begin{aligned}\cos \xi &= \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{\frac{-\cos \eta \cos \zeta}{\cos \xi}}\end{aligned}\quad (14.5)$$

con altre che ne conseguono facilmente.

È chiaro che, nel caso attuale, quali elementi caratteristici del sistema possono assumersi quelli delle due terne (ξ, η, ζ) (l, m, n) ; ma ora essi non sono più indipendenti, dato che, come mostrano le precedenti formule, ciascuna delle due terne determina l'altra, e tutto il gruppo delle rimanenti terne (α, β, γ) (λ, μ, ν) (u_x, u_y, u_z) (data che sia la u).

Un sistema assonometrico ortogonale, può quindi esser individuato in due modi:

- a) Mediante gli assi assonometrici x', y', z' o, ciò che è sostanzialmente lo stesso, mediante la terna (ξ, η, ζ) ($\xi + \eta + \zeta = 2\pi$) La determinazione analitica degli altri elementi si trae dalle formule assegnate; quella geometrica è indicata dalla figura 14.5, nella quale si è scelto come triangolo delle tracce uno tra gli ∞^1 triangoli omotetici aventi per altezze x', y', z' .

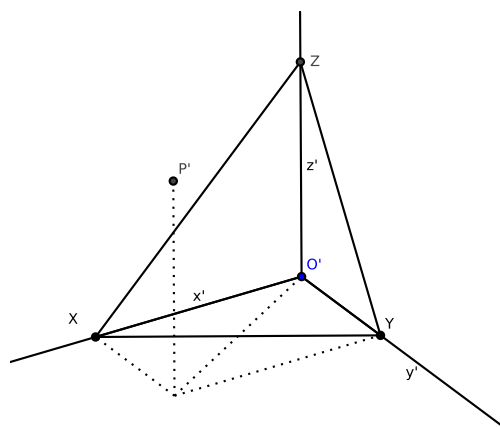


Figura 14.5: Costruzione geometrica dell'assonometria

b) Mediante i coefficienti di assonometria (l, m, n) soddisfacenti alle disuguaglianze 14.4. Ricorrendo alle formule suesposte si possono esprimere in funzione di essi i restanti elementi; se invece (l, m, n) son dati graficamente (con la condizione che ciascuno di essi sia minore dell'ipotenusa del triangolo che ha per cateti gli altri due) allora gli angoli α, β, γ e le unità ridotte si determinano con un opportuna costruzione geometrica. Noti α, β, γ la determinazione degli assi assonometrici (restando arbitrari il punto O e la direzione di un asse) non offre difficoltà, supposti dati β, γ e scelti ad arbitrio O', z' e Z .

Il secondo modo di determinazione è il più usato nella pratica, ed il sistema caratterizzato dai numeri l, m, n , ai quali, perché le unità ridotte siano facilmente paragonabili, conviene dare valori interi piccoli, si denota col simbolo $(l : m : n)$. Tenendo poi conto che se due elementi di una qualunque fra le terne considerate sono eguali, lo stesso accade anche per gli elementi corrispondenti delle altre terne, i sistemi assonometrici ortogonali si distinguono in isometrici, dimetrici (o monodimetrici) e trimetrici (od anisometrici) a seconda che il numero degli elementi distinti da ciascuna terna vale 1, 2, 3.

Nella tabella seguente sono riportati i valori delle costanti per alcuni tra i sistemi più notevoli. Quello, di γ vi è indicato perché la pratica consiglia di sceglierlo piccolo, e possibilmente minore di 20° , onde evitare una sensazione di strapiombamento delle verticali. I sistemi $(1 : 1 : 1)$ $(4 : 3 : 4)$ $(7 : 6 : 8)$ sono quindi poco consigliabili.

Sistemi	ξ	η	ζ	λ	μ	ν	γ
1 : 1 : 1	120°	120°	120°	0.816	0.816	0.816	35°
2 : 1 : 2	131.5°	97°	131.5°	0.943	0.471	0.943	19.5°
9 : 1 : 3	133.5°	93°	133.5°	0.973	0.324	0.073	13.5°
3 : 2 : 3	128.5°	103°	128.5°	0.904	0.603	0.004	25.5°
4 : 3 : 4	127°	106.5°	127°	0.883	0.663	0.883	28°
7 : 6 : 8	115°	107°	138°	0.911	0.695	0.924	22.5°
5 : 4 : 6	108°	101°	151°	0.805	0.644	0.966	15°
9 : 5 : 10	108°	95°	157°	0.887	0.493	0.985	10°

Anche nell'assonometria obliqua, come nell'ortogonale, i sistemi possono distinguersi in isometrici, dimetrici, e trimetrici; però, al contrario di quel che accade nell'assonometria ortogonale i sistemi che più si prestano alle applicazioni pratiche son quelli in cui il quadro è parallelo ad un asse o addirittura ad un piano coordinato.

Se π è parallelo o addirittura coincidente con yz (z verticale) il sistema prende il nome di prospettiva cavaliere; taluni autori però attribuiscono tal nome soltanto al caso (isometrico) in cui la direzione dei raggi proiettanti è inclinata di 45° sul quadro. Quasi tutte le figure dimostrative dei trattati di geometria solida, sono prospettive cavaliere.

Si dà invece il nome di prospettive militari a quei sistemi in cui il quadro coincide od è parallelo al piano xy e principalmente ai casi isometrici. La denominazione fa riferimento a procedimenti anticamente usati per i disegni di fortificazioni, o di altre opere di carattere militare.

Il caso in cui il quadro è parallelo ad un asse (asse z) è stato applicato con altri alle rappresentazioni di cristalli, prima ancora che l'assonometria venisse scientificamente considerata.

14.5 Il programma di Erlangen

Una visione unitaria della geometria in senso globale venne introdotta da Felix Klein (1849-1925) utilizzando il concetto di gruppo. Siamo negli anni 1865-68 e la geometria analitica viveva un periodo di ripresa con i nuovi lavori di Plücker e Cayley. Klein fu assistente di Plücker all'università di Bonn ma le sue ricerche si orientarono in una diversa direzione. Nel 1868 usciva la Nuova geometria di Felix Klein. La nuova concezione di Klein ebbe origine dagli studi sulla teoria dei gruppi che, a partire dalle intuizioni di Lagrange, si era andata organizzando in una nuova branca algebrica e che probabilmente Klein ebbe modo di approfondire nel corso di numerosi viaggi a Parigi. Klein collaborò in alcune sue ricerche col matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899), che era stato suo compagno di studi a Göttingen e il cui nome è rimasto legato alle trasformazioni di contatto da lui scoperte, e ai gruppi continui di sostituzioni sui quali scrisse un ponderoso trattato in tre volumi (1893). Il concetto di gruppo è estremamente generale: i suoi elementi possono ad esempio essere numeri (come nell'aritmetica), o punti (come nella geometria), o trasformazioni (come nell'algebra e nella geometria); la sua operazione può essere aritmetica (come l'addizione e la moltiplicazione) o geometrica (come la rotazione attorno ad un punto o la traslazione) o più generalmente algebrica (la composizione di due applicazioni qualunque). Klein utilizzò le possibilità unificatrici del concetto di gruppo per caratterizzare le diverse geometrie che si erano sviluppate, con metodi e linguaggi differenti, nel corso del secolo. La visione di Klein è illustrata nella prolusione che egli tenne ad Erlangen nel 1872, in occasione della libera docenza, ed è nota come Programma di Erlangen (Erlanger Programme). Una traduzione in italiano venne fatta alla fine del secolo dal matematico italiano Gino Fano (titolo della traduzione italiana: Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti⁽⁵⁾). In esso una geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni. Ad esempio la geometria euclidea del piano è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni ortogonali (traslazioni, rotazioni e simmetrie) del piano in sé. La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per trasformazioni affini (lineari affini a determinante $\neq 0$), tra queste proprietà ad esempio vi è quella di trasformare una conica di un determinato tipo in una conica dello stesso tipo, la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni proiettive, e così via. In questo modo qualsiasi classificazione di trasformazioni in gruppi e sottogruppi diventa una classificazione delle diverse geometrie, consentendo anche di interpretare le geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica, assieme alla geometria euclidea, nell'ambito della geometria proiettiva. L'influenza del programma di Erlangen, dapprima limitata, divenne poi universale, caratterizzando l'impostazione generale di tutti i corsi universitari di geometria. Klein d'altronde svolse ininterrottamente per circa mezzo secolo attività di insegnamento e divulgazione esercitando un forte influsso sugli ambienti pedagogici a vari livelli. Nel 1886 Klein divenne professore all'Università di Göttingen che, così come era stato per l'Ecole Polytechnique all'inizio del secolo ad opera di Monge e Poncelet, era diventata il centro irradiante della geometria moderna, attraverso le ricerche di Gauss, Riemann e Klein. Le ricerche sulla teoria dei gruppi non esauriscono la ricerca matematica di Klein. È rimasta classica la sua storia delle matematiche del secolo XIX pubblicata postuma: *Volesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-27). Il suo nome è pure ricordato in topologia in relazione ad una superficie ad una sola faccia detta 'otre' o 'bottiglia di Klein'.

⁵scaricabile da http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1890_1

14.5.1 Applicazione della teoria dei gruppi alla geometria

Gruppo astratto

(Vedi capitolo 13) Il concetto fondamentale su cui si basa l'impostazione di Klein è quello di gruppo di trasformazioni. Ricordiamo la: Definizione di gruppo: $(A, \cdot)$ A insieme, $\cdot$ operazione $A \times A \rightarrow A : (a, b) \rightarrow a \cdot b$, con le proprietà:

- 1) associativa: $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in A$ ⁶
- 2) con elemento neutro: $\exists e \in A : ae = a \quad \forall a \in A$
- 3) $\forall a \in A \exists x \in A : ax = e$

da queste proprietà segue che:

- 1) $ax = e \Rightarrow xa = e$
- 2) se e è l'elemento unitario: $ea = a \quad \forall a \in A$
- 3) $ax = e$ e $ay = e \Rightarrow x = y$ (l'inverso è unico)
- 4) $ae = a$ e $ae^* = a \quad \forall a \in A \Rightarrow e = e^*$ (l'unità è unica)

Definizione di sottogruppo È un sottoinsieme $B \subset A$ chiuso rispetto alla operazione $\cdot : a, b \in B \Rightarrow ab, a^{-1} \in B$ ($ab^{-1} \in B$)

Gruppo di trasformazioni Siano: M insieme, $M = \{x, y, z, \dots\}$, $f : M \rightarrow M$ biettiva, l'insieme: $G = \{f : M \rightarrow M : f \text{ biettiva}\}$ è un gruppo con l'operazione di composizione:

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x))$$

L'unità del gruppo è l'applicazione identica: $id_M(x) = x \quad \forall x \in M$. L'applicazione inversa è: $f^{-1}(y) = x$ dove $y = f(x)$ risulta allora:

$$f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = id_M$$

G è detto un gruppo di trasformazioni di M .

Geometria di un gruppo dato Siano M un insieme qualunque, G un gruppo di trasformazioni di M . Conveniamo di chiamare M spazio, i suoi elementi punti e un qualunque insieme di punti, figura. Diremo che la figura A è equivalente ($\sim$) alla figura B se esiste una trasformazione di G che manda A su B , cioè:

$$A \sim B \text{ se } \exists \phi \in G \quad (\phi : M \rightarrow M) : \phi(A) = B$$

Poiché G è un gruppo si ha immediatamente che se A è equivalente a B , B è equivalente ad A , e due figure equivalenti ad una terza sono equivalenti tra loro.

Dunque le proprietà di gruppo garantiscono le proprietà fondamentali (riflessività e transitività) delle figure equivalenti. Klein allora chiama geometrica ogni proprietà delle figure dello spazio M e ogni grandezza legata ad una figura che resti invariata per tutte le trasformazioni del gruppo G , vale a dire che sia comune a tutte le figure equivalenti. Il sistema di proposizioni relative alle proprietà delle figure e delle grandezze invarianti per tutte le trasformazioni del gruppo G

⁶l'operatore $\cdot$ come di consueto viene omissso

si chiama la geometria del gruppo G . Vediamo ora alcune applicazioni concrete della teoria dei gruppi secondo Klein. Studieremo essenzialmente solo la geometria del gruppo proiettivo e dei suoi sottogruppi.

Gruppo proiettivo e suoi sottogruppi fondamentali Per semplificare l'espressione algebrica, ci limitiamo al caso bidimensionale. Poiché seguiamo un metodo analitico, i risultati si possono facilmente estendere ad un numero maggiore di dimensioni.

Gruppo proiettivo Consideriamo un piano proiettivo, cioè un insieme di punti ognuno dei quali è definito da una terna di coordinate omogenee (vedi 5.4.3) (x_1, x_2, x_3) . Una applicazione biunivoca del piano in sé che a ciascun punto $M = (x_1, x_2, x_3)$ fa corrispondere il punto $M' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ di coordinate:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases}$$

dove c_{ij} sono costanti reali tali che: $\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

e ρ' è una quantità qualunque non nulla, è una trasformazione proiettiva del piano proiettivo, cioè una applicazione biunivoca del piano in sé che manda punti allineati in punti allineati (trasforma rette in rette). Le applicazioni lineari a determinante non nullo in coordinate omogenee rappresentano tutte e sole le trasformazioni proiettive (analogo risultato sussiste per lo spazio proiettivo). Le proprietà di gruppo delle trasformazioni proiettive sono dimostrabili in base alle definizioni e agli assiomi della geometria proiettiva. Tuttavia la verifica di queste proprietà attraverso la rappresentazione analitica è molto semplice. In termini di matrici, posto:

$$C^1 = (c_{ij}^1), \quad C^2 = (c_{ij}^2), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\rho'_1 X' = C^1 X, \quad \rho'_2 X'' = C^2 X'$$

da cui:

$$\rho' X'' = C X'',$$

dove $C = C^2 C^1$ è il prodotto righe per colonne. Dunque: $|C| = |C^2| |C^1| \neq 0$

Ne segue che l'applicazione composta $f_2 \cdot f_1$ è una trasformazione proiettiva poiché è espressa in coordinate omogenee da una trasformazione lineare a determinante non nullo. Per la trasformazione inversa di $f(M) = M'$, invertendo la trasformazione lineare:

$$\rho' X' = C X \Leftrightarrow \rho X = C^{-1} X' \text{ dove } \rho = \frac{1}{\rho'} \text{ e } |C^{-1}| = \frac{1}{|C|} \neq 0$$

Il gruppo di trasformazioni proiettive è detto gruppo proiettivo.

Osservazione: ogni trasformazione proiettiva è individuata dai coefficienti c_{ij} . Poiché le formule sono omogenee, è sufficiente assegnare 8 rapporti dei coefficienti c_{ij} affinché la trasformazione sia assegnata. Questi 8 rapporti sono detti i parametri del gruppo proiettivo. Il gruppo proiettivo

è dunque un gruppo a 8 parametri perché ogni suo elemento è individuato da 8 parametri indipendenti. Invarianti del gruppo proiettivo La geometria proiettiva è la disciplina che studia le proprietà delle figure e delle grandezze legate alle figure che sono invarianti per ogni trasformazione proiettiva. Possiamo dunque definire la geometria proiettiva come la geometria del gruppo proiettivo.

In geometria proiettiva hanno particolare importanza gli invarianti del gruppo proiettivo.

Si dicono invarianti di n punti, relativamente al gruppo proiettivo, le funzioni scalari

$$F(M_1, M_2, \dots, M_n)$$

che non sono identicamente costanti ma prendono valori uguali sui sistemi di n punti proiettivamente equivalenti, ossia che si trasformano gli uni negli altri per mezzo di trasformazioni del gruppo proiettivo.

Si può osservare che il gruppo proiettivo non ha invarianti per $n \leq 3$ (segue dal fatto che assegnati tre punti M_1, M_2, M_3 , ed altri tre punti M_1^o, M_2^o, M_3^o , esiste sempre una trasformazione proiettiva che fa passare da M_1, M_2, M_3 a M_1^o, M_2^o, M_3^o , dunque sarebbe:

$$F(M_1, M_2, M_3) = F(M_1^o, M_2^o, M_3^o) = c \quad \forall M_1, M_2, M_3$$

Allo stesso modo si può dimostrare che non esistono invarianti di 4 punti non allineati. Sappiamo che il birapporto o rapporto anarmonico di 4 punti allineati:

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

è invariante per trasformazioni proiettive, dunque il birapporto è un invariante di 4 punti per il gruppo proiettivo. Per $n \geq 5$ si può dimostrare che esistono invarianti di n punti, che si possono sempre esprimere in funzione di birapporti di 4 di questi punti. Per questo il rapporto anarmonico è detto l'invariante fondamentale del gruppo proiettivo.

Gruppi di automorfismi Sia G un gruppo di trasformazioni di uno spazio qualunque M . Se le trasformazioni del gruppo G trasformano un insieme U di punti in se stesso (cioè sono applicazioni di U in sé) esse si dicono automorfe rispetto ad U o che sono automorfismi rispetto ad U . Gli automorfismi possono spostare i punti dell'insieme U , purché ciascun punto dell'insieme U venga trasformato in un punto di U . L'insieme delle trasformazioni del gruppo G automorfe rispetto ad U è un gruppo, dunque un sottogruppo di G .

Il fatto è evidente, poiché la composizione di due automorfismi rispetto ad U è ancora un automorfismo rispetto ad U , come pure l'inverso di un automorfismo.

Gruppo affine Scegliamo una retta qualunque del piano proiettivo, chiamiamola retta all'infinito e indichiamola con ∞ .

Gli automorfismi relativamente alla retta all'infinito sono un sottogruppo del gruppo proiettivo, che viene chiamato gruppo affine, e ciascuna trasformazione appartenente a questo gruppo, trasformazione affine.

Chiaramente le trasformazioni affini fanno corrispondere ai punti del piano proiettivo situati a distanza finita (dunque non appartenenti alla retta all'infinito) punti a distanza finita. Consideriamo i punti del piano proiettivo privato della retta all'infinito (si dice anche che è stato eseguito un

taglio secondo la retta all'infinito). Il piano proiettivo privato della retta all'infinito è detto piano affine.

Determiniamo la rappresentazione analitica delle trasformazioni affini nel piano affine (escludendo cioè i punti all'infinito). Introduciamo dapprima nel piano proiettivo un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) tali che la retta all'infinito abbia per equazione, in questo sistema, $x_3 = 0$. Consideriamo una trasformazione proiettiva definita da:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases}$$

Essa rappresenta una trasformazione affine se $x_3 = 0$ implica $x'_3 = 0$ per x_1, x_2 qualunque. (Cioè se la retta $x_3 = 0$ ha se stessa come immagine). Per questo è necessario e sufficiente che: $c_{31} = c_{32} = 0$. Si ottiene così la rappresentazione analitica di una trasformazione affine:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{33}x_3 \end{cases}$$

e poiché $x_3 \neq 0$ per ogni punto a distanza finita, è possibile aritmetizzare il piano affine nella sua totalità introducendo le coordinate non omogenee:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

È dunque superfluo introdurre le coordinate omogenee quando si tratta del piano affine. Dividendo le prime due uguaglianze del sistema omogeneo per la terza e ponendo

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = a_1, \quad \frac{c_{21}}{c_{33}} = a_2, \quad \frac{c_{12}}{c_{33}} = b_1, \quad \frac{c_{22}}{c_{33}} = b_2, \quad \frac{c_{13}}{c_{33}} = c_1, \quad \frac{c_{23}}{c_{33}} = c_2,$$

si ottiene la rappresentazione analitica del gruppo affine in coordinate non omogenee:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad (14.6)$$

ogni trasformazione della forma 14.6 è affine a condizione che:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

altrimenti la trasformazione non è biunivoca. Poiché le formule 14.6 hanno 6 parametri, il gruppo affine è un gruppo a 6 parametri.

Invarianti del gruppo affine La geometria del gruppo affine è detta geometria affine e studia le proprietà delle figure invarianti per il gruppo affine. Essa differisce considerevolmente dalla geometria proiettiva. Ad esempio, in geometria proiettiva due rette si tagliano sempre, mentre in geometria affine esistono rette parallele. Infatti due rette del piano proiettivo che concorrono in un punto all'infinito, divengono parallele nel piano affine, poiché abbiamo eseguito un taglio del piano proiettivo secondo la retta all'infinito eliminando il loro punto d'incontro. Evidentemente il postulato delle parallele euclideo vale nel piano affine: per ciascun punto preso al di fuori di una retta passa 1 e 1 sola retta parallela alla retta data.

Osserviamo inoltre che la retta affine ammette un ordine lineare, come la retta euclidea.

Cerchiamo gli invarianti del gruppo affine. Ovviamente ogni invariante del gruppo proiettivo è anche un invariante del gruppo affine, poiché le trasformazioni affini sono particolari trasformazioni proiettive. Non vale il viceversa, poiché esistono invarianti affini non proiettivi. L'invariante affine fondamentale è il rapporto armonico di tre punti allineati. Il rapporto armonico di tre punti $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, è definito dall'una o dall'altra delle due formule:

$$(M_1, M_2, M_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}, \quad (M_1, M_2, M_3) = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2},$$

Non c'è ambiguità, poiché nel caso abbiano significato entrambe ($x_3 \neq x_2$, $y_3 \neq y_2$) esse ammettono lo stesso valore, in considerazione della equazione della retta $y = mx + q$.

È facile vedere che il rapporto armonico è invariante per le trasformazioni affini. Indicando con x' , y' le coordinate del punto M' trasformato di $M = (x, y)$ tramite una applicazione affine, si ha:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) = (M_1, M_2, M_3) [a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)]; \\ x'_3 - x'_2 &= a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) \end{aligned}$$

dunque:

$$(M'_1, M'_2, M'_3) = \frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_2} = (M_1, M_2, M_3)$$

Se i tre punti non sono allineati, non si hanno degli invarianti affini. Questo perché tre punti non allineati ammettono una trasformazione affine che fa loro corrispondere altri tre punti qualunque non allineati. Per $n \geq 4$ si trovano degli invarianti affini di n punti qualunque. Questi invarianti si lasciano tutti esprimere per mezzo di rapporti armonici.

Per questa ragione il rapporto armonico è l'invariante fondamentale del gruppo affine.

Osservazione.

Si può introdurre il piano affine e, più generalmente, la geometria affine mediante un sistema di assiomi appropriato, senza far menzione della geometria proiettiva. In questa ottica, il piano affine è un insieme di enti di due specie, punti e rette, che verificano gli assiomi di 5 gruppi:

I gruppo. Definisce le relazioni di appartenenza e contiene i primi 3 assiomi del gruppo I della geometria euclidea.

II gruppo. Definisce l'ordine dei punti sulla retta, corrisponde al II gruppo di assiomi della geometria euclidea (poiché la retta affine ammette un ordine lineare di punti, gli assiomi di ordine della geometria affine devono coincidere con quelli della geometria euclidea).

III gruppo. Contiene l'assioma di continuità di Dedekind.

IV gruppo. Contiene l'assioma delle parallele di Euclide.

V gruppo. Corrisponde alla proposizione di Desargues (dei triangoli omologici) nel cui enunciato si tiene conto dell'esistenza di rette parallele.

La definizione di piano affine tiene conto di tutti gli assiomi della geometria euclidea ad eccezione di quelli di congruenza.

Gruppo affine unimodulare Diciamo che la trasformazione affine:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

è unimodulare se: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$ Si dimostra facilmente che le trasformazioni affini unimodulari formano un gruppo. Infatti:

- 1) La composizione di due trasformazioni affini unimodulari è affine unimodulare, in quanto se la trasformazione:

$$\begin{cases} x'' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y'' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

è la composizione delle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = a_1^{(1)}x + b_1^{(1)}y + c_1^{(1)} \\ y' = a_2^{(1)}x + b_2^{(1)}y + c_2^{(1)} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'' = a_1^{(2)}x + b_1^{(2)}y + c_1^{(2)} \\ y'' = a_2^{(2)}x + b_2^{(2)}y + c_2^{(2)} \end{cases}$$

allora si ha la relazione tra le matrici:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} & b_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

e dunque il determinante è il prodotto dei determinanti: $\Delta = \Delta_1\Delta_2 = \pm 1$.

- 2) L'inversa di una trasformazione affine di modulo 1 è affine di modulo 1. Infatti l'inversa di una applicazione affine ha come matrice dei coefficienti la matrice inversa della applicazione data, dunque il suo determinante Δ_2 è legato al determinante della applicazione data da:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\Delta_1} = \pm 1$$

Il gruppo di queste applicazioni, come pure la geometria da esso derivata, è detto affine unimodulare.

Il gruppo affine unimodulare è un gruppo a 5 parametri poiché le equazioni dipendono da 6 parametri, ma la condizione sul determinante implica l'equazione:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$$

che lascia solo 5 parametri indipendenti.

Ciascun ente della geometria affine in generale è evidentemente un ente della geometria affine unimodulare. Al contrario, la seconda comprende enti estranei alla prima, poiché la classe degli invarianti del gruppo affine unimodulare è più grande della classe degli invarianti del gruppo affine in generale.

Facciamo vedere che il gruppo affine unimodulare ammette un invariante di tre punti non allineati. Supponiamo che tre punti $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3)$ si trasformino in $M'_1 = (x'_1, y'_1)$, $M'_2 = (x'_2, y'_2)$, $M'_3 = (x'_3, y'_3)$. Si verifica allora facilmente che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Ne segue che il valore assoluto del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

è un invariante di 3 punti. In geometria affine unimodulare a ciascun triangolo $M_1M_2M_3$ si associa l'invariante:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

La quantità S è detta l'area del triangolo $M_1M_2M_3$. Si può poi definire l'area di un poligono e l'area di una figura a contorno curvilineo; per area di un poligono si intende la somma delle aree dei triangoli componenti, e per area di una figura curvilinea il limite della successione delle aree dei poligoni inscritti che la approssimano. Dunque la geometria affine unimodulare comprende tra i suoi oggetti le aree delle figure.

Gruppo ortogonale La trasformazione affine

$$\begin{cases} x' = a_1^{(1)}x + b_1^{(1)}y + c_1^{(1)} \\ y' = a_2^{(1)}x + b_2^{(1)}y + c_2^{(1)} \end{cases}$$

è detta ortogonale se la sua matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

è ortogonale, cioè è tale che: $A^t A = I$ dove I è la matrice unità e ${}^t A$ è la matrice trasposta di A ossia:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle trasformazioni ortogonali è un gruppo, infatti:

- 1) La composizione di due trasformazioni ortogonali è ortogonale. Poiché è già stato osservato che la composizione di due trasformazioni affini è affine, basta verificare l'ortogonalità della matrice associata alla trasformazione composta. Siano A_1 e A_2 le matrici associate alle applicazioni ortogonali date. Il loro prodotto righe per colonne sia la matrice $A = A_2 A_1$. Si ha allora:

$$A^t A = A_2 A_1 {}^t (A_2 A_1) = A_2 A_1 ({}^t A_1 {}^t A_2) = A_2 (A_1 {}^t A_1) {}^t A_2 = A_2 I {}^t A_2 = A_2 {}^t A_2 = I$$

- 2) L'inversa di una trasformazione ortogonale è ortogonale. Infatti l'inversa di una trasformazione ortogonale di matrice A è una trasformazione affine di matrice A^{-1} . Per l'ortogonalità di A e l'unicità della matrice inversa:

$$A^t A = I \Rightarrow A^{-1} = {}^t A$$

e dunque:

$$A^{-1} {}^t A^{-1} = {}^t A ({}^t A) = {}^t A A = I$$

Il gruppo delle trasformazioni ortogonali è detto gruppo ortogonale. Poiché ogni trasformazione ortogonale ha determinante uguale a ± 1 , il gruppo ortogonale è un sottogruppo del gruppo affine unimodulare.

La condizione di ortogonalità si può anche esprimere mediante le tre condizioni scalari:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

pertanto il gruppo ortogonale si enuclea dal gruppo affine imponendo tre restrizioni ai sei parametri a_i, b_i, c_i e dunque è un gruppo a 6 parametri.

Si può dare alle condizioni di ortogonalità una forma differente. Poiché A è ortogonale se è solo se ${}^tA$ è ortogonale, le condizioni:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

sono equivalenti alle 14.7.

A differenza di tutti i gruppi esaminati finora, il gruppo ortogonale ammette un invariante di due punti: è la funzione di due punti $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ definita da:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Il carattere invariante di questa funzione è facile a verificarsi: se $M'_1 = (x'_1, y'_1)$, $M'_2 = (x'_2, y'_2)$ sono i trasformati di M_1 e M_2 per una trasformazione ortogonale di coefficienti a_i, b_i, c_i , per le 14.8 si ha:

$$\begin{aligned} \rho(M'_1, M'_2) &= \sqrt{(a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1))^2 + (a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1))^2} = \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2 + \\ &\quad + 2(a_1 a_2 + a_2 b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \rho(M_1, M_2) \end{aligned}$$

Nella geometria del gruppo ortogonale, la quantità $\rho(M_1, M_2)$ è detta distanza dei punti M_1 e M_2 . La distanza di due punti rappresenta l'invariante fondamentale di questa geometria, poiché tutti gli altri invarianti si lasciano esprimere in funzione della distanza.

La geometria del gruppo ortogonale non è altro che la geometria elementare in cui le figure equivalenti si corrispondono per rotazioni, traslazioni e simmetrie.

Confronto tra diverse geometrie Abbiamo visto il gruppo proiettivo e i suoi sottogruppi principali: affine, affine unimodulare, ortogonale. A questi quattro gruppi corrispondono quattro geometrie: proiettiva, affine, affine unimodulare o metrica, elementare.

Di questi gruppi, il più ampio è quello messo alla base della geometria proiettiva (cioè il gruppo proiettivo) e il più ristretto quello che sta alla base della geometria elementare (cioè il gruppo ortogonale). D'altra parte la geometria proiettiva ha la classe di enti più povera di tutti, e la geometria elementare la più ricca. In effetti la geometria elementare ingloba sia gli enti e le relazioni affini (rapporti armonici di tre punti, parallelismo) che gli enti proiettivi (birapporto di quattro punti...). Al contrario, la geometria proiettiva prescinde dalle proprietà strettamente affini delle figure, e la geometria affine ignora le proprietà metriche, in quanto non distingue ossia considera equivalenti figure che differiscono solo per proprietà metriche, come la lunghezza. In generale, più il gruppo fondamentale di una geometria è esteso, meno è ricco in enti geometrici. Il fatto è evidente, poiché più le trasformazioni del gruppo sono numerose, meno si trovano relazioni o proprietà che sono invarianti per tutte queste trasformazioni. Le proprietà e le grandezze invarianti per un gruppo qualunque si rivelano 'più stabili' che le proprietà e le grandezze invarianti per un suo sottogruppo qualunque, poiché 'resistono' ad un maggior numero di trasformazioni.

Potremmo schematizzare i rapporti tra i gruppi e tra le geometrie associate nel modo seguente. Indichiamo con:

G_E	=	gruppo ortogonale	W_E	=	geometria elementare
G_M	=	gruppo affine di modulo 1	W_M	=	geometria metrica
G_A	=	gruppo affine	W_A	=	geometria affine
G_P	=	gruppo proiettivo	W_P	=	geometria proiettiva

Si ha allora la successione dei gruppi, ordinata per inclusione:

$$G_E \subset G_M \subset G_A \subset G_P$$

cui corrisponde la successione in ordine inverso per le proprietà che si conservano (gli enti, gli invarianti) delle geometrie derivate:

$$W_E \supset W_M \supset W_A \supset W_P$$

Dove in:

W_E si conservano:	la lunghezza, l'ampiezza angolare, le dimensioni e la forma di qualsiasi figura
W_M si conservano:	le aree
W_A si conservano:	il parallelismo, la natura di una conica
W_P si conservano:	l'allineamento, la collinearità, i birapporti, i gruppi armonici, la proprietà di essere una sezione conica

Naturalmente in ogni geometria si conservano anche gli invarianti delle geometrie successive. La geometria affine W_A fu messa in luce per la prima volta da Euler e poi da Möbius nel suo *Die Barycentrische Calcul* e risulta utile nella meccanica delle deformazioni: non fu mai presa in esame da Klein.

Capitolo 15

Introduzione assiomatica di $\mathbb{R}$

15.1 Il campo $\mathbb{R}$

15.1.1 $\mathbb{R}$ è con la somma un gruppo abeliano

Dire che $\mathbb{R}$ è un gruppo con $+$, significa che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

Proprietà 1 (proprietà associativa). $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Proprietà 2 (esiste l'elemento neutro 0). $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà 3 (esiste l'opposto $-x$). $x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Proprietà 4 (proprietà commutativa (il gruppo è abeliano)). $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

15.1.2 $\mathbb{R}^*$ è con il prodotto un gruppo abeliano

Dire che $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ è un gruppo con $\cdot$, significa che sono soddisfatte le seguenti proprietà:

Proprietà 5 (proprietà associativa). $x(yz) = (xy)z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$

Proprietà 6 (esiste l'elemento neutro 1). $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Proprietà 7 (esiste il reciproco $\frac{1}{x}$). $x \left(\frac{1}{x} \right) = \left(\frac{1}{x} \right) x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Proprietà 8 (proprietà commutativa). $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$

15.1.3 $\mathbb{R}$ è un campo

Assumiamo vere le proprietà di $\mathbb{R}$ sopra enunciate, e ci aggiungiamo, supponendola vera, la seguente proprietà:

Proprietà 9 (Proprietà distributiva). $x(y + z) = xy + xz \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Così $\mathbb{R}$ diventa un **campo**

15.2 $\mathbb{R}$ è un campo ordinato

Sia $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chiamato insieme dei numeri positivi, i cui elementi godono delle seguenti proprietà:

Proprietà 10. Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ allora $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$

Proprietà 11. $\forall x \in \mathbb{R}^*$ o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, ma non entrambi.

Proprietà 12. $0 \notin \mathbb{R}^+$

Utilizzando le precedenti proprietà è possibile introdurre, gli usuali simboli di $>, <, \geq, \leq$, nel seguente modo:

- $x < y$ significa $y - x \in \mathbb{R}^+$
- $y > x$ significa $x < y$
- $x \leq y$ significa che o $x < y$ o $x = y$
- $y \geq x$ significa $x \leq y$

Dove $x, y \in \mathbb{R}$.

15.3 $\mathbb{R}$ è completo

Un po' di terminologia prima del «grande passo» :

sia $S \neq \emptyset$ e $S \subset \mathbb{R}$ se $\exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in S$ si ha $x \leq B$ allora si dice che S è *limitato superiormente* da B . Il numero B è detto un *maggiorante* di S .



Figura 15.1: B è un maggiorante di S

Definizione 59 (Estremo superiore). Un numero B si dice estremo superiore di un insieme non vuoto S se ha le due proprietà seguenti:

- a) B è un maggiorante di S
- b) nessun numero minore di B è un maggiorante di S

Assioma 1 (assioma di completezza). Ogni insieme non vuoto S di numeri reali che sia *superiormente limitato* ha un estremo superiore.

15.4 L'algebra di $\mathbb{R}$ in sintesi

Struttura di $(\mathbb{R}, +)$

gruppo abeliano		
$\forall x, y \in \mathbb{R}$	si ha che:	$x + (y + z) = (x + y) + z$ ASSOCIATIVA
$\exists 0 \forall x \in \mathbb{R}$	tale che:	$x + 0 = 0 + x = x$ ELEMENTO NEUTRO
$\exists -x \forall x \in \mathbb{R}$	tale che:	$x + (-x) = (-x) + x = 0$ SIMMETRICO
$\forall x, y \in \mathbb{R}$	si ha che:	$x + y = y + x$ COMMUTATIVA

Struttura di $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

gruppo abeliano		
$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$	si ha che:	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ASSOCIATIVA
$\exists 1 \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$	tale che:	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ ELEMENTO NEUTRO
$\exists x^{-1} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$	tale che:	$x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$ SIMMETRICO
$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$	si ha che:	$x \cdot y = y \cdot x$ COMMUTATIVA

$\mathbb{R}$ è un campo

Dato che $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sono gruppi abeliani e vale:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{si ha che:} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{DISTRIBUTIVA}$$

15.5 Definizione di anello

Un anello A è un insieme i cui elementi possono essere addizionati e moltiplicati (cioè sono assegnate le applicazioni $(x, y) \rightarrow x + y$ e $(x, y) \rightarrow xy$ che ad ogni coppia ordinata di elementi di A associano un elemento di A stesso), in modo che siano soddisfatte le seguenti relazioni:

AN1. Rispetto all'addizione A è un gruppo abeliano;

AN2. per ogni scelta di $x, y, z \in A$ si ha che:

$$x(y + z) = xy + xz \quad (y + z)x = yx + zy$$

AN3. comunque si scelgano $x, y, z \in A$ abbiamo che $(xy)z = x(yz)$:

AN4. Esiste in A un elemento e tale che, per ogni $x \in A$ abbiamo $ex = xe = x$.

15.5.1 $\mathbb{Z}$ è un anello

$\mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano con la somma:

- a) $\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad n + m \in \mathbb{Z}$
- b) $\forall n, m, p \in \mathbb{Z} : (n + m) + p = n + (m + p)$
- c) $\exists 0 \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} \quad n + 0 = 0 + n = n$
- d) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists -n : n + (-n) = -n + n = 0$
- e) $\forall n, m \in \mathbb{Z} : n + m = m + n$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad nm \in \mathbb{Z}$$

$$\forall n, m, p \in \mathbb{Z} : n(m + p) = nm + np \quad (m + p)n = mn + pn$$

$$\exists 1 \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} \quad n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$$

Problema 19. Sia $\mathbb{Z}_4$ l'insieme delle classi di congruenza modulo 4, costruiamo le tabelle di somma e prodotto:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Dimostra che $\mathbb{Z}_4$ è un anello.

Capitolo 16

Topologia di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è l'insieme prodotto così definito $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$, i cui elementi sono le n-uple di reali $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ gli elementi sono le coppie (x, y) che pensate nel piano cartesiano ne individuano i punti.

16.1 La metrica di $\mathbb{R}^n$

Definizione 60 (Metrica pitagorica). (Tratto da Prodi 1977) In $\mathbb{R}^n$ è definita una funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, così definita:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad P = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad e \quad Q = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$$

la funzione d gode delle seguenti proprietà:

- i) $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P) \forall P, Q \in \mathbb{R}^n$
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, P) \forall P, Q, R \in \mathbb{R}^n$

dimostrare le proprietà nei casi $\mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2$

16.2 Gli intorni $\mathbb{R}^n$

Definizione 61 (Disco di centro P e raggio δ). L'insieme dei punti $Q \in \mathbb{R}^n$ tal che $d(P, Q) \leq \delta$ è detto disco di centro P e raggio δ

rappresentare i seguenti dischi:

- 1) centro $P_1 = 0$ raggio $\delta = 2$ $P_1 \in \mathbb{R}$
- 2) centro $P_2 = -3$ raggio $\delta = 1$ $P_2 \in \mathbb{R}$
- 3) centro $P_3 = (0, -1)$ raggio $\delta = 1$ $P_3 \in \mathbb{R}^2$
- 4) centro $P_4 = (2, -1)$ raggio $\delta = \frac{1}{2}$ $P_4 \in \mathbb{R}^2$

Definizione 62 (Intorno). Ogni insieme che contenga almeno un disco di centro P si definisce intorno di P .

Definizione 63 (Famiglia degli intorni). L'insieme di tutti gli intorni di un punto P si definisce famiglia degli intorni di P e si indica con $\mathcal{J}_P$, quando $P \in \mathbb{R}$ e quindi $P \equiv x$ si indicherà con $\mathcal{J}_x$

Dimostrare nei casi $P \in \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R}^2$ le seguenti proprietà, valide in generale (cioè per $P \in \mathbb{R}^n$):

- 1) Ogni P ha almeno un intorno; ogni intorno di P contiene P .
- 2) Se $U \in \mathcal{J}_P$ e se $U \subset V$ allora $V \in \mathcal{J}_P$
- 3) $\forall U \in \mathcal{J}_P, \exists V \in \mathcal{J}_P : U \in \mathcal{J}_Q \forall Q \in V$.
- 4) Se $P \neq Q$ esistono $U \in \mathcal{J}_P$ e $V \in \mathcal{J}_Q$ tali che: $U \cap V = \emptyset$

Definizione 64 (Punto aderente). Sia $T \subset \mathbb{R}^n$, e $P \in \mathbb{R}^n$, si dice che P è aderente a T se ogni intorno di P contiene qualche punto di T .

scrivi la precedente definizione usando il formalismo matematico

Definizione 65 (Punto di accumulazione). Sia $T \subset \mathbb{R}^n$, e $P \in \mathbb{R}^n$, si dice che P è di accumulazione per T se ogni intorno di P contiene punti di T diversi da P .

Sia $T = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} n > 0 \right\}$, indica se esistono e quali sono i punti aderenti e i punti di accumulazione

Definizione 66 (Insieme denso). Sia $T \subset E$, si dice che T è denso in E se ogni punto di E è aderente a T .

Definizione 67 (Insieme chiuso). Si dice che T è chiuso se contiene tutti i suoi punti aderenti.

Definizione 68 (Insieme aperto). Si dice che T è aperto se il suo complementare è chiuso.

16.2.1 Osservazione

Esistono insiemi che non sono aperti e nemmeno chiusi: ad esempio l'intervallo $[1, 0)$ della retta reale.

Esistono insieme sia aperti che chiusi: $\emptyset$ e lo spazio intero.

Capitolo 17

Funzione esponenziale e logaritmo

Abbiamo visto, capitolo 15, che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^*$ sono, rispettivamente, con l'operazione di somma e di prodotto gruppi abeliani, è facile dimostrare che $\mathbb{R}^+$ è con il prodotto gruppo commutativo.

17.1 Le proprietà delle potenze

Siano $x \in \mathbb{R}^+$ e $n, m \in \mathbb{Z}$ è noto che:

- $x^{n+m} = x^n y^m$
- $x^0 = 1$
- $x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

Se n, m vengono scelti in $\mathbb{Q}$ valgono ancora le stesse proprietà, ed in particolare si osserva che:
 $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x^{(1)}$

17.2 Costruzione di un isomorfismo

Definizione 69 (Omomorfismo fra gruppi). Siano $(H, \diamond)$ e $(K, \circ)$ due gruppi, una funzione $w : H \rightarrow K$ si dice omomorfismo se:

$$w(u \diamond v) = w(u) \circ w(v)$$

se w è biiettiva si definisce **isomorfismo**

Sia $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$, sia f un isomorfismo, perciò valgono:

- $f(x + y) = f(x)f(y)$;
- $f(0) = 1$;
a cui aggiungiamo
- $f(1) = a > 0$

¹I radicali sono potenze con esponente frazionario!

17.2.1 Prime conseguenze

Proviamo ad applicare le proprietà precedenti: $f(2) = f(1)f(1) = a^2$;

$$f(n) = f(1)f(n-1) = af(1)f(n-2) = a^n;$$

$$1 = f(0) = f(1-1) = f(1)f(-1) \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{a};$$

$$a = f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}$$

La funzione f così definita è l'esponenziale di base a . Se l'esponente è un numero razionale, ritroviamo le "vecchie" potenze. Attenzione la funzione ora introdotta è alquanto diversa: ci permette, ad esempio, di calcolare π^π .

17.3 La funzione esponenziale

$a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, a è detta *base* ed è per **definizione un reale positivo** x è detto *esponente*.

Riepilogo delle proprietà:

i) $a^{x+y} = a^x a^y$;

ii) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

iii) $a^0 = 1$;

Costruiamo (Figura 17.1) il grafico di 2^x e di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

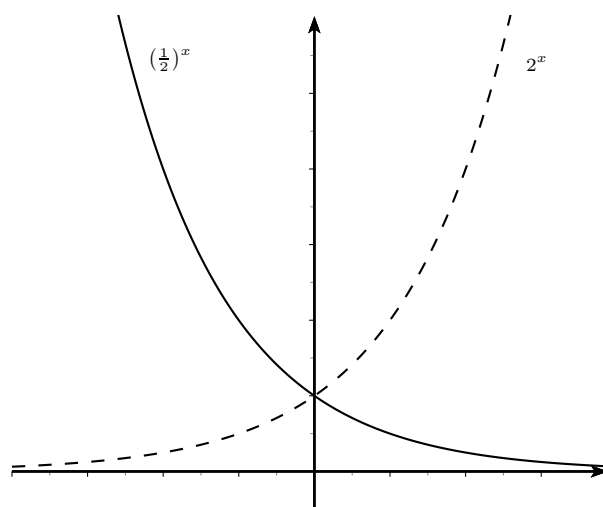


Figura 17.1: Grafico di 2^x e di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Costruire, con GeoGebra, il grafico di una funzione esponenziale facendo variare la base $0.1 \leq a \leq 3$

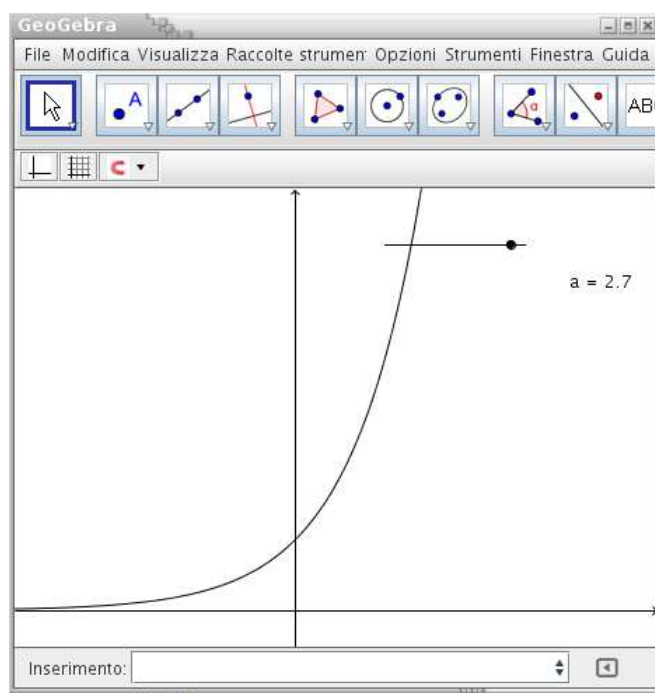


Figura 17.2: Finestra di Geogebra con grafico di a^x

17.3.1 Non tutte le basi sono uguali

John Napier



Merchiston 1550 Edimburgo 3 aprile 1617

ABATE MARIE, Lezioni elementari di Matematiche, pp. 199-202 (XVIII secolo)

« I Geometri si dolevano da gran tempo della lunghezza dei calcoli nella moltiplicazione, e nella divisione dei numeri molto grandi, e sopra tutto nell'estrazione delle radici un poco alte, quando finalmente Nepero, Barone Scozzese, uomo di un raro genio, imaginò una maniera estremamente felice di rimediare ad un simile inconveniente. Egli arrivò al termine di ridur le moltiplicazioni a semplici somme, le divisioni a semplici sottrazioni, le formazioni delle potenze a moltiplicazioni assai corte, e l'estrazioni delle radici a divisioni le più facili.

Ci rincresce di non poterci molto estendere sulla bellezza di questa scoperta, ma si conoscerà andando innanzi. Svilupperemo pertanto adesso solamente i principi di una sì utile teoria.

Sia dunque una progressione geometrica qualunque $a^0, a^1, a^2 \dots$ si sa che per moltiplicare un per l'altro due termini di questa formula basta scrivere una sol volta la quantità a con un esponente eguale alla somma dei due esponenti dei termini

moltiplicati. Infatti:

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5 \dots, a^7 \times a^9 = a^{7+9} = a^{16}.$$

Così il prodotto di due termini qualunque d'una progressione geometrica è sempre eguale a quel termine della progressione medesima il quale abbia per esponente la somma degli esponenti di questi due.

Oltre a ciò si sa che il quoziente di due termini qualunque di una progressione geometrica è quel termine che ha per esponente la differenza degli esponenti dei due termini: a^6 , per esempio, divisa per a^2 è uguale ad $a^{6-2} = a^4$. Dunque per avere il quoziente di due di questi termini, bisogna prender la differenza dei loro esponenti, e farne l'esponente del quoziente cercato.

Ora questi esponenti son ciò che dicesi Logaritmo. Di modo che se $a = 10$, la formula diventando allora 100, 101, 102, 103, 104, ..., ovvero 1, 10, 100, 1000, 10000, ..., l'esponente 0 è il logaritmo dell'unità; l'esponente 1 è il logaritmo di 10; 2 quello di 100 ec.

Ma siccome questi esponenti non danno altro che i logaritmi dei numeri che son nella progressione decupla 1, 10, 100, 1000, ..., e frattanto si ha bisogno spessissimo dei logaritmi dei numeri intermedi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, ... come pure dei logaritmi delle frazioni, così per trovare tutti questi logaritmi si sono aggiunti a ciascuno degli esponenti della formula alquanti zeri in forma di decimali, il che l'ha mutata in questa, postivi solamente sette zeri

$$10^{0,0000000}, 10^{1,0000000}, 10^{2,0000000}, 10^{3,0000000}, \dots$$

Quindi si è rilevato che inserendo in questa formula degli esponenti in progressione aritmetica, i valori del 10 elevato alle potenze indicate da essi, saranno numeri in progressione geometrica, e però questi stessi esponenti saranno i logaritmi di questi numeri. Dunque facendo crescere questi decimali consecutivamente di $\frac{1}{10000000}$, o che è lo stesso, inserendo 9999999 medi proporzionali aritmetici tra ciascuno degli esponenti della progressione si è trovata una nuova progression geometrica i di cui primi termini sono

$$10^{0,0000000}, 10^{0,0000001}, 10^{0,0000002}, 10^{0,0000003}, \dots$$

e i valori corrispondenti di ciascheduno di questi termini son numeri che van crescendo assai lentamente dall'unità in sù; poiché il primo termine vale 1, e il dieci-milionesimo-primo non vale che 10. Tra tutti questi termini inseriti ve ne sarà dunque uno = 2, un altro = 3, un altro = 4 eco o almeno prossimamente vicini eco Si è trovato per esempio che 2 è presso a poco il valore del termine $10^{0,3010300}$, che 3 è presso a poco = $10^{0,4771213}$, che finalmente 4 = $10^{0,6020600}$, ec. e si son riguardati questi esponenti come i logaritmi di 2, di 3, di 4.

Con calcoli stabiliti fu questa idea, ma d'un'immensa estensione furono costruite le Tavole dei Logaritmi per tutti i numeri dall'unità fino al 100000, e che servono a trovar quelli ancora dei numeri più grandi. Vi sono alcune di queste tavole nelle quali per una precisione maggiore i logaritmi hanno dieci, quindici, venti decimali; ma bastano d'ordinario i primi cinque. Per comprendere l'uso è necessario l'aver delle tavole fra le mani; noi ne faremo l'applicazione a suo luogo.

Frattanto senza ricorrere ad esse si può intendere:
primo che i Logaritmi dei numeri intermedi fra 1 e 10 debbono cominciare per 0;

quelli dei numeri posti fra 10 e 100 cominceranno per 1; quelli dei posti fra 100 e 1000 per 2; ec.

Questa prima cifra dei logaritmi (che è l'intero dell'esponente) si chiama la Caratteristica del logaritmo, perché serve a far conoscere di quanti caratteri è composto il numero che gli corrisponde; poiché è evidente che questo numero deve avere una cifra di più di quelle unità che contiene la caratteristica. Casi si vede in un colpo d'occhio che il logaritmo 4,814560 appartiene a un numero di cinque cifre perché la sua caratteristica è 4.

Secondo che il prodotto di due numeri corrisponde alla somma dei loro logaritmi, e che il loro quoziente corrisponde alla differenza dei loro logaritmi. Così per moltiplicare 48 per 166, io sommo i loro logaritmi che sono 1,681241 e 2,220108; la somma è 3,901349; e questo logaritmo corrisponde nelle tavole al numero 7968, che è appunto il prodotto di 48x166. Per divider 7336 per 56, bisogna sottrarre il logaritmo di 56 che è 1,748188 dal logaritmo di 7336, che è 3,865459, e la differenza loro che è 2,117271 è un logaritmo che corrisponde nelle Tavole a 131. Dunque 131 è il quoziente di 7336 diviso per 56. »

Proprietà "interessante" delle funzioni esponenziali:

Per la funzione 2^x consideriamo il rapporto: $\frac{2^{x+h} - 2^x}{h}$

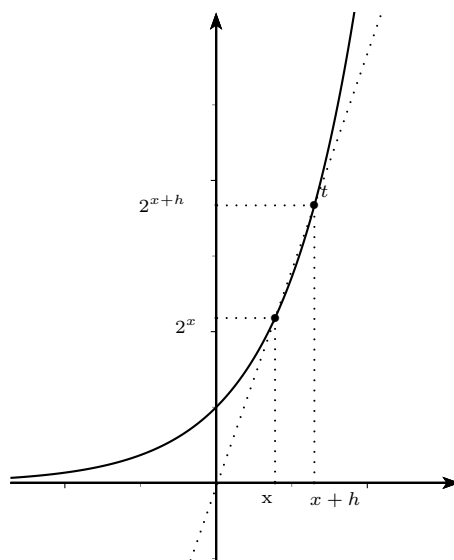


Figura 17.3: Rapporto incrementale della secante (t)

Se h viene scelto « mooolto » piccolo ($h \rightarrow 0$) la secante t tende alla tangente nel punto di ascissa x .

Nelle tabelle 17.1a e 17.1b si osserva che il coefficiente angolare della tangente ad una funzione esponenziale è proporzionale al valore della funzione nel punto di tangenza, infatti se $\frac{a^{x+h} - a^x}{h} \propto$

$$a^x \text{ che è come dire: } \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = k \quad \text{kostante}$$

x	$x+h$	$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \frac{1}{a^x}$	x	$x+h$	$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \frac{1}{a^x}$
1	1,01	0,6955550057	1	1,01	1,1046691938
1,5	1,51	0,6955550057	1,5	1,51	1,1046691938
2	2,01	0,6955550057	2	2,01	1,1046691938
2,5	2,51	0,6955550057	2,5	2,51	1,1046691938
3	3,01	0,6955550057	3	3,01	1,1046691938
3,5	3,51	0,6955550057	3,5	3,51	1,1046691938
4	4,01	0,6955550057	4	4,01	1,1046691938
4,5	4,51	0,6955550057	4,5	4,51	1,1046691938
5	5,01	0,6955550057	5	5,01	1,1046691938
(a) 2^x			(b) 3^x		

 Tabella 17.1: Rapporti incrementali di a^x con h piccolo

verificare con l'uso di un foglio di calcolo anche con altre basi

Proviamo a calcolare ora la base per cui l'incremento è pari all'ordinata della funzione:

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \quad (17.1)$$

Ripartiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali, ciascuna di ampiezza $\frac{1}{n}$ valutiamo l'incremento e la funzione utilizzando 17.1:

primo intervallo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ la 17.1 diventa:

$$\frac{a^{0+\frac{1}{n}} - a^0}{\frac{1}{n}} = a^0$$

ricaviamo il valore di $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$

secondo intervallo $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ la 17.1 diventa:

$$\frac{a^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$$

ricaviamo il valore di $a^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$

...

n-esimo intervallo $a = a^{\frac{n}{n}} = a^{\frac{n-1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Definiamo

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nella tabella 17.2 troviamo la "traduzione" in numeri.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
5	2,48832
10	2,59374246
80	2,701484941
160	2,709835576
640	2,716161208
1280	2,717220759
10240	2,718149112
20480	2,718215467
40960	2,718248647
81920	2,718265238
163840	2,718273533
1310720	2,718280792
2621440	2,718281309
5242880	2,718281568
10485760	2,718281701
20971520	2,718281765
83886080	2,718281815

Tabella 17.2: Il calcolo del numero e

Per i "pignoli" ecco e con 200 cifre:

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696
76277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218
174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298
807531952510190

17.4 La funzione logaritmo

Dato che la funzione esponenziale è stata costruita come isomorfismo da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ ammette inversa. Sia $g = f^{-1}$ così definita: $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ha le seguenti proprietà:

i) $g(xy) = g(x) + g(y)$;

ii) $g(1) = 0$;

iii) $g(\alpha x) = \alpha g(x)$

La funzione g è detta logaritmo; se $f(x) = 2^x$ $g(x) = \log_2(x)$ (logaritmo in base 2), $\log(x)$ indica il logaritmo in base e .

17.4.1 Alcune formule aggiuntive per i logaritmi

Sia dato un logaritmo in una generica base a , $\log_a(x) = y$, per definizione si ha che $a^y = x$, infatti una funzione composta con la sua inversa dà l'identità, cerchiamo di scrivere il logaritmo

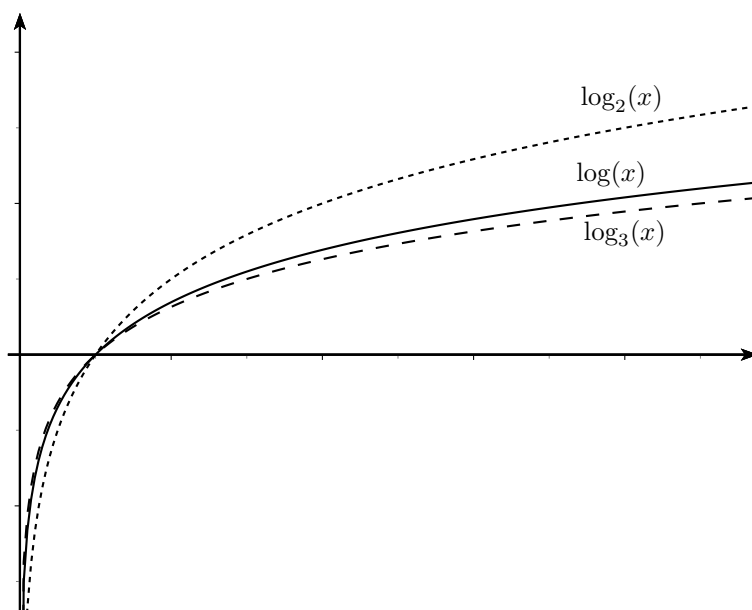


Figura 17.4: Grafico di alcune funzioni logaritmo

rispetto una diversa base: ad esempio $\log_b(\cdot)$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ha:

$$\begin{aligned}
 y &= \log_a(x) \\
 a^y &= x \\
 \log_b(a^y) &= \log_b(x) \\
 y \log_b(a) &= \log_b(x) \\
 y &= \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
 \end{aligned}
 \tag{17.2}$$

La 17.2 ci permette di utilizzare nel calcolo dei logaritmi solo le basi "note" alla calcolatrice.

Costruire, con GeoGebra, i grafici delle funzioni $\log_a(x)$ al variare di $0.1 \leq a \leq 4$

17.4.2 Algoritmo per il calcolo del logaritmo in base 10

Dato un numero reale x strettamente positivo ($x > 0$), si procede come nel seguente esempio, dove $x = 2024$.

Vogliamo calcolare $\log_{10} 2024$, scriviamo 2024 nella forma $2.024 \cdot 10^3$ (notazione scientifica) quindi:

$$\begin{aligned}
 \log_{10}(2024) &= \log_{10}(2.024 \cdot 10^3) \\
 &= \log_{10}(10^3) + \log_{10}(2.024) \\
 &= 3 + \frac{10}{10} \log_{10}(2.024) \\
 &= 3 + \frac{1}{10} \log_{10}(2.024^{10}) \\
 &= 3 + \frac{1}{10} \log_{10}(1153.732380566569) \\
 &= 3 + \frac{1}{10} \log_{10}(1.153732380566569 \cdot 10^3) \\
 &= 3 + \frac{1}{10} \left(3 + \frac{1}{10} \log_{10}(1.153732380566569^{10}) \right) \\
 &= 3.3 \dots
 \end{aligned}$$

In  si può scrivere così:

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

import math
from sympy import *

numero = 1808112813
numerocifre = 15

def contacifre(num) :
    cifra = 0
    while num >= 10 :
        num = num/10
        cifra += 1
    return cifra, num

x = numero
meno = False
if x < 1 :
    meno = True
    x = 1/x
esito = 0
for k in range(numerocifre) :
    Cifra, x = contacifre(x)
    x = x**10
    esito += Cifra*10**(-k)
if meno :
    esito = -1*esito
N(esito, numerocifre), N(math.log10(numero), numerocifre)
```

17.4.3 Dove troviamo i logaritmi

Terremoti

Scala Richter: nella definizione data da Richter, la magnitudo M_L di qualsiasi terremoto è data dal logaritmo in base dieci del massimo spostamento della traccia (rispetto allo zero, espresso

in micrometri) in un sismografo a torsione di Wood-Anderson, se l'evento si fosse verificato a una distanza epicentrale di 100 km. Quindi una oscillazione del sismografo di $1mm$ equivale a $\log_{10}(1000) = 3$ gradi Richter. Un terremoto del sesto grado produce una oscillazione $6 = \log_{10}(x)$ cioè $x = 10^6 \mu m$ un metro.

Livello sonoro

Il decibel dB è così definito:

$$10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

dove P è la misura in Pa della pressione sonora e P_0 è il livello minimo di udibilità stabilito in $20 \mu Pa$ essendo questo il più piccolo valore di pressione in grado di produrre una sensazione sonora in un orecchio normale. Il livello sonoro in una discoteca è di circa $100dB$, quindi facendo due conti si ha:

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \log_{10} \left(\frac{x}{20 \cdot 10^{-6}} \right) \\ &= 10 (\log_{10}(x) - \log_{10}(20 \cdot 10^{-6})) \\ 10 &= \log_{10}(x) - \log_{10}(20) + 6 \\ \log_{10}(x) &= \log_{10}(2 \cdot 10^5) \\ x &= 2 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

una pressione di $2 \cdot 10^5 Pa$, mentre una aspirapolvere ($70db$) produce a un metro di distanza una pressione di $2 \cdot 10^2 Pa$ mille volte inferiore.

Capitolo 18

Cenni di Analisi NonStandard

18.1 Problemi ...nonStandard

18.1.1 Problema uno

Data una curva e un suo punto P determinare la tangente in P .

Proposta di soluzione del problema uno

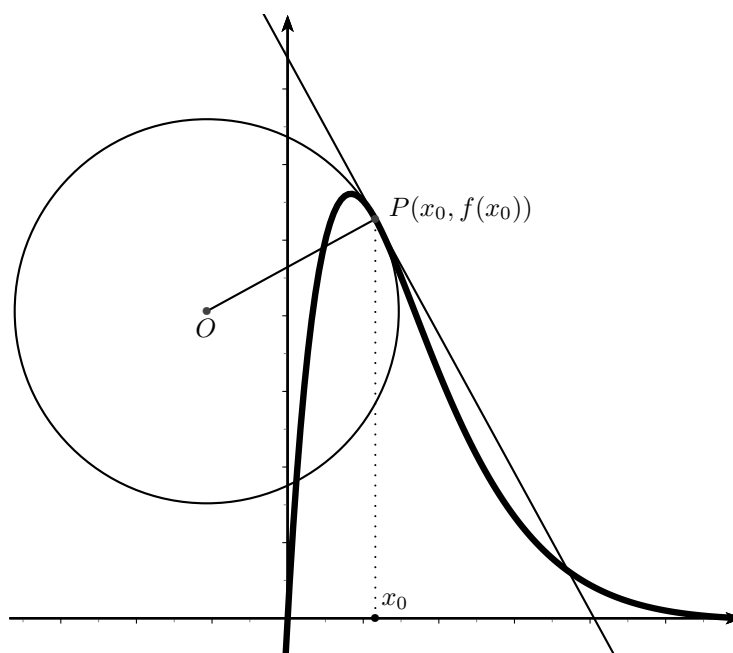


Figura 18.1: La tangente ad una curva: la circonferenza in figura è la circonferenza osculatrice *GeoGebra* 2002 con il comando `CerchioOsculatore[Punto,funzione]`

Visto che si deve calcolare il coefficiente angolare della tangente ad una curva ($y = f(x)$), è opportuno chiarire il concetto:

Definizione 70 (Tangente ad una curva). la tangente al grafico di una funzione nel punto di ascissa x_0 , è quella particolare retta passante per $(x_0, f(x_0))$ perpendicolare al raggio della circonferenza che in quel punto ha la stessa "forma" del grafico della funzione (la circonferenza che ha lo stesso raggio di curvatura del grafico si dice osculatrice in $(x_0, f(x_0))$). La tangente ad una circonferenza può essere ricavata come la retta le cui intersezioni con la curva sono raccolte in un unico punto.

Tangente ad una curva: definizione "leggera"

E' noto dalla geometria analitica che la retta passante per due punti di coordinate $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$ ha coefficiente angolare $m_{x_1, x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$. Consideriamo ora il grafico di f , il coefficiente angolare (m) della tangente alla curva rappresentativa di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ può essere calcolato come il coefficiente angolare della secante quando x si avvicina ad x_0 .

Tangente ad una curva: utilizzo del concetto di secante passante per punti molto «vicini»

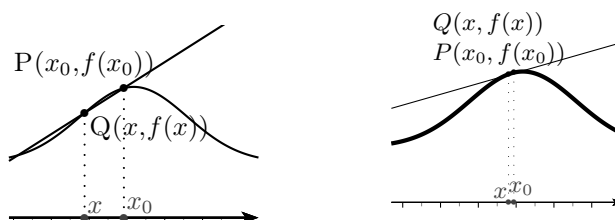


Figura 18.2: secanti ad una curva

Otteniamo la tangente se è possibile « avvicinarsi moltissimo » ad x_0 . Pertanto x ed x_0 dovranno differire di una quantità « trascurabile ».

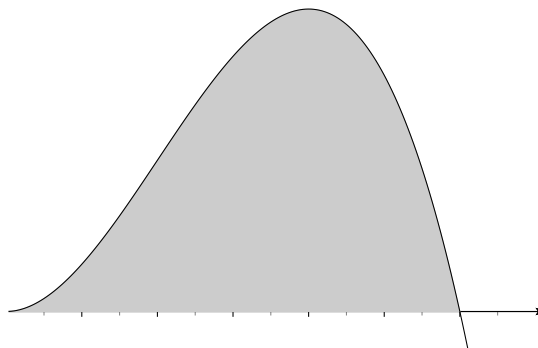
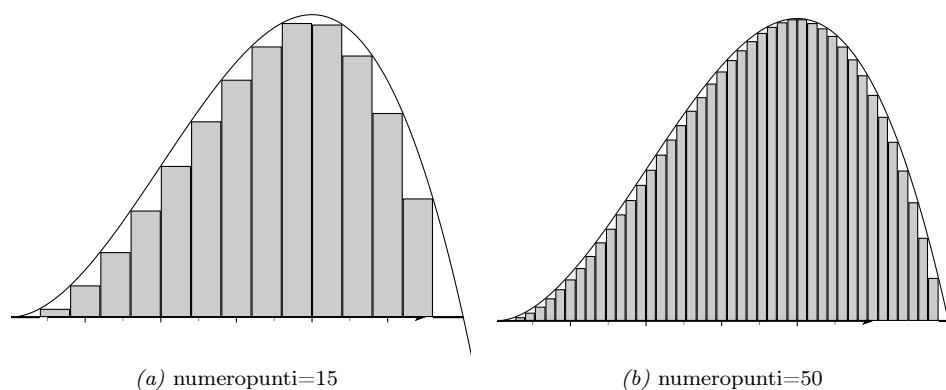
18.1.2 Problema due

Data una parte di piano avente contorno curvilineo determinarne l'area.

Vedi figura 18.3

Proposta di soluzione del problema due

Anche nella soluzione del problema due ci troviamo di fronte ad una situazione simile al problema uno, infatti, per calcolare l'area richiesta possiamo procedere suddividendo la parte di piano in tanti rettangoli in modo che, al tendere dell'ampiezza della base a zero, tali rettangoli ricoprono, di fatto, la superficie da misurare. Ci troviamo quindi nella condizione di dover lavorare con quantità non finite, con « numeri infinitesimi ». Vedi figure 18.4a 18.4b


 Figura 18.3: Geogebra *Integrale* [*funzione, puntoinizio, puntofine*]

 Figura 18.4: Geogebra *SommaInferiore* [*funzione, puntoinizio, puntofine, numeropunti*]

18.1.3 Affrontiamo i problemi in modo NonStandard

Prime idee ...

Possiamo «provare a pensare» in questo modo: ogni numero reale standard x è avvolto da una «nuvoletta» di numeri non standard che differiscono fra loro per una quantità infinitesima, tale «nuvoletta» può essere pensata come una *classe di equivalenza* di cui x ne è un rappresentante, pertanto x o un qualsiasi $x + dx$ (con dx infinitesimo) sono, rispetto a questa relazione, lo stesso oggetto.

Prime idee un po' più serie

Fissiamo "l'ambiente di lavoro"

Assioma 2 (Campo). $\mathbb{R}$ è un **campo completo e ordinato**

Assioma 3 (Estensione di campo). $\tilde{\mathbb{R}}$ è un **campo completo e non ordinato**

Assioma 4 (Gli infinitesimi). $\tilde{\mathbb{R}}$ possiede infinitesimi positivi, tali che, detto ε uno di essi si ha che $0 < \varepsilon$ e $\forall r \in \mathbb{R} \ \varepsilon < r$

Definizione 71 (Infinitesimo). Un elemento $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ è

infinitesimo se $|x| < r \ \forall r \in \mathbb{R}^+$

finito se $\exists r \in \mathbb{R} : |x| < r$

infinito se $|x| > r \ \forall r \in \mathbb{R}$

Due elementi $x, y \in \tilde{\mathbb{R}}$ si dicono **infinitamente vicini**, $x \approx y$ se $x - y$ è infinitesimo. Si osserva che x è infinitesimo se e solo se $x \approx 0$.

Definizione 72 (Monade). Sia $x \in \tilde{\mathbb{R}}$, definiamo **monade**¹ di x l'insieme:

$$\text{monade}(x) = \{y \in \tilde{\mathbb{R}} : x \approx y\}$$

Definizione 73 (Galassia). Sia $x \in \tilde{\mathbb{R}}$, definiamo **galassia** di x l'insieme:

$$\text{galassia}(x) = \{y \in \tilde{\mathbb{R}} : x - y \text{ è finito}\}$$

$\text{monade}(0)$ è l'insieme di tutti gli infinitesimi, mentre $\text{galassia}(0)$ è l'insieme di tutti i numeri finiti, in pratica il sottoinsieme di $\tilde{\mathbb{R}}$ in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$

Quanto sopra riportato è la "libera traduzione" del testo inglese Keisler 2009 di cui riporto l'originale:

PREFACE

In 1960 Abraham Robinson (1918-1974) solved the three hundred year old problem of giving a rigorous development of the calculus based on infinitesimals. Robinson's achievement was one of the major mathematical advances of the twentieth century. This is an exposition of Robinson's infinitesimal calculus at the advanced undergraduate level. It is entirely selfcontained but is keyed to the 2000 edition of my first year college text Elementary Calculus. Elementary Calculus is available free online at www.math.wisc.edu/~Keisler. This monograph can be used as a quick introduction to the subject for mathematicians, as background material for instructors using the book Elementary Calculus, or as a text for an undergraduate seminar.

...

¹Il nome scelto per questo insieme è in onore di Gottfried Leibnitz (1646 1716), che introdusse il concetto di monade: « Le monadi, non avendo parti, non possono essere formate nè disfatte: esse non possono cominciare nè finire secondo natura, perchè durano quanto l'Universo che potrà essere modificato ma non distrutto. Esse non possono avere figure, altrimenti avrebbero parti: una monade, perciò, non può in se stessa e nel momento essere distinta da un'altra che per qualità e azioni interne, le quali non possono essere altro che le sue percezioni (cioè le rappresentazioni nel semplice, del composto o di ciò che è esterno); e le sue appetizioni (cioè le tendenze da una percezione all'altra), che costituiscono i principi del cambiamento. La semplicità della sostanza, infatti, non esclude la molteplicità delle modificazioni, che devono trovarsi insieme nella stessa sostanza semplice e che devono consistere nella varietà dei rapporti con le cose che le sono esterne. è come un centro o punto, nel quale, per quanto semplice, si trovano una infinità di angoli, formati dalle rette che vi concorrono. » G. Leibniz, Scritti filosofici

È bene osservare che l'intera opera di cui, è riprodotta una parte, è liberamente "scaricabile" dal web

THE HYPERREAL NUMBERS

We will assume that the reader is familiar with the real number system and develop a new object, called a hyperreal number system. The definition of the real numbers and the basic existence and uniqueness theorems are briefly outlined in Section 1F, near the end of this chapter. That section also explains some useful notions from modern algebra, such as a ring, a complete ordered field, an ideal, and a homomorphism. If any of these terms are unfamiliar, you should read through Section 1F. We do not require any knowledge of modern algebra except for a modest vocabulary.

...

Structure of the Hyperreal Numbers

In this and the next section we assume only Axioms A, B, and C below.

Axiom A

$\mathbb{R}$ is a complete ordered field.

Axiom B

$\tilde{\mathbb{R}}$ is an ordered field extension of $\mathbb{R}$.

Axiom C

$\tilde{\mathbb{R}}$ has a positive infinitesimal, that is, an element ε such that $0 < \varepsilon$ and $\varepsilon < r$ for every positive $r \in \mathbb{R}$.

...

We call $\mathbb{R}$ the field of real numbers and $\tilde{\mathbb{R}}$ the field of hyperreal numbers.

Definition 1.1. An element $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ is

infinitesimal if $|x| < r$ for all positive real r ;

finite if $|x| < r$ for some real r ;

infinite if $|x| > r$ for all real r .

Two elements $x, y \in \tilde{\mathbb{R}}$ are said to be **infinitely close**, $x \approx y$, if $x - y$ is infinitesimal. (Thus x is infinitesimal if and only if $x \approx 0$).

Notice that a positive infinitesimal is hyperreal but not real, and that the only real infinitesimal is 0.

Definition 1.2. Given a hyperreal number $x \in \tilde{\mathbb{R}}$, the **monad** of x is the set

$$\text{monad}(x) = \{y \in \tilde{\mathbb{R}} : x \approx y\}.$$

The **galaxy** of x is the set

$$\text{galaxy}(x) = \{y \in \tilde{\mathbb{R}} : x - y \text{ is finite}\}.$$

Thus $\text{monad}(0)$ is the set of infinitesimals and $\text{galaxy}(0)$ is the set of finite hyperreal numbers.

In Elementary Calculus, the pictorial device of an infinitesimal microscope is used to illustrate part of a monad, and an infinite telescope is used to illustrate part of an infinite galaxy.

...

1. Scrivi la definizione di relazione di equivalenza e riporta alcuni esempi
2. Scrivi la definizione di classe di equivalenza e riporta alcuni esempi
3. Scrivi la definizione di insieme quoziente e riporta alcuni esempi

18.1.4 Mettiamo alla prova le idee in "ambienti noti"

la parabola

Sia $y = ax^2 + bx + c$ l'equazione della generica parabola avente asse parallelo all'asse delle ordinate, detto $P(x_0, y_0)$ un suo punto, cerchiamo di calcolare il coefficiente angolare della tangente in P .

Sia $m_{x_0}(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ il coefficiente angolare di una secante, che può essere scritto nella forma $m_{x_0}(x) = \frac{a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)}{x - x_0}$ dopo opportune semplificazioni si ottiene $m_{x_0}(x) = a(x + x_0) + b$ se noi avviciniamo x a x_0 , x «entra nella nuvoletta di x_0 », pertanto «è la stessa cosa di x_0 », il coefficiente angolare della tangente è, $m = 2ax_0 + b$ risultato già ricavato nello studio della geometria analitica.

Ricavare (nuovamente) il precedente risultato utilizzando la geometria analitica. Fascio di rette di centro il punto P ...

18.1.5 Alla ricerca di una regola

funzioni polinomie

$f(x) = x^3$, $m_{x_0}(x) = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0}$ e se x entra nella «nuvoletta» di x_0 si ottiene: $3x_0^2$

$f(x) = x^4$, $m_{x_0}(x) = \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3)}{x - x_0}$ e se x entra nella «nuvoletta» di x_0 si ottiene: $4x_0^3$

$f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $m_{x_0}(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n-k} x_0^k)}{x - x_0}$ e se x entra nella «nuvoletta» di x_0 si ottiene: nx_0^{n-1}

Calcolare, per le seguenti funzioni, $m(x)$ usando la traccia indicata nei precedenti esempi:

1. $x \rightarrow \sqrt{x}$
2. $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$
3. $x \rightarrow \frac{1}{x}$
4. $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$
5. Ricava una regola generale per il calcolo di m per le funzioni irrazionali del tipo $x \rightarrow x^q$ con $q \in \mathbb{Q}$
6. Ricava una regola generale per il calcolo di m per le funzioni razionali fratte del tipo $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$

18.1.6 Calcoli con l'operatore che ad f associa m

Definizione 74 (Derivata). L'operatore che ad f associa m dicesi **derivata** prima di f , normalmente indicata con uno dei seguenti simboli:

- $D(f(x))$
- $f'(x)$
- $\frac{df(x)}{dx}$ ⁽²⁾
- $\dot{x}$ ⁽³⁾

Teorema 51 (Somma). Date due funzioni f e g (del tipo di quelle trattate in precedenza) si ha che $D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$

Dimostrazione. costruiamo la funzione m nei punti x e $x + dx$ si ottiene:

$$\frac{f(x + dx) + g(x + dx) - (f(x) + g(x))}{x + dx - x} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx}$$
 dove gli ultimi due addendi sono i rapporti incrementali di f e di g , che per $dx \rightarrow 0$ portano alla tesi $\square$

Teorema 52 (Prodotto). Date due funzioni f e g (del tipo di quelle trattate in precedenza) si ha che $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Dimostrazione. costruiamo la funzione m nei punti x e $x + dx$ si ottiene:

$$\frac{f(x + dx)g(x + dx) - f(x)g(x)}{dx} = \text{aggiungendo 0 nella forma } \frac{f(x + dx)g(x) - f(x + dx)g(x) + f(x + dx)g(x) - f(x)g(x)}{dx}$$

$$= \frac{(f(x + dx))(g(x + dx) - g(x)) + (g(x))(f(x + dx) - f(x))}{dx}$$
 dove è possibile riconoscere la tesi. $\square$

²Notazione dovuta a G. Leibnitz

³Notazione dovuta a I. Newton

- indica quali proprietà algebriche sono state utilizzate per ricavare la regola del prodotto
- ricava la formula di derivazione del quoziente

18.1.7 Un po' di storia

Tratto da: Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli 1992.

Nel 1692, durante il soggiorno a Parigi, Johann Bernoulli insegnò gli elementi del calcolo leibniziano a un giovane marchese dilettante di matematiche, G.F. de L'Hôpital. Nel 1696 questi diede alle stampe un volume ispirato a quelle lezioni, *L'Analyse des infiniment petits*, che rappresentò il primo trattato di calcolo differenziale ed esercitò un'influenza enorme sullo sviluppo della matematica per tutta la prima metà del Settecento.

«L'analisi che viene spiegata in quest'opera presuppone quella comune, ma ne è molto diversa. L'analisi ordinaria non tratta che di grandezze finite: questa penetra fino nell'infinito stesso. Essa confronta le differenze infinitesime delle grandezze finite; scopre i rapporti di queste differenze, e per questa via fa conoscere quelli delle grandezze finite, le quali confrontate con questi infinitesimi sono come altrettanti infiniti. Si può dire addirittura che questa analisi si estende al di là dell'infinito, poichè non si limita alle differenze infinitesime, ma scopre i rapporti delle differenze di queste differenze, e ancora quelli delle differenze terze, quarte e così via senza mai trovare un termine che la possa fermare. Di modo che essa non abbraccia solamente l'infinito, ma l'infinito dell'infinito, o un'infinità di infiniti. Solo un'analisi di questa natura poteva condurci fino ai veri principi delle linee curve. Non essendo le curve che dei poligoni con un'infinità di lati e non differendo tra loro che per la differenza degli angoli che questi lati infinitesimi formano tra di loro, compete solo all'analisi degli infinitesimi di determinare la posizione di questi lati per avere la curvatura che essi formano, ossia le tangenti di queste curve, le loro perpendicolari, i loro punti di flesso o di regresso, i raggi che vi si riflettono o che vi si rifrangono ecc. I poligoni iscritti o circoscritti alle curve che, con la moltiplicazione infinita dei loro lati si confondono infine con esse, sono stati da sempre presi al posto delle curve stesse. Ma ci si era fermati là: è stato solo dopo la scoperta dell'analisi qui trattata, che si è compresa appieno l'estensione e la fecondità di questa idea.»

- Individua le differenze nella definizione di tangente fra quella riportata nel brano e quelle che tu conosci

« ...

DEFINIZIONE I

Si chiamano quantità variabili quelle che aumentano o diminuiscono continuamente e, al contrario, quantità costanti quelle che restano le stesse mentre le altre variano.
[...]

DEFINIZIONE II

La porzione infinitesima di cui una quantità variabile aumenta o diminuisce continuamente, ne è chiamata la differenza. Sia per esempio AMB una linea curva qualunque, che abbia per asse o diametro la linea AC e per una delle applicate la retta PM; e sia un'altra applicata pm infinitamente vicina alla prima. Ciò posto, se si tracciano MR parallela a AC, le corde AM, Am e si descrive con centro A e intervallo [raggio] AM

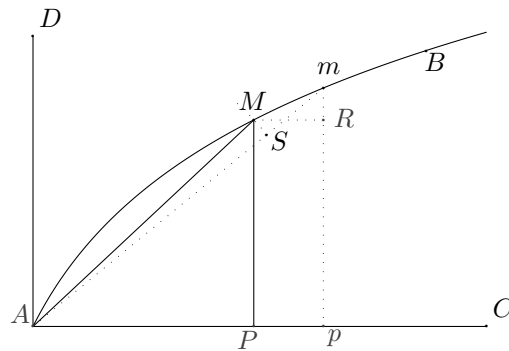


Figura 18.5: Sia per esempio AMB una linea . . .

l'archetto di cerchio MS, Pp sarà la differenza di AP, Rm quella di PM, Sm quella di AM e Mm quella dell'arco AM. Analogamente, il piccolo triangolo MAm che ha per base l'arco Mm, sarà la differenza del segmento AM e il piccolo spazio MPm quella dello spazio compreso tra le rette AP, PM e l'arco AM. Corollario: è evidente che la differenza di una quantità costante è nulla o zero: ovvero (cioè che è la stessa cosa) le quantità costanti non hanno affatto differenza.

RICHIESTA o SUPPOSIZIONE

Si richiede che si possa prendere indifferentemente l'una per l'altra due quantità che non differiscono tra di loro che per una quantità infinitesima: ovvero ciò che è la stessa cosa una quantità che è aumentata o diminuita solo di un'altra quantità infinitamente più piccola di essa, può essere considerata come restante la stessa. Si richiede per esempio che si possa prendere Ap in luogo. Di AP , pm in luogo di PM , lo spazio Apm per lo spazio APM , il piccolo spazio $MPpm$ per il piccolo rettangolo $MPpR$, il piccolo settore AMm per il piccolo triangolo AMS , l'angolo pAm per l'angolo PAM ecc. »

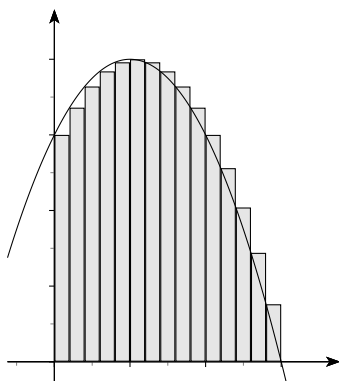
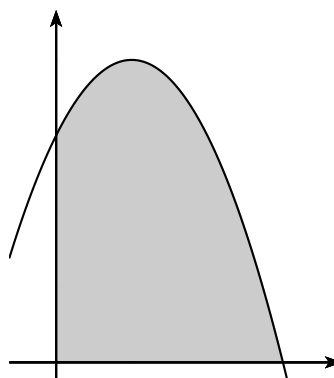
L'Hôpital 1715

- *Riporta differenze ed analogie fra il procedimento di costruzione della tangente riportato nel brano e quello spiegato negli appunti.*

18.1.8 Problema due: solo un esempietto

... sempre la parabola

Data la parabola di equazione $y = 3 + 2x - x^2$, si vuole calcolare l'area della parte di piano formata da punti del primo quadrante che giacciono sotto la curva di figura



Suddividiamo l'intervallo $(0, 3)$ in n subintervalli di ampiezza $\frac{3}{n}$ e costruiamo tanti rettangoli che hanno per base l'intervallino di ampiezza $\frac{3}{n}$ e per altezza l'ordinata dell'estremo sinistro (vedi figura)

L'area del plurirettangolo si può calcolare come:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} \left(3 + 2\frac{3k}{n} - \left(\frac{3k}{n} \right)^2 \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{9}{n} + \frac{18}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 9 + \frac{9(n+1)}{n} - 9 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} \\ &= 9 + \frac{9}{n} - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} \end{aligned} \quad (18.1)$$

Ora quando n diventa molto grande il suo reciproco è infinitesimo e quindi l'area è 9

18.1.9 Le formule usate in 18.1

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad (18.2)$$

Come si calcola 18.2

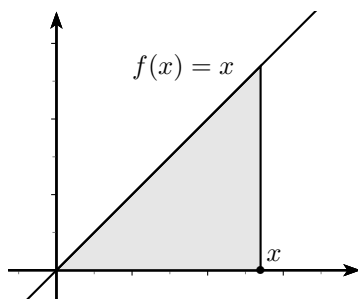
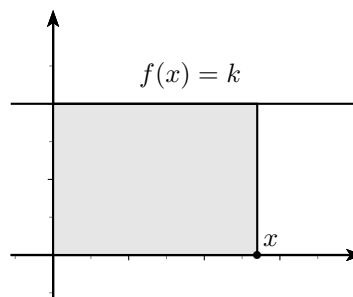
Osservazione preliminare: $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$, quindi $k^2 = \frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3}$, dato che:

$\sum_{k=1}^n k^3 - (k-1)^3 = 1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + \dots + (n-1)^3 - (n-2)^3 + n^3 - (n-1)^3 = n^3$ la 18.2 può essere scritta come:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^3 - (k-1)^3 + 3k - 1}{3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

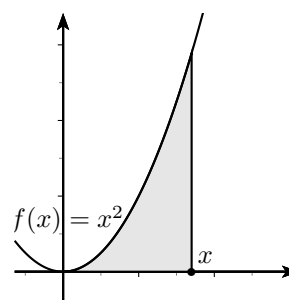
Ancora qualche spunto

Data la funzione $f(x) = k$ l'area nell'intervallo $(0, x)$, tenuto conto che è un rettangolo di base x ed altezza k , vale kx



Data la funzione $f(x) = x$ l'area nell'intervallo $(0, x)$, tenuto conto che è un triangolo di base x ed altezza x , vale $\frac{1}{2}x^2$

Data la funzione $f(x) = x^2$ l'area nell'intervallo $(0, x)$, tenuto conto della 18.2 vale $\frac{x^3}{3}$



Possiamo costruire la seguente tabella:

f	Area sotto f in $(0, x)$
k	kx
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^n	$\dots$

18.2 Calcoli con le derivate

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la definizione di derivata ed il calcolo in situazioni

f	$m = f'$	
k	0	Si è inoltre visto che la derivata di una somma si calcola come somma delle derivate, si può dimostrare, usando le tecniche del paragrafo 18.1.5, che la derivata del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per la derivata della funzione ($D(kf(x)) = k(D(f(x))) = kf'(x)$). Questo ci permette di concludere che la derivata è un operatore lineare $F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$.
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	nx^{n-1}	

semplici, riassunte nella seguente tabella:

Possiamo quindi calcolare la derivata:

di un qualsiasi polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

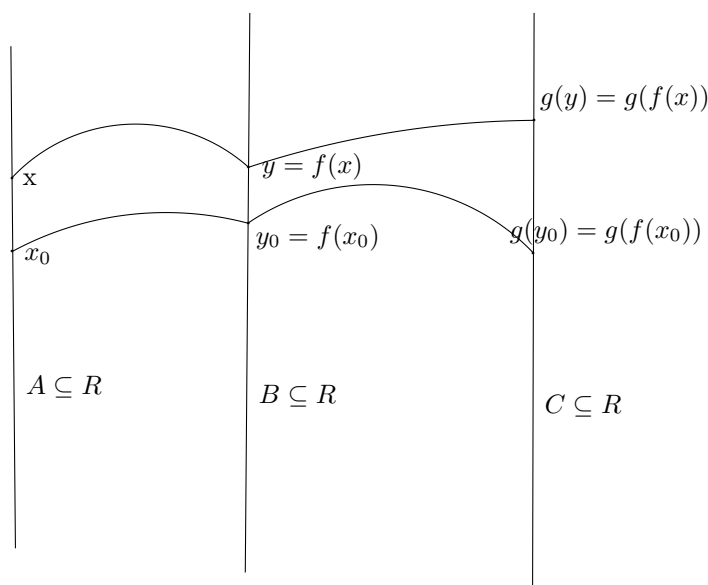
di una qualsiasi funzione razionale fratta $\frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0}$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = 4x^2 - 9x^3$
- $g(x) = \sqrt{3}x^5 + 32x^6 - 12$
- $h(x) = \frac{x^2 - 2}{4 - x}$
- $h(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{4 + x^2}$

18.2.1 Nuove formule

Teorema 53 (Derivata della composta di due funzioni). Siano f e g due funzioni tali che esiste la funzione composta $h(x) = g(f(x))$, ed esistono anche le funzioni f' e g' , allora $D(g(f(x))) = g'(f(x)) f'(x)$


 Figura 18.6: Schema della funzione $(g \circ f)(x)$

Dimostrazione. Possiamo scrivere il rapporto incrementale m_{x_0} , utilizzando la convenzione della figura 18.6:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} \frac{y - y_0}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

da cui la tesi. □

Attività

Dopo aver schematizzato la funzione come in figura 18.6, calcolane la derivata:

1. $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$
2. $g(x) = \sqrt[3]{27x^3 - 9x^2}$

18.3 Applicazioni . . . fisiche e non solo

18.3.1 Moto di una massa in un fluido viscoso

Una massa m è lasciata cadere in un fluido viscoso.

Modello utilizzato: il moto della massa è laminare (non si forma scia)⁴, allora la legge del moto

⁴Un corpo immerso in un fluido risente da parte di questo, in quiete, della spinta di Archimede, eguale e contraria al peso del fluido spostato. Se il corpo si muove rispetto al fluido, alla spinta di Archimede s'aggiunge una forza dipendente in modo essenziale dalla velocità relativa e crescente con questa. [...] Pensiamo intanto, per fissare le idee, ad una sfera. Il fluido si apre per lasciar passare il corpo e si richiude dietro di esso senza lasciare alcuno spazio vuoto. Naturalmente ciò implica l'entrata in movimento di una certa massa di fluido: questa rientra quasi subito in quiete dopo il passaggio del corpo, senza conservare traccia di esso, in certi casi; in altri casi essa segue il corpo per un certo tratto, formando una zona perturbata, che viene chiamata *scia* Rostagni 1973.

può essere così scritta:

$$m \frac{dv}{dt} = m_1 g - bv \quad (18.3)$$

m_1 è la differenza fra la massa dell'oggetto, e la massa del fluido di pari volume dell'oggetto.
Prima di cercare una soluzione è necessaria una premessa:

Principio di Archimede

e^x e la sua derivata

È opportuno, rivedere quanto svolto nella costruzione della funzione esponenziale (Capitolo 17) ed in particolare nel paragrafo 17.3.1.

Calcoliamo la derivata della funzione 3^x :

$\frac{3^{x+h} - 3^x}{h} = \frac{3^x(3^h - 1)}{h} = 3^x \frac{3^h - 1}{h}$ cerchiamo di stimare il rapporto $\frac{3^h - 1}{h}$ quando h diventa infinitesimo, lo facciamo utilizzando Maxima:

```
(%i1) f(h):=(3^h-1)/h;
```

```
(%o1) f(h):= (3^h-1)/h
```

```
(%i3) for i:1 thru 10 step 1 do display(float(f(10^(-i))))$
```

```
float(10 (3^(1/10) - 1)) = 1.161231740339044
float(100 (3^(1/100) - 1)) = 1.104669193785357
float(1000 (3^(1/1000) - 1)) = 1.099215984204038
float(10000 (3^(1/10000) - 1)) = 1.098672638326637
float(100000 (3^(1/100000) - 1)) = 1.098618323425171
float(1000000 (3^(1/1000000) - 1)) = 1.098612892214135
float(10000000 (3^(1/10000000) - 1)) = 1.098612349981209
float(100000000 (3^(1/100000000) - 1)) = 1.098612290029166
float(1000000000 (3^(1/1000000000) - 1)) = 1.098612312233627
float(10000000000 (3^(1/10000000000) - 1)) = 1.098612312233627
```

visto che la cosa si fa interessante, proviamo anche con la funzione 2^x , sempre con l'ausilio di Maxima:

```
(%i4) f(h):=(2^h-1)/h;
```

```
(%o4) f(h):= (2^h-1)/h
```

```
(%i5) for i:1 thru 10 step 2 do display(float(f(10^(-i))))$
```

$$\begin{aligned}\text{float}\left(10\left(2^{\frac{1}{10}}-1\right)\right) &= .7177346253629313 \\ \text{float}\left(1000\left(2^{\frac{1}{1000}}-1\right)\right) &= .6933874625807412 \\ \text{float}\left(100000\left(2^{\frac{1}{100000}}-1\right)\right) &= 0.693149582819963 \\ \text{float}\left(10000000\left(2^{\frac{1}{10000000}}-1\right)\right) &= .6931472040783149 \\ \text{float}\left(1000000000\left(2^{\frac{1}{1000000000}}-1\right)\right) &= .6931470952764585\end{aligned}$$

Queste verifiche ci inducono a pensare che il rapporto $\frac{a^h-1}{h}$ tende ad una costante, in particolare nel caso $a=3$ la costante è >1 mentre nel caso $a=2$, è <1 . Possiamo supporre l'esistenza di un valore di a per cui questa costante sia proprio 1. Chiamiamo questa base e .

la soluzione
non è
proprio
banale ma
... interessante

Abbiamo quindi "ricavato" che la derivata di e^x è ancora e^x .

Scriviamo l'equazione 18.3 in questo modo: $\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = \frac{m_1}{m}g$ si osserva che al primo membro dell'equazione è presente la derivata di una funzione ($v(t)$) più una costante per la funzione stessa.

Ricordandoci della formula della derivata di un prodotto di funzioni:

$(uw)' = uw' + u'w$, e del fatto, appena ricavato, che la derivata di e^x è e^x , trasformiamo l'equazione 18.3 in: $e^{kt}\frac{dv}{dt} + e^{kt}\frac{b}{m}v = e^{kt}\frac{m_1}{m}g$, il primo membro può essere pensato come la

moltiplicando
ambo i
membri per
 e^{kt}

derivata di un prodotto $(e^{kt}v)'$ che una volta svolta $e^{kt}\frac{dv}{dt} + ke^{kt}v$, che ci porta a fissare $k = \frac{b}{m}$.

Giungiamo così a questa nuova equazione: $\frac{d}{dt}(e^{\frac{b}{m}t}v) = e^{\frac{b}{m}t}\frac{m_1}{m}g$

Dobbiamo, in sostanza, trovare una funzione la cui derivata è nota.

Facciamoci guidare da qualche esempio:

sia $3x^2$ la derivata di una certa funzione $g(x)$, cioè $g'(x) = 3x^2$, ... $g(x) = x^3$;

proviamo con $7x^5 \dots \frac{7}{6}x^6$. Ma ... le funzioni che hanno, ad esempio, x come derivata sono tutte le parabole del tipo $\frac{x^2}{2} + c$, vedi 18.7

Il nostro problema è quello di trovare la *primitiva* della funzione: $e^{\frac{b}{m}t}\frac{m_1}{m}g$, ma siamo "fortunati" infatti la funzione e^x non cambia se la derivo!

la derivata è
un operatore
lineare,
quindi le
costanti
moltiplicate
ve ...

Quindi una possibile primitiva sarà del tipo $he^{\frac{b}{m}t} + c$, che una volta derivata deve essere la nostra funzione $h\frac{b}{m}e^{\frac{b}{m}t} = e^{\frac{b}{m}t}$ quindi $h = \frac{m}{b}$.

Ricaviamo quindi che $e^{\frac{b}{m}t}v = \left(\frac{m}{b}e^{\frac{b}{m}t} + c\right)\frac{m_1}{m}g$ da cui

$$v(t) = \left(\frac{m}{b} + ce^{-\frac{b}{m}t}\right)\frac{m_1}{m}g.$$

è possibile calcolare c , sapendo che nell'istante 0 la massa era ferma:

$$0 = \left(\frac{m}{b} + c\right)\frac{m_1}{m}g \quad c = -\frac{m}{b}.$$

Possiamo così trovare la legge della velocità:

$$\begin{aligned}v(t) &= \left(\frac{m}{b} - \frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\right)\frac{m_1}{m}g \\ &= \frac{m_1g}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\end{aligned}$$

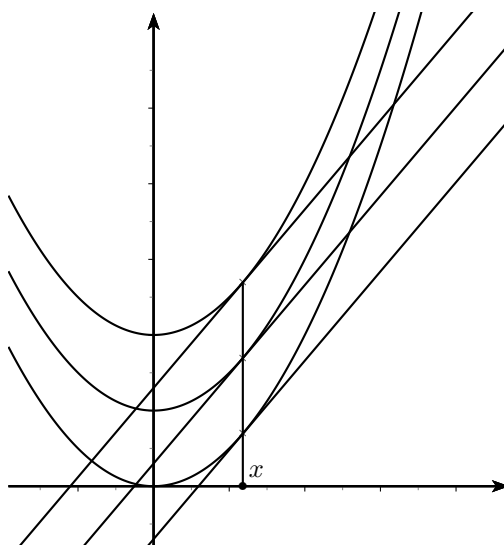


Figura 18.7: alcune primitive della funzione $f(x) = x$, si nota che le tangenti nel punto di ascissa x sono parallele

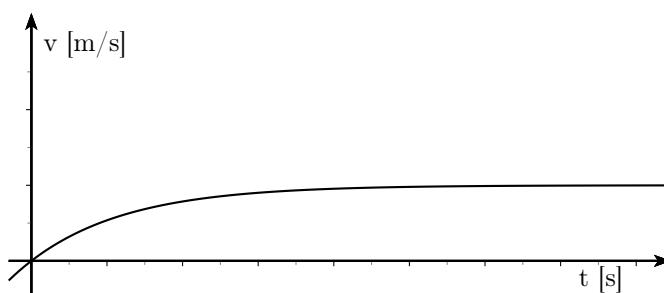


Figura 18.8: In questo caso $m_1 = 1.0$, $m = 1.3$, $b = 1$ e $g = 1$

Come si osserva nella figura 18.8, trascorso un certo tempo la velocità tende a divenire costante. In particolare la *velocità limite* $v_{limite} = \frac{(\rho - \rho')g}{b}$, essendo ρ e ρ' le densità dell'oggetto e del fluido.

Capitolo 19

Le equazioni di terzo grado

19.1 I personaggi in scena

1. **Scipione dal Ferro**

Nato il 6 Febbraio 1465 a Bologna, morto il 5 Novembre 1526 a Bologna.

2. **Gerolamo Cardano**

Nato il 24 Settembre 1501 a Pavia, morto il 21 Settembre 1576 a Roma.

3. **Rafael Bombelli**

Nato nel gennaio del 1526 a Bologna, morto nel 1573 probabilmente a Roma.

19.2 Le soluzioni . . . storiche

Tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli 1992

È certo, da testimonianze di matematici del XVI secolo, che fu il bolognese Scipione dal Ferro a trovare, tra il 1505 e il 1515, la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado del tipo $ax^3+bx=c$. Di Dal Ferro non ci è rimasta alcuna opera, tuttavia presso la Biblioteca Universitaria di Bologna è conservato un manoscritto dal titolo *Regole principali dell'arte maggiore*, detta *Regola della Cosa over d'Alcibra*, che pare si riferisca alle lezioni tenute da Pompeo Bolognetti seniore negli anni 1554-1558 e nel quale, sotto il titolo Di Cavaliere Bolognetti, lui l'ebbe da Messer Scipione dal Ferro, vecchio Bolognese, possiamo leggere quanto segue.

«Il Capitolo di cose e cubo eguale a numero: Quando le cose e li cubi si eguagliano al numero, ridurrai l'equazione al cubo partendo per la quantità delli cubi, poi cuba la terza parte delle cose, poi quadra metà del numero e questo suma con il detto cubato, et la radice di detta summa più la metà del numero fa un binomio et la radice cuba di tal binomio, men la radice cuba del suo residuo val la cosa.»

POMPEO BOLOGNETTI, Regole principali dell'arte maggiore ...

L'«invenzione» di Scipione dal Ferro fu completata da Niccolò Fontana, detto Tartaglia. Tartaglia riassume, in versi, le formule per i tre casi; come l'autore stesso dichiara, scopo dei versi è una miglior memorizzazione delle formule stesse. È interessante notare come, nell'ultima terzina, Tartaglia indichi nel 1534 l'anno in cui ha ottenuto i suoi risultati, ribadendo così la

sua priorità su Cardano il quale, peraltro, nell'Ars magna, aveva ben riconosciuti i meriti del matematico bresciano.

«[...] voglio che sappiati, che per potermi aricordare in ogni mia improvvisa occorrenza tal modo operativo, io l'ho ridotto in uno capitolo in rima; perché io non havessi usato questa cautella spesso me saria uscito di mente, et quantunque tal mio dire in rima non sia molto terso non mi ho curato perché mi basta che mi serva a ridurme tal regola ogni volta, che io il dica, il qual capitolo ve lo voglio scrivere di mia mano acciò che stati sicuro che vi dia tal inventione giusta, et buona.

Quando chel cubo con le cose appresso
se agguaglia a qualche numero discreto
trovan dui altri differenti in esso
Da poi terrai questo per consueto
che'l lor prodotto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale delli
lor lati cubi ben sottratti
varrà la tua cosa principale.
In el secondo de codesti atti
quando che'l cubo restasse lui solo
tu osserverai quest'altri contratti,
Del numero farai due tal part'a volo
che l'una in l'altra si produca schietto
el terzo cubo delle cose in stolo
Dalla qual poi, per commun precetto
torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotai somma sarà il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
se solve col secondo se ben guardi
che per natura son quasi congiunti
Questi trovai, et non con passi tardi
nel mille cinquecente, quatro e trenta
con fondamenti ben sald' e' gagliardi
Nella città dal mar' intorno centa.»

Niccolò TARTAGLIA, *Quesiti et inventioni diverse*, libro IX, quesito XXIII

Se é in parte ingiusto che la formula risolutiva per l'equazione generale di terzo grado sia oggi chiamata «formula di Cardano», non si possono tuttavia non riconoscere i meriti di quest'ultimo. Innanzitutto va osservato che nell'Ars magna compaiono, riferite a precisi esempi numerici, le dimostrazioni della validità delle formule per i vari casi di equazione di terzo grado. Si tratta di dimostrazioni geometriche abbastanza laboriose, che testimoniano di una precisa concezione del pensiero rinascimentale: la superiorità della geometria sulle altre discipline matematiche. E poi grazie al fatto che Cardano abbia studiato le trasformazioni che permettono di ridurre un'equazione di terzo grado completa in una mancante del termine di secondo grado, che le formule di Scipione dal Ferro e Tartaglia acquistano validità generale.

«(A) Ammettiamo ad esempio il cubo [di spigolo] gh e il sestuplo del [suo] lato uguali a 20 e che io ponga due cubi ae e cl la cui differenza sia 20 e tali che il prodotto del lato ac con il lato ck sia 2, cioè la terza parte del numero delle cose, e che io stacchi [su ac] cb uguale a ck ; dico che in tal modo la linea residua ab sarà uguale a gh , cioè al

$$x^3 + 6x = 20$$

si vuole
 dimostrare
 che posto
 $ac^3 - bc^3 = 20$ e
 $ac \cdot bc = 2$,
 $ac - bc$ è
 soluzione
 dell'equazio-
 ne
 $(a+b)^3 =$
 $a^3 + 3a^2b +$
 $3ab^2 + b^3$
 $(ab+bc)^3$

valore della cosa, infatti che ciò fosse per gh era stato già supposto. [Ammettiamo] che io costruisca poi, per il primo supposto del sesto capitolo di questo libro i solidi da , de , df cosicchè per dc intendiamo [d'ora innanzi] il cubo [di spigolo] bc , per df il cubo [di spigolo] ab , per da il triplo [del volume ottenuto con] bc per il quadrato [di lato] ab e per de il triplo ab per il quadrato bc .

Abbiamo pertanto quattro presupposti, due dei quali sono già noti, cioè quanto proviene da ac per ck , o cb , che fa 2 e la differenza del cubo [di spigolo] ac col cubo [di spigolo] cb che è 20.

Il terzo si deduce da questi ed è quanto proviene da [il prodotto tra] ab , bc e ac [preso] tre volte dato che esso è uguale a [la somma dei] residui de e da , e il triplo prodotto tra ab , ac , bc [fa] il sestuplo di ab infatti il prodotto tra ac e bc è 2 dalla prima supposizione, pertanto il suo triplo è 6, e questo prodotto per ab fa [dunque] il sestuplo dello stesso ab . Questo è pertanto il residuo de e da .

Il quarto risulta chiaro dal primo e secondo corollario del capitolo sesto e cioè che df e la differenza tra il cubo [di spigolo] ac sommato al triplo ac per il quadrato cb e il cubo [di spigolo] cb sommato al triplo cb per il quadrato ac .

Si indichi pertanto con α il cubo [di spigolo] ac ; con β il cubo [di spigolo] bc ; con γ il triplo di cb nel quadrato ac ; con δ il triplo di ac nel quadrato cb ; con ϵ la differenza $\alpha - \beta$; con ζ la differenza $\gamma - \delta$; con ϑ la differenza tra $\alpha + \beta$ e $\beta + \gamma$. Pertanto, poiché ϵ è composto [dalla somma] di ζ e ϑ come è facile dimostrare con i numeri che ho messo come esempio a fianco,

$$\epsilon \left| \begin{array}{cc} \alpha & \delta \\ \beta & \gamma \end{array} \right| \zeta \left| \begin{array}{cc} \alpha + \delta & \\ \beta + \gamma & \end{array} \right| \vartheta \quad 20 \left| \begin{array}{cc} 24 & 1 \\ 4 & 18 \end{array} \right| 13 \left| \begin{array}{cc} 25 & \\ 18 & \end{array} \right| 7$$

è precisamente 20 dalla seconda premessa e ζ è il sestuplo di ab e ϑ il cubo [di spigolo] ab pertanto il cubo [di spigolo] ab con il sestuplo di ab cioè con sei cose, infatti ab e il lato del suo cubo, sono uguali a 20. Sarà il cubo gh con il sestuplo di gh uguale al cubo ab con il sestuplo di ab , cioè ab e la cosa ed essa è proprio la differenza dei due lati di prodotto 2 e i cui cubi differiscono di 20.

Quod erat demonstrandum.»

GEROLAMO CARDANO, *Ars magna*, cap. XI, p. 249.

19.3 L'equazioni di 3° « oggi »

Si consideri una generica equazione di 3° grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, la ricerca delle soluzioni può essere ricondotta al calcolo degli zeri della funzione $f(x) = x^3 + mx^2 + px + q$ in quanto si può dividere per $a \neq 0$.

19.3.1 L'equazione $x^3 + px + q = 0$

Merito di Cardano è stato quello di dimostrare che è sempre possibile ricondurre una generica equazione di terzo nella forma: $x^3 + px + q = 0$.

Verificare con Geogebra quanto affermato sopra

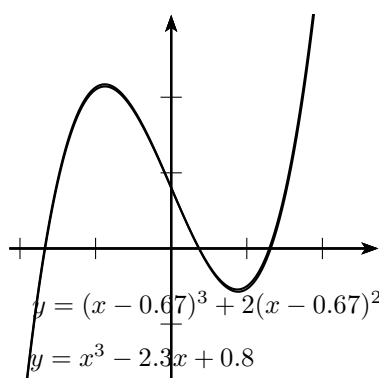


Figura 19.1: È possibile osservare che una trasformazione del tipo $x \leftarrow x - \alpha$ permette di ottenere il risultato

Infatti ponendo $x \leftarrow x - \alpha$ nella $x^3 + mx^2 + px + q = 0$ si ottiene $(x - \alpha)^3 + m(x - \alpha)^2 + p(x - \alpha) + q = 0$ scegliendo $\alpha = \frac{m}{3}$ facciamo sparire il termine di 2° grado, ottenendo quanto desiderato.

Il problema è ora la ricerca delle soluzioni dell'equazione $x^3 + px + q = 0$. Sempre con l'aiuto di GeoGebra studiamo le caratteristiche della funzione $f(x) = x^3 + px + q$. Utilizzando i cursori (slider) p e q è possibile far vedere come q determini solo una traslazione mentre p modifica la forma della cubica.

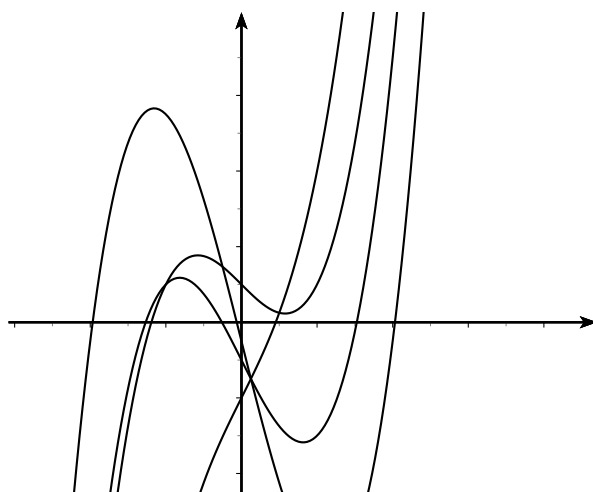


Figura 19.2: le "forme" della funzione $y = x^3 + px + q$ con diversi valori di p e q

Costruire un file Geogebra che ci permetta di studiare le forme del trinomio di terzo grado

1, 2 o 3 soluzioni, quando?

Per rispondere alla domanda utilizziamo GeoGebra: utilizzando quanto sviluppato nel

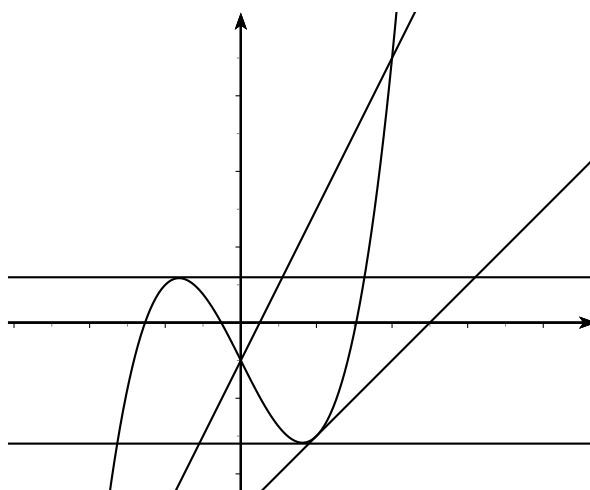


Figura 19.3: Il comportamento della tangente, ed in particolare i valori assunti dal coefficiente angolare nei punti di massimo e minimo relativo

capitolo 18 é possibile calcolare la "derivata" della cubica in oggetto: $m(x_A) = \frac{x_A^3 + px_A + q - (x^3 + px + q)}{x_A - x} = \frac{(x_A - x)(x_A^2 + x_Ax + x^2) + p(x_A - x)}{x_A - x} = (x_A^2 + x_Ax + x^2) + p$

ma se x "diventa" x_A si ottiene $3x_A^2 + p$. Le posizioni di A per cui la tangente é parallela all'asse

la negatività di p ben si vede in GeoGebra interessanti alcuni passaggi che richiamano le proprietà dei radicali

delle ascisse si hanno per $x_{m,M} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ osservando si può convenire che la curva incontra tre volte l'asse delle ascisse se il prodotto $f(x_m) \cdot f(x_M) < 0$, sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\left(q - \left(\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\right) \left(q + \left(\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\right) = \dots = q^2 + \frac{4}{27}p^3.$$

19.3.2 Alla caccia della soluzione

La tecnica può essere tradotta in «*complico per semplificare*» In pratica passiamo da un'incognita x a due u e v , legate dalla condizione $x = u + v$ che ad ogni scelta di u mi permette di determinare v tale che $u + v$ faccia proprio x .

L'equazione diventa $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$, sviluppando e raccogliendo si ha: $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$, scelti u e v in modo che $3uv + p = 0$, perveniamo al seguente sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad \text{a cui si associa l'equazione di secondo grado } z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \text{ le cui soluzioni}$$

u^3 e v^3 sono $-q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}$, qui si scopre che la cubica da cui siamo partiti ammette tre

soluzioni reali quando $q^2 + 4\frac{p^3}{27} < 0$, ma questo ci richiede di ricercare dei modi per trattare le radici quadrate di numeri negativi.

Capitolo 20

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi

20.1 $\mathbb{C}$... con disinvoltura

fu Rafael Bombelli (1572) a riconoscere per primo la necessità di ampliare il campo dei numeri reali mediante nuovi numeri.

«Ho trovato un'altra sorte di radici cubiche legate molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti e maggiore del quadrato della metà del numero ...

*Più via più di meno, fa più di meno.
Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno, fa meno.*

... »

RAFAEL BOMBELLI, L'Algebra, pp. 133-134.

Il problema della soluzione delle equazioni di terzo grado, in presenza di tre radici reali, è serio, e va affrontato per gradi.

20.1.1 Costruzione di $\mathbb{C}$

Supponiamo che $x^2 + 1 = 0$ ammetta soluzioni in un "certo" insieme numerico, in cui però si devono ritrovare tutte (o quasi) le proprietà algebriche di $\mathbb{R}$. Sia i quel numero per cui $i^2 = -1$. Studiamo le potenze di i :

$$\begin{aligned}i &= i \\i^2 &= -1 \\i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1 \\i^5 &= i^4 \cdot i = i \\&\dots\end{aligned}$$

questi semplici calcoli ci permettono di affermare che qualsiasi numero complesso può essere scritto come $x + iy$ dove $x, y \in \mathbb{R}$.

20.1.2 Proprietà algebriche di $\mathbb{C}$

Operazione di somma (+)

è cura dello
studente
dimostrare
quanto non
dimostrato

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$ generici elementi di $\mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (proprietà commutativa)}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (proprietà associativa)}$$

$$\exists 0 = 0 + i0 \text{ elemento neutro per cui: } z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$$

$$\exists -z_1 = -x_1 - iy_1 \text{ elemento simmetrico per cui: } z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$$

Operazione di prodotto (·)

è cura dello
studente
dimostrare
quanto non
dimostrato

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z_3 = x_3 + iy_3$ generici elementi di $\mathbb{C}$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \text{ (proprietà commutativa)}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \text{ (proprietà associativa)}$$

$$\exists 1 = 1 + i0 \text{ elemento neutro per cui: } z_1 1 = 1 z_1 = z_1$$

Calcolo del simmetrico rispetto al prodotto

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$, vogliamo calcolare x_1, y_1 in modo tale che $z z_1 = 1$, $(x x_1 - y y_1) + i(x y_1 + y x_1) = 1 + i0$, da cui: $x x_1 - y y_1 = 1$ e $x y_1 + y x_1 = 0$ che ha come unica soluzione $x = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}$

$$\text{e } y = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2} \text{ cioè: } z_1 = \frac{x_1 - iy_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\text{Si può osservare che: } \frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1 + iy_1} \frac{x_1 - iy_1}{x_1 - iy_1} = \frac{x_1 - iy_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \text{ (proprietà distributiva)}$$

20.1.3 Interpretazione geometrica: il piano di Gauss

Dato che un numero complesso è individuato da una coppia di numeri reali, possiamo costruire un piano cartesiano in cui **rappresentare** i numeri complessi: Questa rappresentazione ci spinge a definire due funzioni:

il modulo di un numero complesso

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è cura dello
studente
dimostrare
quanto non
dimostrato

Che gode delle seguenti proprietà:

$$1. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ disuguaglianza triangolare}$$

$$2. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

operazione di coniugio

$*$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z^* = x - iy$, z^* si definisce complesso coniugato di z . Che gode delle seguenti proprietà:

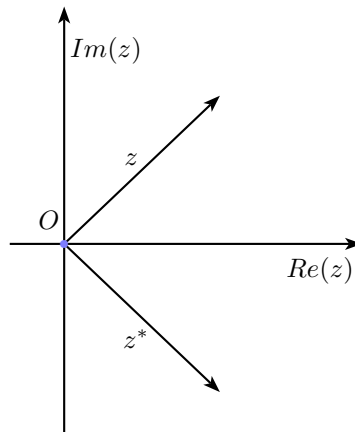


Figura 20.1: Piano di Gauss

i) $(z^*)^* = z$

ii) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

iii) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

iv) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

v) $z z^* = |z|^2$

Dalle precedenti proprietà, si ricava un importante risultato: sia $p_n(z)$ il polinomio: $\sum_{k=0}^n a_k z^k$,

con $a_k \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, definiamo p_n^* il polinomio coniugato di p_n cioè $\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right)^*$. Dimostriamo che $p_n^*(z) = p_n(z^*)$. Infatti applicando le proprietà dell'operazione di coniugio si ha:

$$\sum_{k=0}^n a_k (z^*)^k = \sum_{k=0}^n a_k (z^k)^* = \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right)^*.$$

In particolare se α è una radice di p_n : $p_n(\alpha) = 0$ si ha passando al coniugato $(p_n(\alpha))^* = 0^*$, che è uguale a $p_n(\alpha^*) = 0$. Pertanto anche α^* è radice di p_n . Le radici complesse di un polinomio a coefficienti reali sono sempre pari.

- 1) calcola il modulo e il coniugato dei seguenti numeri complessi:
 - a) $2i, 1+i, -3+i\sqrt{3}$
 - b) $\frac{1}{1+i}, \frac{1}{(1+i)^2}$
- 2) determina le coppie x, y di numeri reali che soddisfano le seguenti relazioni:
 - a) $x+iy = x-iy$
 - b) $x+iy = |x-iy|$
 - c) $|x+iy| = |x-iy|$
 - d) $\frac{x+iy}{z-iy} = x-iy$

20.1.4 Rotazioni e numeri complessi

L'insieme $\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$

Proprietà dell'insieme $\mathbb{U}$ siano $u, v \in \mathbb{U}$

- i) $u^* \in \mathbb{U}$
- ii) $u^{-1} = u^*$
- iii) $uv \in \mathbb{U}$

cioè:

Verificare che $(\mathbb{U}, \cdot)$ è un gruppo

Teorema 54 (il prodotto di complessi come rotazione). Sia $z \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathbb{U}$, la funzione $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $z \rightarrow uz$ è una rotazione con centro l'origine, ogni rotazione con centro l'origine si può rappresentare nella forma $z \rightarrow uz$.

Dimostrazione. $z \rightarrow uz$ è una rotazione:

è un'isometria: detti $P_1 = z_1$ e $P_2 = z_2$ due punti del piano di Gauss, siano $P'_1 = z'_1$ e $P'_2 = z'_2$ i trasformati si ha:

$$\begin{aligned} \overline{P'_1 P'_2} &= |uz_2 - uz_1| = |u(z_2 - z_1)| = \\ &= |u| |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = \\ &= \overline{P_1 P_2} \end{aligned}$$

ha un solo punto unito a meno che non si riduca all'identità:

$u = 1 + 0i = 1$ la trasformazione è l'identità; altrimenti $u \neq 1$ risolvendo: $uz = u$, si ottiene $z(u - 1) = 0$ che ammette come unica soluzione $z = 0 + 0i = 0$.

Sia s una generica rotazione di centro l'origine, essa manda il semiasse delle ascisse positivo in una semiretta a , in particolare il punto $A = (1, 0)$, cioè il numero complesso 1 viene mandato in un punto A' cioè u , considerata ora l'applicazione che ad ogni numero complesso z associa uz , si ha per quanto già dimostrato che questa applicazione è una rotazione e perciò il semiasse delle ascisse positive viene mandato da $z \rightarrow uz$ su a . $\square$

Il teorema appena dimostrato, in sostanza, afferma che esiste un isomorfismo fra il gruppo delle rotazioni con l'operazione di composizione e il gruppo dei complessi unitari con l'operazione di prodotto.

L'insieme $\mathbb{U}$ ha come rappresentazione nel piano di Gauss la circonferenza goniometrica e quindi un generico $u \in \mathbb{U}$ può essere scritto come $u = \cos \alpha + i \sin \alpha$; si è appena costruito l'isomorfismo fra le rotazioni e $\mathbb{U}$ definiamo $rot(\alpha) = u = \cos \alpha + i \sin \alpha$, si ha che $rot(\cdot) : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{U}$, calcoliamo:

$$\begin{aligned} rot(\alpha)rot(\beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ &= rot(\alpha + \beta) \end{aligned} \tag{20.1}$$

L'isomorfismo $rot(\cdot)$ trasforma somme in prodotti, come la funzione esponenziale!

I numeri complessi come rotoomotetie

Sia $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto nel seguente modo: $z = |z| \frac{z}{|z|}$ cioè un numero reale non negativo ($|z|$), un'omotetia, per un complesso unitario $\left(\frac{z}{|z|}\right)$ una rotazione.

Esercizio 9. Scrivere $z = 1 - i$ come rotoomotetia

Soluzione. Calcoliamo $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, ora $z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, nel piano di Gauss il numero $u = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ è una rotazione di un angolo $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, quindi il punto $A = (1, 0)$ del semiasse delle ascisse positive viene mandato nel punto $A' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$;

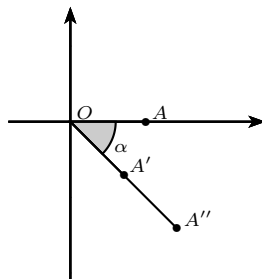


Figura 20.2: Rappresentazione di un generico numero complesso come rotoomotetia

successivamente si moltiplica $u' = A'$ per un numero reale, il suo modulo diviene $|z|$, si applica in sostanza un omotetia di centro O . $\square$

Questo induce a definire una **funzione esponenziale complessa**

$$z = e^{\log |z| + i\alpha} = |z| \operatorname{rot}(\alpha) = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Esercizio 10. Rappresentare il numero complesso $z = 3 - 4i$ in forma esponenziale

Soluzione. $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ scriviamo $z = \underbrace{5}_{r \in \mathbb{R}^+} \left(\underbrace{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i}_{u \in \mathbb{U}} \right)$

$$r = e^{\log(5)}$$

$$u = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\alpha = -\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$z = e^{r+i\alpha}$$

$\square$

20.1.5 Come scrivere un numero complesso

Forma algebrica

$z = x + iy$ definiamo parte reale di z il numero reale $\mathcal{Re}(z) = x$ e parte immaginaria di z il numero reale $\mathcal{Im}(z) = y$.

Forma Trigonometrica

Ogni numero complesso, individua la sua forma trigonometrica ($z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$), infatti, da $z = x + iy$, nell'ipotesi $|z| \neq 0$, si può moltiplicare e dividere per $|z|$ ottenendo: $|z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$, essendo $\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \in \mathbb{U}$ possiamo determinare un ϑ tale che $\frac{x}{|z|} = \cos \vartheta$ $\frac{y}{|z|} = \sin \vartheta$ quando ϑ si pensi determinato a meno di multipli di 2π .

Fra gli infiniti argomenti possibili per un numero complesso non nullo, si considera come argomento preferito quello che soddisfa alla condizione $0 \leq \theta < 2\pi$; esso è detto talvolta la “determinazione principale” dell'argomento di z .

Se z è reale positivo, è $\vartheta = 0$; se è reale negativo è $\vartheta = \pi$. Infatti si ha $\sin \vartheta = \frac{b}{|z|} = 0$; e dall'essere $|z| = a$ segue che $\cos \vartheta = \frac{a}{|z|}$ vale 1 oppure -1 a seconda del segno di a .

Se z è “immaginario puro”, ossia $z = bi$ è $|z| = |b|$ ed è $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ a seconda che b sia positivo oppure negativo. Infatti, si ha $\cos \vartheta = \frac{a}{|z|} = 0$; e dall'essere $|z| = |b|$ segue che $\sin \vartheta = \left(\frac{b}{|z|} \right)$ vale 1 oppure -1 a seconda del segno di b .

È importante osservare che numeri opposti hanno uguale modulo ed argomenti che differiscono di π : e che numeri coniugati hanno uguale modulo ed argomenti opposti: Lo si deduce subito dalle note proprietà del coseno e del seno, relative ai “semiperiodi” e agli “angoli opposti”.

Dall'essere $\cos \vartheta = \left(\frac{a}{|z|} \right)$ e $\sin \vartheta = \left(\frac{b}{|z|} \right)$ si deduce (supposto $a \neq 0$) $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a}$. Si noti bene che ciò non significa affatto che ϑ sia uguale ad $\operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$. Ad esempio, sia $z = -1 + i$; è $|z| = \sqrt{2}$, e dalle uguaglianze $\cos \vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si deduce $\vartheta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$. Si ha qui $\operatorname{tg} \vartheta = -1$, ma $\operatorname{arctg}(-1)$, che è $-\frac{\pi}{4}$, non è l'argomento del nostro numero z . E' vero soltanto che ϑ è dato da uno dei due valori

$$\operatorname{arctg} \vartheta \quad \operatorname{arctg} \vartheta + \pi$$

fra i quali, per scegliere quello buono, sarà sufficiente conoscere il segno di a : per $a > 0$, essendo $\cos \vartheta > 0$ sarà $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, quindi $\vartheta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$, per $a < 0$, $\cos \vartheta < 0$ sarà $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$, quindi $\vartheta = \pi + \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$.

Forma polare

La coppia $(|z|, \vartheta)$ individua il numero complesso z ed è detta forma polare, corrisponde a prendere su una semiretta orientata Ox un segmento OZ di lunghezza $|z|$ e farlo ruotare in senso antiorario di un angolo ϑ per individuare il punto z .

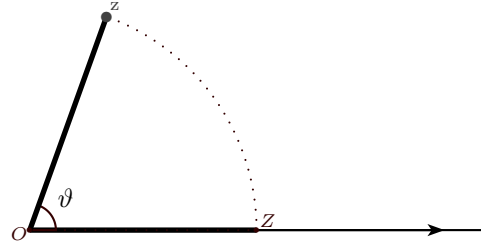


Figura 20.3: Forma polare di z

Forma esponenziale

Come già introdotto si può definire la forma esponenziale di un numero complesso nel seguente modo:

$$z = e^{\log |z| + i\alpha} = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Utilizzando le proprietà delle funzioni esponenziali e goniometriche, possiamo “facilmente” calcolare le potenze e le radici di numeri complessi!

20.1.6 Radici n-esime

Ci occupiamo, ora, del problema dell'estrazione della radice n-esima di un numero complesso. Siano $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$: in analogia con il caso reale, un numero $w \in \mathbb{C}$ è una radice n-esima di z se $w^n = z$.

Se $z = 0$, allora esiste una sola radice n-esima $w = 0$. supponiamo quindi $z \neq 0$.

Cerchiamo tutte le possibili radici di z usando la forma trigonometrica. Siano

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad e \quad w = \eta(\cos \psi + i \sin \psi)$$

con $\rho \neq 0$. Allora l'uguaglianza $w^n = z$ porta a

$$\eta^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

da cui

$$\begin{cases} \eta^n = \rho \\ n\psi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima uguaglianza coinvolge numeri reali positivi $\eta, \rho > 0$: possiamo dunque estrarre la radice n-esima usuale dei numeri reali ottenendo: $\eta = \sqrt[n]{\rho}$; passando agli argomenti si ha $\psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, si ottengono dunque i numeri complessi della forma

$$w = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k \in \mathbb{Z} \quad (20.2)$$

Per contare quanti numeri complessi effettivamente diversi sono dati dalla formula 20.2, dobbiamo evitare per gli argomenti i multipli di 2π : si può scegliere $k = 0, 1, \dots, n-1$ ottenendo come argomenti:

$$\psi_0 = \frac{\theta}{n}, \psi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \dots, \psi_{n-1} = \frac{\theta + (2n-1)\pi}{n}$$

Il precedente risultato è dovuto a De Moivre⁽¹⁾.

Radici n-esime dell'unità

$$1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

Calcoliamo $\sqrt[n]{1}$, $x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, riportiamo (si vedano Figura 20.4a, 20.4b, 20.4c e 20.4d) nel piano di Gauss le soluzioni:

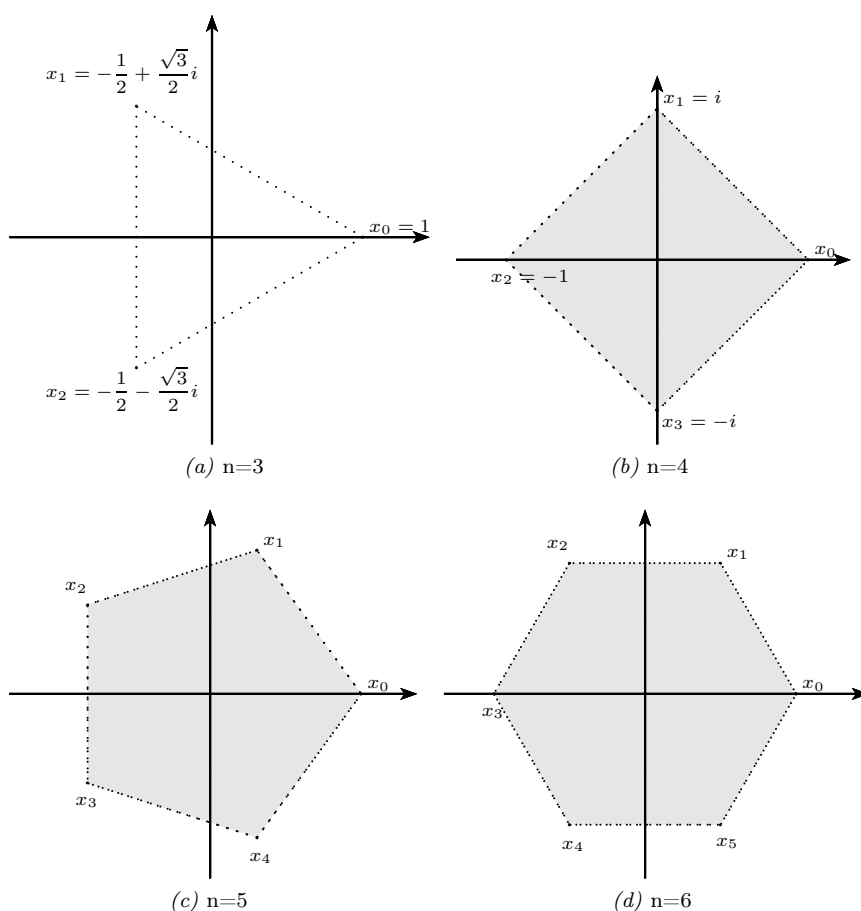


Figura 20.4: $x_i = \sqrt[n]{1}$

$$n=3 \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2$$

$$n=4 \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

$$n=5 \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

¹Abraham de Moivre nato il 26 maggio 1667 a Vitry-le-Francois nella regione di Champagne in Francia, morto a Londra il 27 novembre 1754. Pioniere nello sviluppo della geometria analitica e nel calcolo della probabilità

$$n=6 \quad x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right) \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Esercizio 11. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^3 + 1 = 0$

Soluzione. Stiamo cercando gli $x \in \mathbb{C}$ tali che $x^3 = -1$ cioè cerco $\sqrt[3]{-1}$
scriviamo il complesso -1 nella forma $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, $|-1| = 1$, cerco gli angoli θ tali che $\cos \theta = -1$ e $\sin \theta = 0$, $\theta = \pi + 2k\pi$

$$x_0 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1,$$

$$x_1 = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$x_2 = \cos\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

□

20.2 Con Python

20.2.1 Numeri complessi con sympy

```
[1]: from sympy import *
      init_printing()
```

```
[2]: x,y = symbols('x,y',real = True)
      z = symbols('z')
```

Scrivere in forma algebrica $z_1 \in \mathbb{C}$

```
[3]: z1 = ((1+2*I)**3-(2-I)**2)/((1+2*I)**2+(1+3*I)**2)
      z1, expand(z1)
```

```
[3]: 
$$\left( \frac{(1+2i)^3 - (2-i)^2}{(1+2i)^2 + (1+3i)^2}, \frac{174}{221} + \frac{118i}{221} \right)$$

```

Scrivere z_1 in forma trigonometrica: calcoliamo il modulo e l'argomento

```
[4]: Abs(expand(z1)), arg(z1)
```

```
[4]: 
$$\left( \frac{10\sqrt{442}}{221}, \operatorname{atan}\left(\frac{59}{87}\right) \right)$$

```

caso più digeribile:

```
[5]: z2 = 1+I*sqrt(3)
      Abs(expand(z2)), arg(z2)
```

```
[5]: 
$$\left( 2, \frac{\pi}{3} \right)$$

```

Risolvi in $z^4 = 1 + i$ e $z^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

```
[6]: solve(Eq(z**4,1+I),z)
```

```
[6]:
```

$$\left[-\sqrt[8]{2} \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sqrt[8]{2}i \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2} \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) - \sqrt[8]{2}i \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), -\sqrt[8]{2} \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) - \sqrt[8]{2}i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right), \sqrt[8]{2} \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sqrt[8]{2}i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right]$$

```
[7]: solve(z**4+Rational(1,2)+ (sqrt(3)/2)*I,z)
```

```
[7]: [-1/2 - sqrt(3)i/2, 1/2 + sqrt(3)i/2, -sqrt(3)/2 + i/2, sqrt(3)/2 - i/2]
```

20.2.2 Trasformazioni in $\mathbb{C}$

```
[1]: import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Descrizione problema

Analisi delle trasformazioni del piano di Gauss in sé: data una griglia di numeri complessi $z = x + iy$ la trasformata sarà una griglia formata da $z_1 = f(z)$. Ad esempio se $f(z) = z^2$ si ha che per ogni z della griglia, si ottengono le $z_1 = x_1 + iy_1$:

$$\begin{cases} x_1 = x^2 - y^2 \\ y_1 = 2xy \end{cases} \quad (20.3)$$

```
[2]: n = 800
numRC = 40
xm = -2
xM = 2
dx = (xM-xm)/n
delta = (xM-xm)/numRC
s = 0.01
sl = 0.3 #spessore linea della griglia
```

Costruisci griglia

```
[3]: def a0riz(x,y) :
    pX = []
    pY = []
    xp = x
    yp = y
    pX.append(xp)
    pY.append(yp)
    for k in range(n) :
        yp += dx
        pX.append(xp)
        pY.append(yp)
    pX = np.array(pX,dtype=np.float64)
    pY = np.array(pY,dtype=np.float64)
    l = plt.scatter(pX,pY,s,color = 'black', linewidths = sl)
```

```

    return l
##
def aVer(x,y) :
    pX = []
    pY = []
    xp = x
    yp = y
    pX.append(xp)
    pY.append(yp)
    for k in range(n) :
        xp += dx
        pX.append(xp)
        pY.append(yp)
    pX = np.array(pX,dtype=np.float64)
    pY = np.array(pY,dtype=np.float64)
    l = plt.scatter(pX,pY,s,color = 'black', linewidths = sl)
    return l
##
def aOrizf(x,y,funz) :
    pXf = []
    pYf = []
    xp = x
    yp = y
    pXf.append(xp)
    pYf.append(yp)
    for k in range(n) :
        yp += dx
        xpf,ypf = f(xp,yp,funz)
        pXf.append(xpf)
        pYf.append(ypf)
    pXf = np.array(pXf,dtype=np.float64)
    pYf = np.array(pYf,dtype=np.float64)
    lf = plt.scatter(pXf,pYf,s,color = 'black', linewidths = sl)
    return lf
##
def aVerf(x,y,funz) :
    pXf = []
    pYf = []
    xp = x
    yp = y
    pXf.append(xp)
    pYf.append(yp)
    for k in range(n) :
        xp += dx
        xpf,ypf = f(xp,yp,funz)
        pXf.append(xpf)
        pYf.append(ypf)
    pXf = np.array(pXf,dtype=np.float64)

```

```

pYf = np.array(pYf,dtype=np.float64)
lf = plt.scatter(pXf,pYf,s,color = 'black', linewidths = s1)
return lf

```

Funzioni di trasformazione $f(z)$

```

[4]: def f(x,y,tf) :
      cx = x**3-3*x*y**2
      cy = -y**3+3*y*x**2
      modulo = x**2+y**2
      if modulo < 0.05 :
          bx = 0
          by = 0
      else :
          bx = x/modulo
          by = -y/modulo
      ax = x**2-y**2
      ay = 2*x*y
      if tf == 1 :
          rispx = ax
          rispy = ay
      elif tf == 2 :
          rispx = bx
          rispy = by
      else :
          rispx = cx
          rispy = cy
      return rispx,rispy

[5]: plt.figure(figsize=(16, 16))
      riquadroBase = plt.subplot(2,2,1)
      riquadroBase.set_title("Griglia di partenza")
      riquadroBase.axis('off')
      for k in range(1,numRC,1) :
          aOriz(xm+k*delta,xm)
          aVer(xm,xm+k*delta)
      ##
      riquadro1 = plt.subplot(2,2,2)
      riquadro1.set_title("funzione di trasformazione z^2")
      riquadro1.axis('off')
      for k in range(1,numRC-1,1) :
          aOrizf(xm+k*delta,xm,1)
          aVerf(xm,xm+k*delta,1)
      ##
      riquadro2 = plt.subplot(2,2,3)
      riquadro2.set_title("funzione di trasformazione 1/z")
      riquadro2.axis('off')
      for k in range(1,numRC-1,1) :

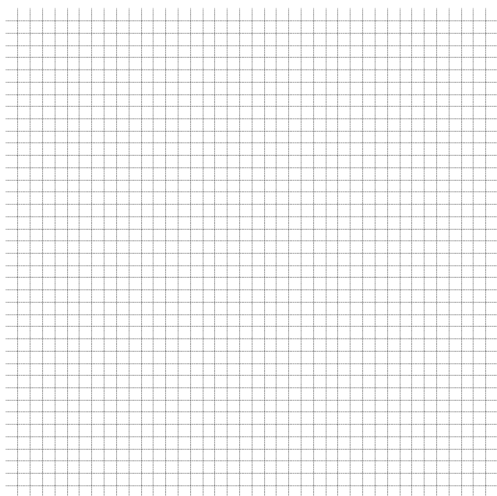
```

```

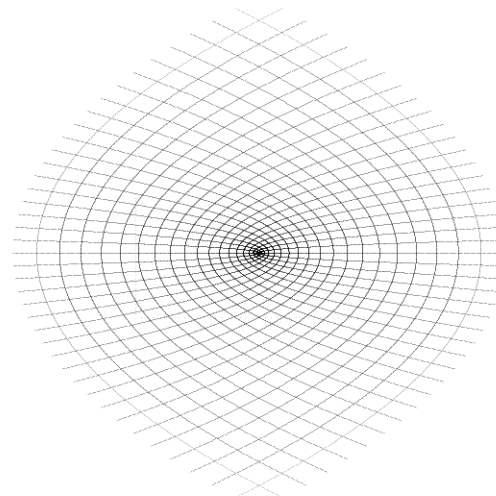
    aOrizf(xm+k*delta,xm,2)
    aVerf(xm,xm+k*delta,2)
#
riquadro3 = plt.subplot(2,2,4)
riquadro3.set_title("funzione di trasformazione z^3")
riquadro3.axis('off')
for k in range(1,numRC-1,1) :
    aOrizf(xm+k*delta,xm,3)
    aVerf(xm,xm+k*delta,3)
plt.show()

```

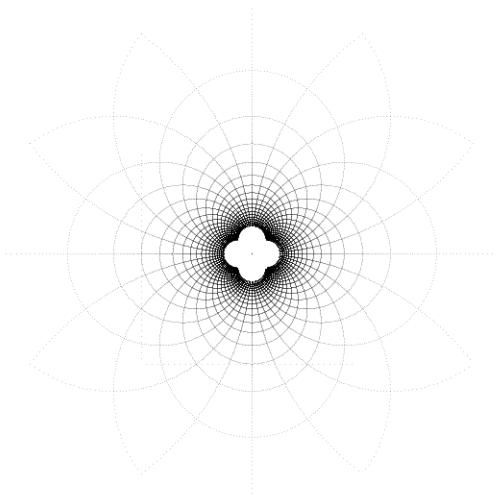
Griglia di partenza



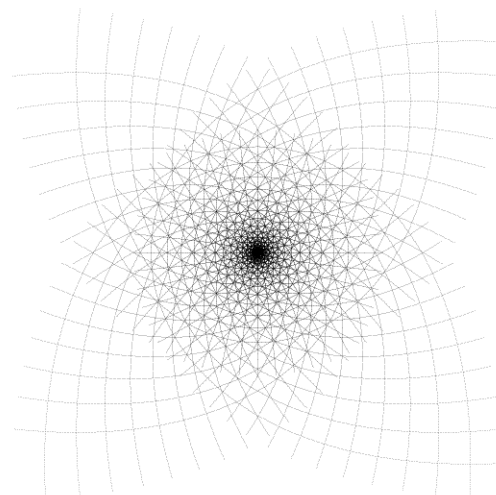
funzione di trasformazione z^2



funzione di trasformazione $1/z$



funzione di trasformazione z^3



Capitolo 21

Geometria solida I

21.1 I personaggi

21.1.1 Bonaventura Francesco Cavalieri



Nato nel 1598 a Milano morto il 30 novembre 1647 a Bologna

21.1.2 Leonhard Euler

Nato il 15 aprile 1707 a Basilea (Svizzera) morto il 18 settembre 1783 a St. Pietroburgo (Russia)



21.1.3 Galileo Galilei



Nato il 15 febbraio 1564 a Pisa morto l'8 gennaio 1642 ad Arcetri (Firenze)

21.2 Dal Piano allo Spazio:

Postulato 1. Dati tre punti non allineati esiste **uno e un solo** piano che li contiene.

Postulato 2. Se una retta ha in comune con un piano due punti distinti allora ogni altro punto della retta appartiene al piano.

21.2.1 Posizioni delle rette nello spazio:

Definizione 75 (Rette parallele nello spazio). Due rette nello spazio si dicono parallele se coincidono oppure giacciono sullo stesso piano e non hanno punti in comune

Teorema 55 (sulle rette incidenti). Due rette nello spazio aventi un punto in comune sono complanari

Nello spazio esistono rette non complanari, tali rette si dicono sghembe.

Proviamo ora a costruire la geometria nello spazio utilizzando quanto imparato nel piano:

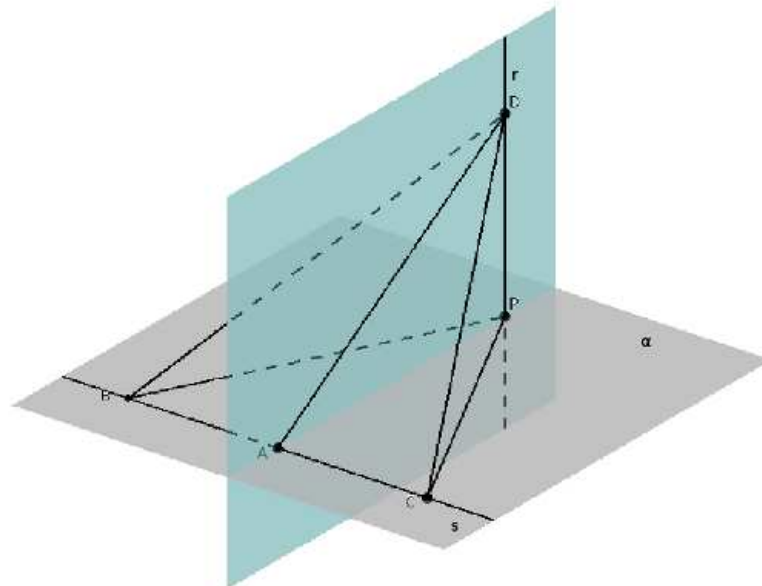
21.2.2 Perpendicolarità

Nel piano: data una retta ed un punto (della retta o esterno ad essa) esiste una sola perpendicolare alla retta passante per quel punto.

Nello spazio le cose vanno un po' diversamente:

- esiste una sola perpendicolare ad una retta r passante per un punto B esterno ad essa; (il problema infatti si riconduce al piano in quanto la retta e la perpendicolare in quanto incidenti sono complanari)
- esistono infinite perpendicolari alla retta s passanti per un suo punto A . (le rette perpendicolari appartengono ad un piano, il piano perpendicolare alla retta r)

Teorema 56 (Il teorema delle tre perpendicolari). Se dal piede P di una retta r perpendicolare al piano α si conduce la perpendicolare PA ad una retta s di α allora la s è perpendicolare al piano delle rette r e PA .



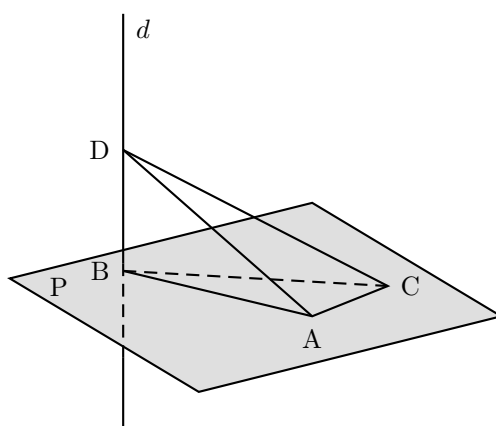
Dimostrazione. Siano B e C due punti di s tali che A risulti il punto medio di BC , e quindi, sia D un generico punto di r , mostriamo che i triangoli DPC e DPB sono congruenti: infatti, $PB = PC$, PD è comune inoltre $\widehat{DPC} = \widehat{DPB} = \frac{\pi}{2}$ in quanto r è perpendicolare ad α e pertanto è perpendicolare ad ogni retta di α passante per P ; pertanto $DC = DB$, il triangolo DBC è isoscele e quindi la mediana relativa alla base coincide con l'altezza quindi $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$, la retta DA è perpendicolare ad s . $\square$

Una applicazione del teorema delle tre perpendicolari

Tratto da un esame di stato francese ⁽¹⁾:

Problema 20. Su di un piano P , si consideri il triangolo ABC rettangolo in A .

Sia d la retta perpendicolare, in B , al piano P . Prendi su d un punto D diverso da B .



1) Dimostra che la retta AC è perpendicolare al piano BAD .

Definito *quadriretto* un tetraedro in cui le quattro facce sono triangoli rettangoli.

a) Dimostra che il tetraedro $ABCD$ è quadriretto.

b) i) Dimostra che lo spigolo CD è il più lungo in $ABCD$.

ii) Sia I il punto medio di CD . Dimostra che I è equidistante dai quattro vertici del quadriretto $ABCD$.

Teorema 57 (sulle rette perpendicolari). Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.

21.2.3 Dal concetto di angolo nel piano al diedro nello spazio

Nella geometria piana sono stati introdotti i semipiani, in maniera analoga definiamo un semispazio: ogni piano π divide lo spazio in tre sottoinsiemi: s' , s'' e π . I sottoinsiemi s' ed s'' sono tali che un segmento BC i cui estremi appartengono entrambi ad s' (o entrambi ad s'') non ha alcun punto in comune con π . Gli insiemi: $S' = s' \cup \pi$ e $S'' = s'' \cup \pi$ si dicono semispazi.

Definizione 76 (Diedro convesso). Siano A e B due semispazi aventi per origine rispettivamente i piani α e β incidenti secondo la retta r , l'insieme $A \cap B$ è detto diedro convesso.

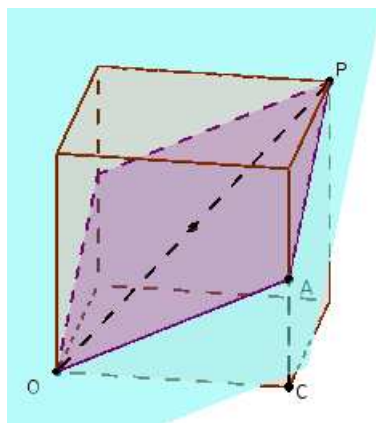
¹Baccalauréat S Liban 31 mai 2019

Definizione 77 (Sezione normale). si dice sezione normale di un diedro l'angolo piano intersezione del diedro con un piano perpendicolare allo spigolo

con un esempio, cerchiamo di capire la necessità di definire la *sezione normale di un diedro*, piani perpendicolari, ad esempio, possono essere sezionati con angoli non tutti retti. Perciò quando si parla di **sezione di un diedro** si intende la sua sezione **normale**.

Un problema per capire meglio:

Problema 21. Si consideri un cubo di spigolo unitario, OP è una sua diagonale, sia π un generico piano passante per OP che interseca due spigoli opposti in A e B . Si verifichi che: il quadrilatero $OAPB$ è un parallelogramma e che l'angolo $\widehat{OAD}$ non è sempre retto.



Soluzione. il quadrilatero $OAPB$ è un parallelogramma in quanto piani paralleli individuano sullo stesso piano rette parallele. Sia ora $\overline{AC} = x$ con $0 \leq x \leq 1$, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo OCA retto in C per costruzione: $\overline{OA} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{CA}^2} = \sqrt{1+x^2}$ e $\overline{AP} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{DA}^2} = \sqrt{1+(1-x)^2}$; dato che $\overline{OP} = \sqrt{3}$, applicando il teorema del coseno al triangolo OAP , si ha: $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 - 2\overline{OA}\overline{AP}\cos(\widehat{OAP})$ con "facili calcoli" (ovviamente lasciati allo studioso) si ottiene: $\cos(\widehat{OAP}) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{(1+x^2)(2-2x+x^2)}}$ $\square$

Definizione 78 (Distanza punto piano). Si dice distanza di un punto da un piano il segmento di perpendicolare condotto dal punto al piano.

21.2.4 Angoloidi

Definizione 79 (Angoloide). Date in un certo ordine n semirette (con $n > 2$) aventi l'origine in comune, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due di esse lascia le restanti $n - 2$ semirette nello stesso semispazio, si dice angoloide l'intersezione degli n semispazi che hanno per origine quei piani che contengono le $n - 2$ semirette restanti.

Se $n = 3$ l'angoloide prende il nome di triedro.

L'origine V delle semirette è il vertice dell'angoloide, le semirette $VA = a$, $VB = b$, ... sono gli spigoli; gli angoli (convessi) $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$... sono le facce.

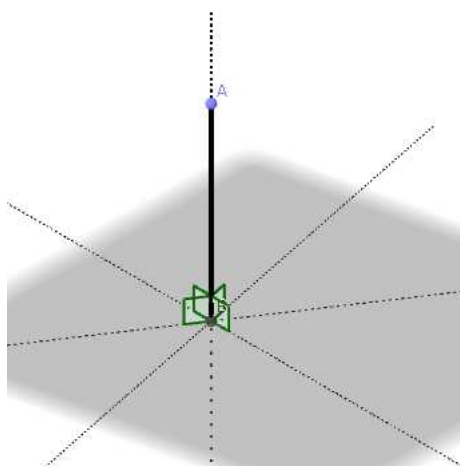
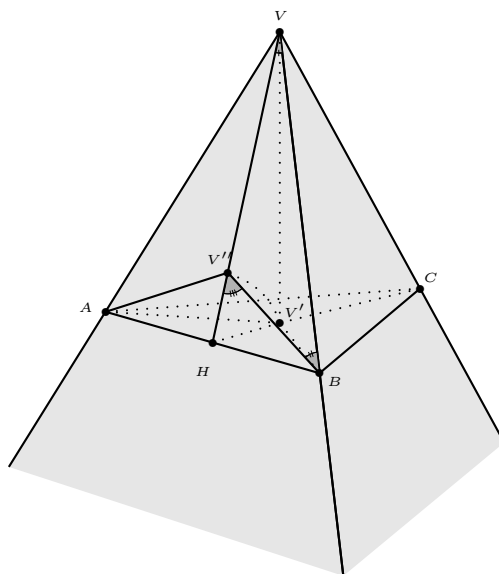


Figura 21.1: Il segmento AB è il segmento di perpendicolare, la sua lunghezza $\overline{AB}$ è la distanza di A dal piano rappresentato in figura

Teorema 58 (somma delle facce di un triedro). La somma delle facce di un triedro è minore di un angolo giro.



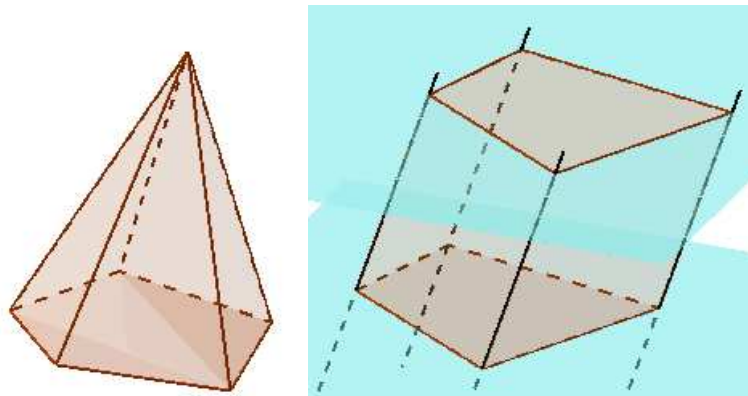
Dimostrazione. Fissiamo sugli spigoli del triedro tre segmenti $VA = VB = VC$, detti VV' la distanza di V dal piano individuato dai punti A , B e C ed H il punto medio di AB . I segmenti BV' e AV' sono congruenti in quanto proiezioni di segmenti congruenti (VB e VA). Il triangolo $BV'A$ è pertanto isoscele, quindi $\widehat{V'HB} = \frac{\pi}{2}$. Facciamo ora ruotare il triangolo $BV'A$ attorno ad AB in modo da portare V' sulla faccia ABV , MV'' è minore di MV in quanto nel triangolo

$MV'V$ rettangolo in O MV è l'ipotenusa. L'angolo $\widehat{MV''B} = \widehat{V''VB} + \widehat{VBV''}$, pertanto si ha che $\widehat{AVB} < \widehat{AV''B}$, ripetendo il ragionamento per le altre tre facce si ottiene la tesi. $\square$

21.2.5 Piramidi e prismi

Definizione 80 (Piramide). Si dice piramide l'intersezione fra un angoloide e un semispazio contenente il vertice dell'angoloide.

Definizione 81 (Piramide retta). Una piramide si dice retta quando ha per base un poligono circoscrivibile ad un cerchio il cui centro O è la proiezione del vertice della piramide.



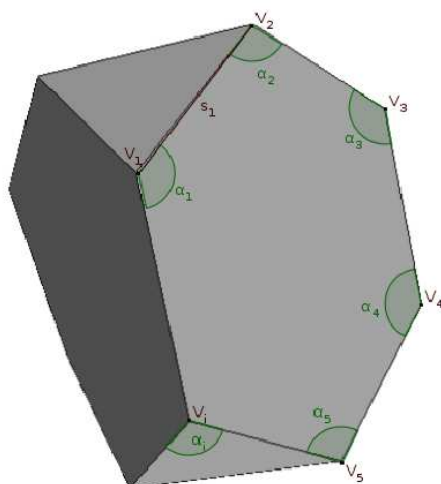
Definizione 82 (Prisma indefinito). Date in un certo ordine n rette (con $n > 2$) parallele, a tre a tre non complanari e tali che il piano individuato da due di esse lascia le restanti $n-2$ rette nello stesso semispazio, si dice prisma indefinito l'intersezione degli n semispazi che hanno per origine quei piani che contengono le $n-2$ rette restanti (la definizione è la stessa dell'angoloide basta "spingere" l'origine delle semirette all'infinito)

Definizione 83 (Prisma). Si dice prisma l'intersezione di un prisma indefinito con due semispazi aventi per origine due piani paralleli.

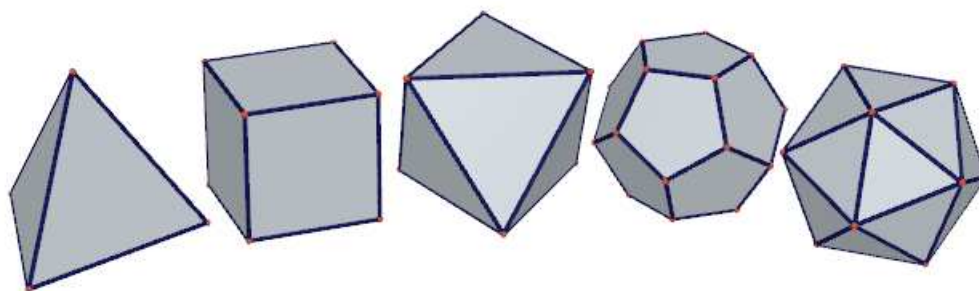
Definizione 84 (prisma retto, prisma regolare). Un prisma si definisce retto quando le basi sono perpendicolari agli spigoli laterali, è regolare se è retto ed ha per base un poligono regolare.

21.2.6 Poliedri

Definizione 85 (Poliedro). Si dice poliedro convesso l'intersezione degli n semispazi che hanno per origine i piani contenenti i poligoni convessi a due a due non complanari e tali che ogni loro lato sia comune a due soli poligoni e disposti in modo tale che ciascuno di essi lasci tutti gli altri dalla medesima parte.



Definizione 86 (Poliedro regolare). Si dice regolare un poliedro le cui facce sono tutti poligoni regolari uguali fra loro e tale che su ogni vertice concorra lo stesso numero di facce.



21.3 Proprietà dei poliedri

Osserviamo che i poliedri regolari sono in numero finito, a differenza dei poligoni regolari che sono infiniti:

Definizione 87 (p : numero medio dei lati dei poligoni). Sia p il numero medio dei lati dei poligoni che formano le facce del poliedro

$$p = \frac{2S}{F}$$

Definizione 88 (q : valenza). Sia q (*valenza*) il numero medio degli spigoli che concorrono su di un vertice

$$q = \frac{2S}{V}$$

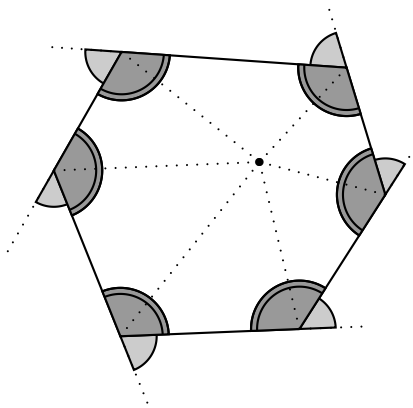
21.3.1 Costruire i poliedri regolari

I poliedri regolari: facce poligoni regolari uguali; valenza fissa:

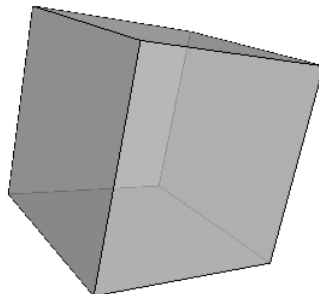
- $p = 3, q = 3$
 $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = 2$ e quindi $S = 6, F = 4, V = 4$
- $p = 3, q = 4$
 $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{4} - S = 2$ da cui $S = 12, F = 8, V = 6$
- $p = 3, q = 5$
 $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$ da cui $S = 30, F = 20, V = 12$
- $p = 4, q = 3$
 $\frac{2S}{4} + \frac{2S}{3} - S = 2$ da cui $S = 12, F = 6, V = 8$
- $p = 5, q = 3$
 $\frac{2S}{5} + \frac{2S}{3} - S = 2$ da cui $S = 30, F = 12, V = 20$

21.4 La formula di Eulero

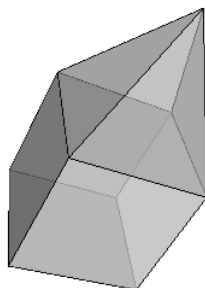
Gli angoli dei poligoni nel piano godono di alcune proprietà:



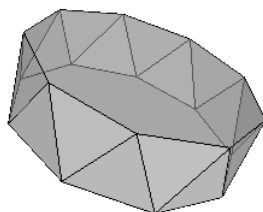
la somma degli angoli interni è uguale a: $\pi(n - 2)$ cioè tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due; la somma degli angoli esterni è sempre un angolo giro 2π . Valutiamo la somma degli angoli delle facce: Non sembra ci siano particolari relazioni, ma possiamo ricordare il teorema 58, in ogni vertice la somma delle facce è minore di 2π , analizziamo ora alcuni poliedri per cercare una relazione che coinvolga, gli angoli delle facce:



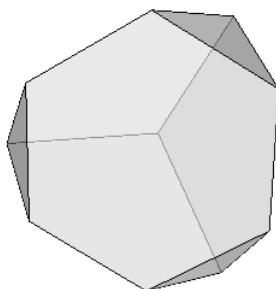
cubo: $\sum \alpha_i = 12\pi, 2\pi V = 16\pi$



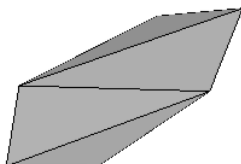
torre: $\sum \alpha_i = 14\pi, 2\pi V = 18\pi$



9-prisma: $\sum \alpha_i = 32\pi, 2\pi V = 36\pi$



sezione cubo: $\sum \alpha_i = 16\pi, 2\pi V = 20\pi$



diamante: $\sum \alpha_i = 8\pi, 2\pi V = 12\pi$

in sintesi:

poliedro	$\sum \alpha_i$	$2\pi V$	$2\pi V - \sum \alpha_i$
cubo	12π	16π	4π
torre	14π	18π	4π
9-prisma	32π	36π	4π
sezione	16π	20π	4π
diamante	8π	12π	4π

Congettura 1. $2\pi V - \sum \alpha_i = 4\pi$

La congettura richiede, però, una dimostrazione. Proviamo ad utilizzare ciò che conosciamo: si può calcolare $\sum \alpha_i$ utilizzando la formula relativa agli angoli interni di un poligono: ogni faccia del poliedro è un poligono: $\sum \alpha_i = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2)$ dove F è il numero delle facce n_i il numero degli spigoli della faccia i -esima; sviluppiamo i calcoli: $\sum \alpha_i = \pi \left(\sum_{i=1}^F n_i - 2F \right)$ nella somma $\sum_{i=1}^F n_i$ ogni spigolo del poliedro è contato due volte pertanto:

Teorema 59 (della somma degli angoli delle facce). In ogni poliedro convesso, avente F facce e S spigoli si ha:

$$\sum \alpha_i = 2\pi (S - F) \quad (21.1)$$

sfruttando la congettura 1 si ottiene:

$$2\pi V - 4\pi = 2\pi (S - F)$$

cioè:

Teorema 60 (di Eulero ($F + V - S = 2$)). In ogni poliedro convesso, avente F facce, S spigoli e V vertici si ha:

$$F + V - S = 2$$

Dimostrare il teorema è equivalente a dimostrare la congettura 1.

Osserviamo che in un poliedro la somma degli angoli delle facce $\sum \alpha_i$ per la 21.1, dimostrata, dipende solo dal **numero** di spigoli e dal **numero** delle facce, pertanto deformando un poliedro senza alterare il numero delle facce e il numero degli spigoli non modifico $\sum \alpha_i$. Un generico poliedro può essere schiacciato in modo da portare la faccia superiore su quella inferiore, in questo modo: può essere così calcolato: la faccia H su cui ho schiacciato tutto il poliedro ha: la

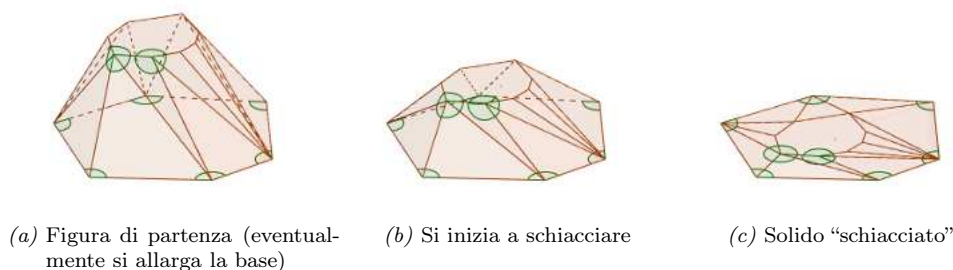


Figura 21.2: Solido sottoposto ad una trasformazione che mantiene F , V ed S

"parte sotto" in cui la somma degli angoli è $\pi(V_H - 2)$ nella "parte sopra" in ogni vertice interno

la somma degli angoli è un angolo giro quindi la somma vale $2\pi(V - V_H)$ sommo a quanto trovato gli angoli della faccia H, e ottengo:

$$\begin{aligned}\sum \alpha_i &= 2\pi(V_H - 2) + 2\pi(V - V_H) = \\ &= 2\pi(V - 2)\end{aligned}$$

21.5 La storia ci insegna: Il Principio di Cavalieri

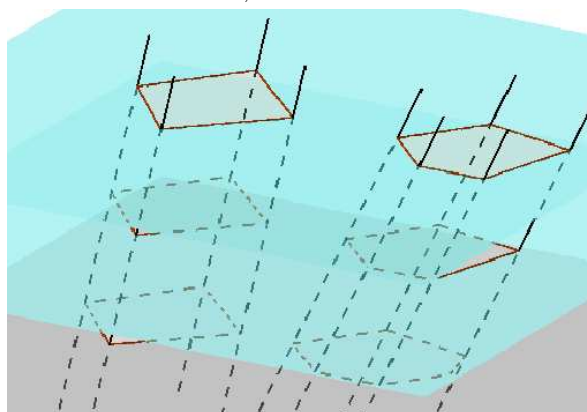
Nel 1635 apparve la *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, il trattato al quale Cavalieri aveva cominciato a lavorare oltre una decina d'anni prima quando, come scriveva al suo maestro Galileo, aveva scoperto la possibilità di dimostrare «alcune proposizioni d'Archimede diversamente da lui». Nelle pagine introduttive della *Geometria Cavalieri* spiega come sia giunto a elaborare il suo metodo degli indivisibili, a partire dallo studio dei classici e di autori moderni come Luca Valerio e Kepler.

”Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi, che sono originati da una rivoluzione intorno a un asse, e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi stupivo in verità moltissimo del fatto che le figure generate tralignassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori, da mostrar di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono, della stessa base, per rotazione attorno a un medesimo asse, e il triplo di esso, mentre tuttavia nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il detto cono. Similmente, se abbiamo costruito, con la stessa base, e attorno allo stesso asse, una semisfera (o un semisferoide (semiellissoide di rotazione)), nonché un conoide parabolico [paraboloide di rotazione], e un cilindro, quest'ultimo sarà una volta e mezza la semisfera (o il semisferoide [semiellissoide]), il doppio del conoide [paraboloide], mentre tuttavia il parallelogramma che genera il detto cilindro starà alla circonferenza (o all'ellisse) generatrice iscritta all'incirca come 14 sta a undici, alla parabola invece come tre sta a due. Si può trovare la stessa verità anche in figure piane generate dalla rotazione di segmenti rettilinei intorno a un punto, quali sono i cerchi. Si suppongano infatti dati parecchi cerchi concentrici, aventi i raggi proporzionali ai numeri interi successivi a partire dall'unità; i cerchi stessi non confermeranno la medesima proporzione dei raggi, ma staranno tra di loro come i quadrati dei raggi. Quando poi, dopo aver tratto queste osservazioni, prendendo in considerazione i centri di gravità delle figure piane, e solide, mi imbattei in una consimile diversità, il mio stupore aumentò ancora; nel cono infatti il centro di gravità è sull'asse e dista dalla base della quarta parte di esso, mentre nel triangolo che genera il cono stesso e ancora sull'asse, distante da essa della terza parte dell'asse. Similmente nel paraboloide di rotazione detto centro è sull'asse e dista dalla base della terza parte di esso, mentre nella parabola che lo genera si allontana dalla base stessa per due terzi dell'asse. Avendo dunque più e più volte fermato l'attenzione su tale diversità in moltissime altre figure, mentre prima, raffigurandomi ad esempio un cilindro come l'unione di parallelogrammi indefiniti per numero, il cono invece avente la stessa base e lo stesso asse del cilindro, come l'unione di triangoli indefiniti per numero, passanti [gli uni e gli altri] per l'asse, ritenevo che, ottenuto il mutuo rapporto di dette figure piane, dovesse subito venirne fuori anche il rapporto dei solidi da esse generate, risultando invece già chiaramente che il rapporto delle figure piane generatrici non concordava affatto con quello dei solidi da essa generati mi sembrava si dovesse a buon diritto concludere che avrebbe perduto

il tempo e la fatica, e che avrebbe trebbiato inutile paglia, colui che si fosse messo a ricercare la misura delle figure con tale metodo. Ma, dopo avere considerato la cosa un poco più profondamente, pervenni finalmente a questa opinione, e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro, ma paralleli. In questo modo, infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane, quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee (se vengono presi in quel modo, che viene spiegato nel libro II). Avendo dunque considerato il cilindro e il cono già detti secati non più per l'asse, ma parallelamente alla base, trovai che hanno rapporto uguale a quello del cilindro al cono quei [piani] che chiamo nel libro II «tutti i piani» del cilindro a «tutti i piani» del cono, con riferimento la base comune (e precisamente l'insieme dei cerchi che, all'interno del cono e del cilindro, si possono immaginare in certo qual modo come tracce lasciate dal piano che scorre da una base alla base opposta sempre ad essa parallelamente). Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure [quello di] indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi [poi] subito la misura delle figure stesse. La cosa, ritengo, andò come era nei [miei] voti, come risulterà chiaro a chi leggerà tutto. Mi sono poi avvalso di un artificio simile a quello che gli Algebristi sogliono utilizzare per risolvere le questioni proposte. Essi, invero, pur quando le radici dei numeri siano ineffabili, assurde e ignote, ciò non di meno le addizionano, sottraggono, moltiplicano e dividono, e sono persuasi di avere sufficientemente compiuto il loro dovere purché siano riusciti a tirar fuori la notizia desiderata del problema dato. Non altrimenti dunque io stesso mi sono avvalso, per investigare la misura dei continui, della congerie degli indivisibili, linee o piani (presi come è spiegato nel libro II), benché, per quanto concerne il numero di essi, innominabile, assurda e ignota, tuttavia racchiusa in ben visibili limiti per quanto concerne la sua grandezza; come apparirà chiaro a chi legge nel corso dell'opera.

Teorema 61 (Teorema I. Proposizione I). Tutte le linee di transito retto di figure piane quali si vogliano, e tutti i piani di figure solide quali si vogliano, sono grandezze che hanno un rapporto tra di loro confrontabili.

Quando considero tutte le linee, oppure tutti i piani di una qualche figura, io non confronto il loro numero, che ignoriamo, ma soltanto la grandezza, che è uguale allo spazio occupato dalle linee medesime,



essendo congruente ad esso; e poiché quello spazio è racchiuso in confini, pertanto

anche la loro grandezza è racchiusa nei medesimi confini, per la qual cosa ad essa può venire fatta un'addizione, o una sottrazione, sebbene ignoriamo il numero di esse; dico che ciò basta affinché siano mutuamente confrontabili, che altrimenti neppure gli spazi stessi delle figure sarebbero confrontabili. Infatti, o il continuo non è altro se non gli stessi indivisibili; o è qualcos'altro. Se non è nulla di più degli indivisibili, [allora] senza dubbio, se il loro aggregato [congerie] non può essere confrontato, neppure lo spazio, ossia il continuo, sarebbe confrontabile, supponendosi che esso non sia nient'altro, che gli indivisibili stessi. Se poi il continuo è qualcosa di altro oltre agli indivisibili, è giusto ammettere che questo qualcosa di altro giace tra gli indivisibili stessi. Abbiamo dunque che il continuo è risolubile nel «qualche cosa», che compongono il continuo, ancora indefiniti in numero. Infatti, tra due indivisibili qualsivoglia è giusto che giaccia alcunché di quello, che si è detto essere il qualcosa d'altro nel continuo stesso oltre agli indivisibili; infatti [tale qualcosa d'altro] si toglierebbe dal mezzo delle rimanenti allo stesso modo in cui si toglierebbe dal mezzo di due [parti indivisibili]. Stando così le cose non potremmo confrontare tra di loro gli stessi continui, ossia gli spazi, essendo indefiniti di numero gli [elementi] che compongono il continuo. Ma è assurdo dire che continui limitati non siano mutuamente confrontabili, pertanto è assurdo dire che l'aggregato di tutte le linee, o piani, di due figure quali si vogliano, non è suscettibile di mutuo confronto, nonostante che gli elementi che si aggregano, e compongono quell'aggregato, siano indefiniti di numero. Siccome questo [ultimo fatto] non porta con sé difficoltà nel continuo, tanto se il continuo è composto da indivisibili, quanto se non lo è, gli aggregati degli indivisibili sono mutuamente confrontabili, ed hanno un rapporto.

BONAVENTURA CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, libro II.

Il secondo metodo di Cavalieri

Nonostante la ferma convinzione della correttezza del proprio metodo, per evitare che i suoi principi venissero messi in discussione da geometri e filosofi insieme al problema della composizione del continuo, Cavalieri nel settimo libro della *Geometria* dimostra le stesse cose provate in precedenza servendosi di un'altra argomentazione, che nelle successive *Exercitationes geometricæ* (1647) chiamerà «secondo metodo degli indivisibili». Alla base di tale metodo sta il teorema I, ancor oggi noto come «principio di Cavalieri».

La struttura della geometria sviluppata fino a qui, nei sei primi libri, per mezzo del metodo che chiamiamo non impropriamente degli indivisibili, è stata quella che fin qui si è potuta vedere, e i suoi fondamenti sono tali, quali si sono toccati con mano. Essi invero sono così saldi, e incrollabili che, benché percossi dai colpi di sommi ingegni come da colpi di arieti, non si vedrebbero minimamente vacillare, quasi fossero di diamante. E chiaro che ciò si addice massimamente alla dignità delle Matematiche, e alla somma certezza che esse a sé rivendicano nei confronti di tutte le altre scienze umane, senza che nessun filosofo protesti. Se io abbia a sufficienza provato ciò, lascio al giudizio degli altri: chiunque legga queste cose sarà libero infatti di giudicare secondo quel che l'animo gli detta. Non ignoro affatto che attorno alla composizione del continuo, nonché attorno all'infinito, moltissime cose sono messe in discussione dai filosofi, che forse sembrano di ostacolo ai miei principi a non pochi, i quali rimangono perplessi appunto perché ad essi sembra inafferrabile il concetto di tutte le linee, oppure di tutti i piani, quasi fosse più buio delle tenebre cimmerie, oppure perché [stando ad essi] la mia argomentazione cadrebbe nella composizione

del continuo dagli indivisibili; oppure infine perché ho osato collocare come solidissimo fondamento della Geometria un infinito maggiore dell'oceano, a difesa del quale contro i mille argomenti che fanno il giro delle scuole, si giudicano non poter resistere neppure le armi di Achille. Giudicai tuttavia di aver potuto soddisfare costoro per mezzo delle cose, che sono state chiaramente spiegate e dimostrate nel lib. II, prop. I, e nel suo scolio. Quanto alla formazione del concetto di tutte le linee, ovvero di tutti i piani, ritenni che noi possiamo facilmente pervenire ad esso per via di negazione, in modo che precisamente si intenda non escludersi alcuna linea, oppure alcun piano. Quanto poi alla composizione del continuo e chiaro dalle cose prima esposte che noi non ci siamo affatto messi in obbligo di comporlo dagli indivisibili: nostra intenzione, infatti, fu soltanto quella di dimostrare che i continui seguono il rapporto [la proporzione] degli indivisibili, e viceversa, il che può sussistere invero con ambedue le posizioni. Abbiamo infine trattato i detti aggregati di indivisibili non in quanto sembrano gravati dalla condizione dell'infinità, a causa delle infinite linee, e infiniti piani, ma in quanto (e fin dove) ad essi spetta una certa condizione, e natura, di finitezza, di modo che per tale motivo, possono essere e aumentati, e diminuiti, se essi vengono presi così come sono stati definiti. Ma a questi [argomenti] forse rumoreggeranno i Filosofi, e protesteranno i Geometri, che sono abituati ad attingere le purissime acque della verità da limpidiissime fonti, muovendo questi rimproveri: «questo modo di dire sembra ancora piuttosto oscuro; questo concetto di tutte le linee, o di tutti i piani, risulta più duro di quanto convenga: perciò o toglì questo concetto, che è come il nodo gordiano della tua geometria; o almeno spezzalo, se non lo sciogli». Confesso invero di averlo spezzato, o Geometri; lo avrei del tutto rimosso dai libri precedenti, se non mi fosse sembrata azione non degna tenere nascoste a uomini sapientissimi queste novità della Geometria come misteri; così [invece], aggiustati meglio forse, ad opera di qualcuno, questi fondamenti, con le conseguenze dei quali concordano così mirabilmente tante verità anche da altri dimostrate, potranno una qualche volta pervenire allo scioglimento [del nodo] da loro desiderato. Frattanto, quale che sia stato lo scioglimento [di quel nodo] da me tentato, decisi di toglierlo completamente di mezzo nel presente libro, costruendo un'altra volta altri fondamenti, sulla base dei quali vengono comprovate con altra argomentazione, libera dal concetto di infinito, tutte le cose che nei precedenti libri sono state fatte vedere con il metodo degli indivisibili. Ciò è stato fatto da noi in modo particolare [per due motivi]: da una parte perché sia più chiaramente evidente che questa nostra teoria sui Continui non si fregia indegnamente del titolo di Geometria agli occhi di coloro, dai quali otterrà minore approvazione questo nostro metodo degli indivisibili; dall'altra anche affinché si veda che mossi da non lievi ragioni, potendo dimostrare soltanto servendoci dei fondamenti di questo libro tutte le cose che sono state prima dimostrate per mezzo del metodo degli indivisibili, abbiamo seguito anche quel metodo, come nuovo, e degno di considerazione.

Teorema 62 (Teorema I. proposizione I). Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro; e figure solide quali si vogliano collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali tra di loro. Le figure si chiamino poi ugualmente analoghe, se confrontate tra di loro, tanto quelle piane, che quelle solide, e anche [si dica che esse lo sono] rispetto alle linee, o ai piani paralleli, tra i quali si suppongono

collocate, prese come riferimenti, quando sia necessario dirlo esplicitamente.

BONAVENTURA CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, libro VII

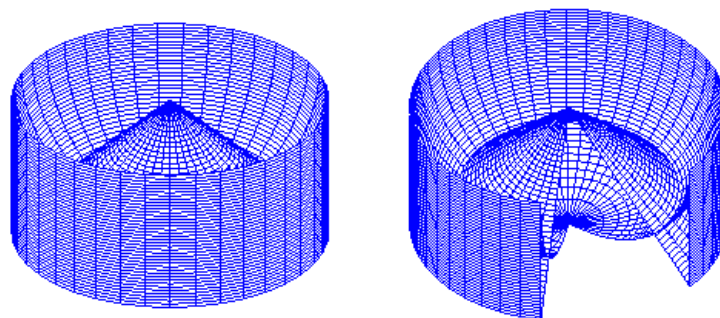
21.5.1 Calcolo del volume della scodella e da questa il volume della sfera.

Ed ora Galileo ci propone un'applicazione "illuminante":

La scodella come presentata da Galileo nei Discorsi:

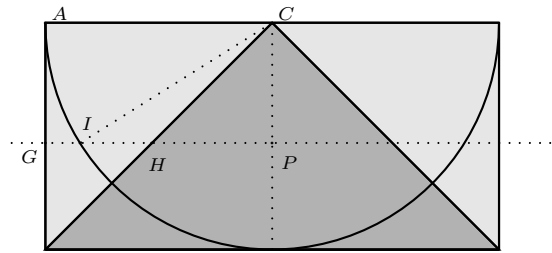
...è necessario farne la figura, perché la prova è pura geometrica. Per tanto intendasi il mezzo cerchio AFB, il cui centro C, ed intorno ad esso il parallelogramma rettangolo ADEB, e dal centro a i punti D, E siano tirate le rette linee CD, CE; figurandoci poi il semidiametro CF, perpendicolare a una delle due AB, DE, immobile, intendiamo intorno a quello girarsi tutta questa figura: è manifesto che dal rettangolo ADEB verrà descritto un cilindro, dal semicircolo AFB mezza sfera, e dal triangolo CDE un cono. Inteso questo, voglio che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale, dalla figura che riterrà simile a una scodella, ...

La scodella è il solido ottenuto asportando da un cilindro, avente il raggio uguale all'altezza, una semisfera.



Per calcolare il volume di tale solido si utilizza il principio di Cavalieri.

Si introduca nella scodella una superficie conica avente, come in figura, la base coincidente con la base del cilindro; si vuole dimostrare che il volume della scodella è equivalente al volume del cono: la dimostrazione si sviluppa sulla figura piana ottenuta sezionando i solidi con un piano passante per un diametro del cilindro.



Per il teorema di Pitagora: $\overline{CI}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{CP}^2$ dato che $\overline{CP} = \overline{PH}$, essendo per costruzione HPC isoscele e rettangolo; $\overline{CI} = \overline{GP}$ in quanto raggi, si può scrivere: $\overline{GP}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{HP}^2$. Ora la sezione della scodella ottenuta con un piano parallelo alla base è una corona circolare, la cui area è:

$$\begin{aligned} Area_{Corona\ Circolare} &= \pi \overline{GP}^2 - \pi \overline{IP}^2 = \\ &= \pi \overline{GP}^2 - \pi (\overline{GP}^2 - \overline{HP}^2) = \\ &= \pi \overline{HP}^2 \end{aligned} \quad (21.2)$$

21.5.2 Lasciamo la parola a Galileo che presenta un interessante problema legato all'infinito:

...chiameremo pure scodella: della quale e del cono prima dimostreremo che sono eguali; e poi, un piano tirato parallelo al cerchio che è base della scodella, il cui diametro e la linea DE e centro F., dimostreremo, tal piano, che passasse, per la linea GN, segnando la scodella ne i punti G, I, O, N, ed il cono ne' punti H, L, tagliare la parte del cono CHL eguale sempre alla parte della scodella, il cui profilo ci rappresentano i triangoli GAI, BON; e di più si procura, la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio il cui diametro HL, esser eguale a quella circolar superficie che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza quanta è la linea GI, notate intanto che cosa sono le definizioni de i matematici, che sono una imposizion di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate ed introdotte per levar lo stento tedioso che voi ed io sentiamo di presente per non haver convenuto insieme di chiamar questa superficie, *nastro circolare*, e quel solido acutissimo della scodella *rasoio rotondo*: hor comunque vi piaccia chiamargli, bastivi intendere che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, pur che sia parallelo alla base, cioè al cerchio il cui diametro DE, taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono CHL e la superior parte della scodella, eguali tra di loro, e parimente le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro e 'l cerchio HL, pur tra loro eguali. Dal che ne segue la maraviglia accennata: cioè, che se intenderemo il segante piano successivamente inalzato verso la linea AB, sempre le parti de i solidi tagliate sono eguali, come anco le superficie, che son basi loro, pur sempre sono eguali; e finalmente, alzando e alzando tanto li due solidi (sempre eguali) quanto le lor basi (superficie pur sempre eguali), vanno a terminare l'una coppia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto, ché tali sono l'orlo supremo della scodella e la cuspide del cono. Or mentre che nella diminuzione de i due solidi si va, sino all'ultimo, mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente il dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali

menomamenti restino tra di loro eguali, e non l'uno infinitamente maggior dell'altro: par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto. È questo che accade ne i solidi, accade parimente nelle superficie, basi loro, che esse ancora, conservando nella comune diminuzione sempre la egualità, vanno in fine ad incontrare, nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto; li quali perchè non si devon chiamare eguali, se son le ultime reliquie o vestigie lasciate da grandezze eguali? E notate appresso, che quando ben fussero tali vasi capaci de gl'immensi emisferii celesti, tanto gli orli loro supremi e le punte de i contenuti coni, servando sempre tra loro l'egualità, andrebbero a terminare, quelli in circonferenze eguali a quelle de i cerchi massimi de gli orbi celesti, e questi in semplici punti. Onde, conforme a quello che tali specolazioni ne persuadono, anco tutte le circonferenze de' cerchi quanto si voglia diseguali, posson chiamarsi tra loro eguali, e ciascheduna eguale a un punto solo.

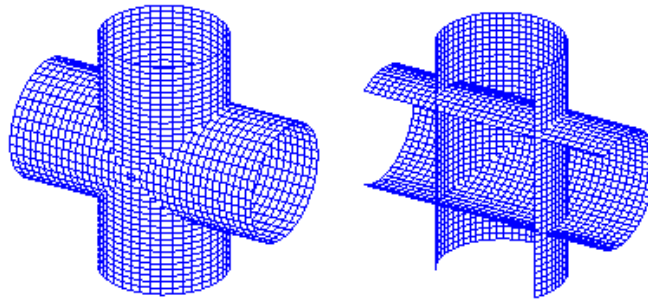
La dimostrazione del volume della scodella:

La dimostrazione è anco breve e facile. Ripigliamo la segnata figura, nella quale, pur essere l'angolo IPC retto, il quadrato del semidiametro IC è eguale alli due quadrati de i lati IP, PC: ma il semidiametro IC è eguale alla AC, e questa alla GP, e la CP è eguale alla PH; adunque il quadrato della linea GP è eguale alli due quadrati delle IP, PH, e 'l quadruplo a i quadrupli, cioè il quadrato del diametro GN è eguale alli due quadrati IO, HL: e perchè i cerchi son tra loro come i quadrati de' lor diametri, il cerchio il cui diametro GN sarà eguale alli due cerchi i cui diametri IO, HL, e tolto via il comune cerchio il cui diametro IO, il residuo del cerchio GN sarà eguale al cerchio il cui diametro è HL. Havro qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel che poco fa dissi, **cioè che l'infinito e per sé solo da noi incomprendibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile.** Le cose che in più volte mi son passate per la mente in tal proposito, son molte, parte delle quali, e forse le più considerabili, potrebb'esser che, così improvvisamente, non mi sovvenissero; ma nel progresso del ragionamento potrà accadere che, destando io a voi, ed in particolare al Sig. Simplicio, obiezioni e difficoltà, essi all'incontro mi facessero ricordar di quello che senza tale eccitamento restasse dormendo nella fantasia: e però con la solita libertà sia lecito produrre in mezzo i nostri umani capricci, ché tali meritamente possiamo nominargli in comparazione delle dottrine soprannaturali, sole vere e sicure determinatiici delle nostre controversie, e scorte inerranti ne i nostri oscuri e dubbii sentieri o più tosto labirinti. Tra le prime istanze che si sogliono produrre contro a quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suol esser quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perché, se ciò fusse, ne seguirebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perché quando due indivisibili, come, per esempio, due punti, congiunti facessero una quantità qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo poi segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obbiezioni di questo genere si di soddisfazione alla parte con dirgli, che non solamente due indivisibili, ma né dieci, né cento, né mille non compongono una grandezza divisibile e quanta, ma si bene infiniti.

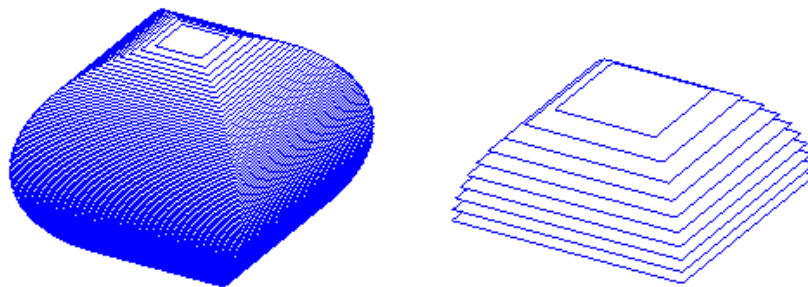
GALILEO GALILEI, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali

21.5.3 Problemi ...svolti

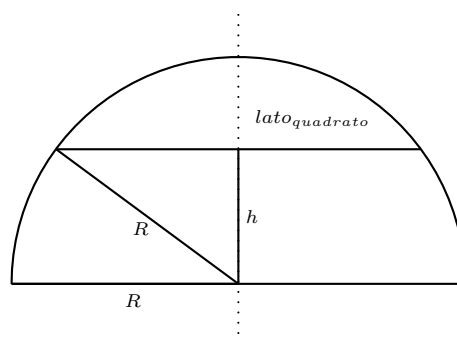
Problema 22. Sono dati due cilindri di uguale raggio R , tali che i loro assi si intersechino perpendicolarmente. Calcolare il volume del solido intersezione dei due cilindri.



Il solido intersezione è formato da quadrati sovrapposti:



Considerando una generica sezione fatta con un piano passante per un asse di uno dei due cilindri e perpendicolare all'asse dell'altro cilindro si ha:



Il lato del quadrato in funzione di h vale: $l_{quadrato} = \sqrt{R^2 - h^2}$, il solido di cui cerchiamo il volume contiene la sfera di lato R , se confrontiamo l'area della corrispondenti sezione fatte ad

una altezza h si ricava:

$$\frac{Area_{cerchio}}{Area_{quadrato}} = \frac{\pi (R^2 - h^2)}{4 (R^2 - h^2)} = \frac{\pi}{4}$$

Dato che le sezioni sono proporzionali, per il principio di Cavalieri anche i volumi saranno nella stessa proporzione e quindi:

$$Volume_{Intersezione\ due\ cilindri} = \frac{4}{\pi} Volume_{Sfera} = \frac{16}{3} R^3$$

Capitolo 22

Geometria analitica nello spazio

22.1 Premessa

In questo capitolo vengono introdotti i concetti base di geometria analitica, la trattazione ha un carattere applicativo, si rimanda a testi specifici ⁽¹⁾ in cui le tematiche vengono sviluppate in modo rigoroso.

22.2 I punti nello spazio

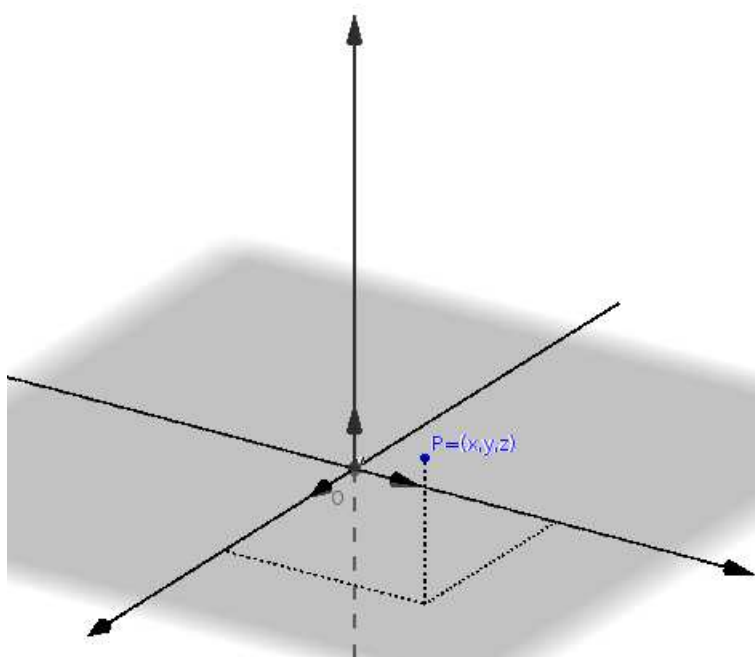
Partendo dalle proprietà studiate nel piano è possibile analizzare le idee della geometria analitica nello spazio.

La corrispondenza biunivoca che ad ogni punto dello spazio associa una terna ordinata di numeri reali,

$$S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

introduce le coordinate nello spazio come terne ordinate di numeri reali, il riferimento, per analogia a quanto fatto nel piano, sarà $Oxyz$, di versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, già noti e $\vec{k}$.

¹Come in Abate 1996 e in M.Apostol 1987 dove la geometria analitica è presentata, come si conviene, nell'ottica dell'algebra lineare utilizzando vettori e matrici in spazi vettoriali



Equazione di un piano

Dato che tre punti non allineati individuano un piano si ha che, in analogia con quanto fatto con le rette nel piano, si ha che $ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione di un generico piano.

Problema 23. Dati i punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, 1, 1)$. Determinare l'equazione del piano per A, B, C

Soluzione. Il sistema:
$$\begin{cases} 0 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0 \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + d = 0 \end{cases}$$

porta alla soluzione: $y - z - 1 = 0$

□

22.2.1 Piani paralleli

Come per le rette nel piano, si definiscono i piani α e β paralleli, se coincidono o non hanno alcun punto in comune.

Se coincidono hanno la stessa equazione, se non hanno punti in comune significa che il sistema:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione e questo si ha quando $a = a', b = b', c = c'$ e $d \neq d'$.

Piani paralleli si dice che hanno la stessa giacitura.

Equazione di una retta

Una retta è individuata dall'intersezione di due piani, pertanto la sua equazione può essere così scritta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

oppure in forma parametrica, cioè l'insieme dei punti $P = P_0 + Bt$, dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (l, m, n)$;

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

dove l, m, n non sono contemporaneamente nulli.

22.2.2 Distanza tra due punti

Dati due punti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dello spazio la loro distanza è data da:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Analogamente al caso del piano anche nello spazio la distanza $d(A, B)$ può essere interpretata come il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ le cui componenti sono: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

22.2.3 Punto medio di un segmento

Dati due punti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dello spazio, le coordinate del punto medio M del segmento AB sono:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Ad esempio il punto medio del segmento di estremi $A = (2, 2, 1)$ e $B = (0, -6, -3)$ è il punto $M = (1, -2, -1)$.

22.2.4 Baricentro di un triangolo e di un tetraedro

Dati tre punti $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ non allineati, il baricentro G del triangolo da essi individuato ha coordinate:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

Dati quattro punti $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $D = (x_D, y_D, z_D)$ non allineati e non tutti complanari, allora il baricentro del tetraedro da loro individuato ha coordinate:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$$

22.2.5 Il prodotto vettore

Riprendendo quanto sviluppato in 5.1.4, si può osservare che il prodotto vettoriale è una operazione che gode delle seguenti proprietà:

a) è *anticommutativa*: $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$;

b) è *bilineare*: per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2) \wedge \vec{w} &= t_1(\vec{v}_1 \wedge \vec{w}) + t_2(\vec{v}_2 \wedge \vec{w}) \\ \vec{v} \wedge (t_1 \vec{w}_1 + t_2 \vec{w}_2) \wedge \vec{w} &= t_1(\vec{v} \wedge \vec{w}_1) + t_2(\vec{v} \wedge \vec{w}_2)\end{aligned}$$

c) c'è la regola di *annullamento*: $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli.

Le proprietà a) e c) discendono dalla definizione mentre la b) è di difficile dimostrazione, e pertanto è lasciata a successivi approfondimenti.

Dalla bilinearità del prodotto vettoriale, premesso che:

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} & \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j}\end{aligned}$$

dato che si può scrivere: $\vec{v} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ e $\vec{w} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$ si ricava:

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge \vec{w} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \wedge (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i} \wedge \vec{i} + y_1 x_2 \vec{j} \wedge \vec{i} + z_1 x_2 \vec{k} \wedge \vec{i} + \\ &\quad + x_1 y_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + y_1 y_2 \vec{j} \wedge \vec{j} + z_1 y_2 \vec{k} \wedge \vec{j} + \\ &\quad + x_1 z_2 \vec{i} \wedge \vec{k} + y_1 z_2 \vec{j} \wedge \vec{k} + z_1 z_2 \vec{k} \wedge \vec{k} \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}\end{aligned}$$

si può osservare che quanto ricavato si può ottenere calcolando secondo la prima riga il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Problema 24. Siano $A = (2, 0, -1)$ $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (0, 2, 3)$. Calcolare l'equazione della retta r perpendicolare in A al piano ABC .

Prima soluzione. Calcoliamo le coordinate dei punti B' e C' simmetrici rispetto ad A di B e C , dato che A è il punto medio del segmento BB' si ha $A = \left(\frac{x_B + x_{B'}}{2}, \frac{y_B + y_{B'}}{2}, \frac{z_B + z_{B'}}{2} \right)$ che permette di ricavare $B' = (5, -2, -2)$ e in modo analogo $C' = (4, -2, -5)$. Costruiamo ora il piano π luogo dei punti equidistanti da B e B' , sia $P = (x, y, z)$ un generico punto dello spazio, apparterrà a π se:

$$\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2} = \sqrt{(x - x_{B'})^2 + (y - y_{B'})^2 + (z - z_{B'})^2}$$

sostituendo i dati si ottiene: $\pi : 3x - 2y - z = 7$. Applicando lo stesso procedimento a CC' si ottiene: $\pi' : x - y - 2z = 4$, da cui

$$r : \begin{cases} 3x - 2y - z = 7 \\ x - y - 2z = 4 \end{cases} \quad (22.1)$$

□

Seconda soluzione. Si considerano i vettori $B - A = (-3, 2, 1)$ e $C - A = (-2, 2, 4)$, si calcola il prodotto vettore:

$$D' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}$$

ora per A con direzione D' passa la perpendicolare richiesta:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 10t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (22.2)$$

□

Si può verificare che la 22.1 e la 22.2 individuano la stessa retta, infatti sostituendo nei piani della 22.1 la 22.2 si ottengono due identità.

22.2.6 Calcolo della direzione normale ad un piano

Sia π' il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, il piano π di equazione $ax + by + cz = 0$ è parallelo a π' e pertanto la direzione normale per i due piani è la stessa.

Siano $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$ due punti di π , calcoliamo il vettore perpendicolare a OA e OB :

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

sviluppando i calcoli si ottiene: $\vec{i}(y_0z_1 - z_0y_1) - \vec{j}(x_0z_1 - z_0x_1) + \vec{k}(x_0y_1 - y_0x_1)$. Dato che i due punti appartengono al piano π si ha: $-cz_0 = ax_0 + by_0$ e $-cz_1 = ax_1 + by_1$. Ricordando che stiamo cercando la direzione normale al piano π e che il prodotto di uno scalare per un vettore ne modifica il modulo ma non la direzione, possiamo tranquillamente moltiplicare $\vec{n}$ per lo scalare $-c$, ottenendo $(y_0(ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0)y_1, x_0(ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0)x_1, -cx_0y_1 + cy_0x_1)$ sviluppando i calcoli e semplificando si ha:

$$(x_1y_0 - x_0y_1)(a, b, c)$$

La direzione normale ad un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è quella del vettore (a, b, c) .

Terza soluzione problema 24. $\pi : 3x - 2y - z = 7$ $A = (2, 0, -1)$, direzione normale $N = (3, -2, 7)$, retta per A perpendicolare a π :

i) **equazione vettoriale:** $R = A + tN \quad t \in \mathbb{R}$;

ii) **equazione parametrica:** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \\ z = -1 + 7t \end{cases}$

iii) equazione cartesiana:
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{3}{2}y \\ z = -1 - \frac{7}{2}y \end{cases}$$

□

22.2.7 Area di un triangolo e volume di un tetraedro

Dati tre punti nello spazio $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ non allineati, l'area del triangolo da essi individuato è data da:

$$Area_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$$

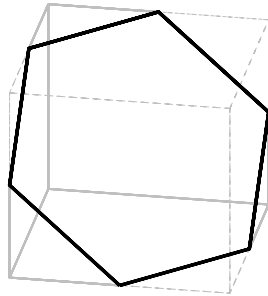
Dati quattro punti nello spazio $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $D = (x_D, y_D, z_D)$ non allineati e non tutti complanari, il volume del tetraedro da loro individuato è dato da:

$$Volume_{ABCD} = \frac{1}{6} |\vec{AB} \wedge \vec{AC} \cdot \vec{AD}|$$

22.2.8 La sezione del cubo

Problema 25. Sezionare con un piano un cubo in modo che la sezione così ottenuta risulti un esagono regolare

Soluzione. Siano $ABCD$ ed $A_1B_1C_1D_1$ le facce opposte di un cubo, congiungendo i punti medi degli spigoli: A_1B_1 , BB_1 , BC , CD , CC_1 e D_1A_1 si ottiene un esagono, dimostriamo che è regolare.



Per comodità sia 2 la misura dello spigolo del cubo, allora i punti medi hanno coordinate:
 $M_1 = (1, 0, 2)$, $M_2 = (2, 0, 1)$, $M_3 = (2, 1, 0)$, $M_4 = (1, 2, 0)$, $M_5 = (0, 2, 1)$ e $M_6 = (0, 1, 2)$,
 sia α il piano per M_1 , M_2 ed M_3 ; l'equazione di α si ricava risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 & \text{passaggio per } M_1 \\ 2a + c + d = 0 & \text{passaggio per } M_2 \\ 2a + b + d = 0 & \text{passaggio per } M_3 \end{cases}$$

$\alpha : x + y + z = 3$, è facile verificare che i punti M_4 , M_5 ed M_6 appartengono allo stesso piano, infatti ad esempio M_4 $1 + 2 = 3$.

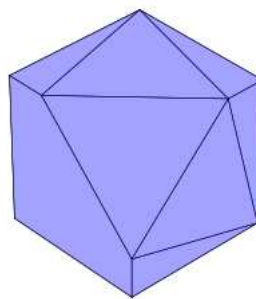
Verifichiamo ora che gli angoli sono tutti congruenti: consideriamo il triangolo $M_1M_2M_3$, di cui si possono calcolare i lati: $\overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \sqrt{2}$, $\overline{M_1M_3} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{6}$, applichiamo ora il teorema del coseno:

$$\begin{aligned}\overline{M_1M_3}^2 &= \overline{M_1M_2}^2 + \overline{M_2M_3}^2 - 2\overline{M_1M_2}\overline{M_2M_3} \cos(\widehat{M_1M_2M_3}) \\ 6 &= 4 - 4 \cos(\widehat{M_1M_2M_3}) \\ \cos(\widehat{M_1M_2M_3}) &= \frac{1}{2} \\ \widehat{M_1M_2M_3} &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Analogo per gli altri angoli. □

Una costruzione curiosa

Nella prima pagina della rivista, Matematica, Cultura e Società, dell'UMI (Unione Matematica Italiana), in fondo, è riportata questa figura che ho ricostruito:



Sapreste ricostruirla?

22.3 Con Python

```
[1]: %matplotlib ipynb
from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
import numpy as np
```

22.3.1 Sezione del cubo

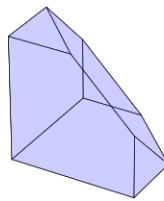
```
[2]: # lato cubo
L = 2
# vertici cubo
v = [[0, 0, 0], [L, 0, 0], [L, L, 0], [0, L, 0], [0, 0, L], [L, 0, L], [L, L, L], [0, L, L]]
# traslazione nel centro del cubo
v = np.array(v, dtype = np.float64)
v = v - L/2
```



```
[3]: # elenco vertici
i = 0
x = [v[0][i], v[1][i], (v[5][i]-v[1][i])/2+v[1][i], (v[2][i]-v[1][i])/
    ↪ 2+v[1][i], (v[2][i]-v[3][i])/2+v[3][i], \
      v[3][i], (v[7][i]-v[3][i])/2+v[3][i], (v[7][i]-v[4][i])/2+v[4][i], ↪
    ↪ v[4][i], (v[5][i]-v[4][i])/2+v[4][i]]
i = 1
y = [v[0][i], v[1][i], (v[5][i]-v[1][i])/2+v[1][i], (v[2][i]-v[1][i])/
    ↪ 2+v[1][i], (v[2][i]-v[3][i])/2+v[3][i], \
      v[3][i], (v[7][i]-v[3][i])/2+v[3][i], (v[7][i]-v[4][i])/2+v[4][i], ↪
    ↪ v[4][i], (v[5][i]-v[4][i])/2+v[4][i]]
i = 2
z = [v[0][i], v[1][i], (v[5][i]-v[1][i])/2+v[1][i], (v[2][i]-v[1][i])/
    ↪ 2+v[1][i], (v[2][i]-v[3][i])/2+v[3][i], \
      v[3][i], (v[7][i]-v[3][i])/2+v[3][i], (v[7][i]-v[4][i])/2+v[4][i], ↪
    ↪ v[4][i], (v[5][i]-v[4][i])/2+v[4][i]]
```

```
[4]: fig = plt.figure(figsize = (5,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
l = 1.5
ax.set_xlim(-1,1)
ax.set_ylim(-1,1)
ax.set_zlim(-1,1)
V = []
# vertici per disegnare spigoli
V.append((0, 1, 5, 8)) # primo vertice, vertici consecutivi
V.append((1, 0, 2, 3))
V.append((2, 9, 3, 1))
V.append((3, 2, 4, 1))
V.append((4, 5, 3, 6))
V.append((5, 6, 4, 0))
V.append((6, 5, 7, 4))
V.append((7, 6, 8, 9))
V.append((8, 0, 7, 9))
V.append((9, 2, 8, 7))
# facce individuate dai vertici
facce = [[0, 1, 2, 9, 8], [0, 1, 3, 4, 5], [1, 3, 2], [3, 4, 6, 7, 9, 2], \
          [0, 5, 6, 7, 8], [8, 9, 7], [5, 4, 6]]
spigoli = list(zip(x, y, z))
poliedro = []
# elenco vertici delle facce
for k in range(len(facce)) :
    l = len(facce[k])
    faccia = []
    for h in range(l) :
        faccia.append(spigoli[facce[k][h]])
    poliedro.append(faccia)
ax.set_aspect('equal')
```

```
ax.set_axis_off()
n = len(x)
for k in range(n) :
    for h in range(3) :
        ax.plot((x[V[k][0]], x[V[k][h+1]]), (y[V[k][0]], y[V[k][h+1]]), \
                (z[V[k][0]], z[V[k][h+1]]), 'k-', linewidth=0.4)
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(poliedro, facecolors = 'b', alpha = 0.1))
plt.show()
```



Capitolo 23

Geometria solida II

23.1 Poliedri proprietà legate a "p" e "q"

23.1.1 Proprietà generali dei poliedri

Dato che

$$F = \frac{2S}{p} \quad e \quad V = \frac{2S}{q} \quad (23.1)$$

Teorema 63 (proprietà di p e q). $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$

Dimostrazione. Dalla formula di Eulero $F + V - S = 2$ utilizzando la 23.1 si ha $\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$ dividendo tutto per $2S$ si ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$ dato che $\frac{1}{S} > 0$ si ha la tesi $\square$

Ovviamente si ha che $p \geq 3$ e $q \geq 3$

Problema 26. In ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre

Soluzione. Supponiamo per assurdo che: $p \geq 4 \wedge q \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$ contro il teorema precedente. $\square$

23.1.2 Ancora "teoremini" sui poliedri

Teorema 64 (proprietà di V ed F). $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$

Dimostrazione. $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$
 $(p - 2)F = 2V - 4$ ed essendo $p \geq 3$ si ha $F \leq 2V - 4$
 $(q - 2)V = 2F - 4$ ed essendo $q \geq 3$ si ha $V \leq 2F - 4$ $\square$

Problema 27. Non esiste un poliedro con sette spigoli

Soluzione. $S = 7F + V = 9$,

primo caso $F = 5 \wedge V = 4$

utilizzando $F \leq 2V - 4$ si ha $5 \leq 2 \cdot 4 - 4 = 4$

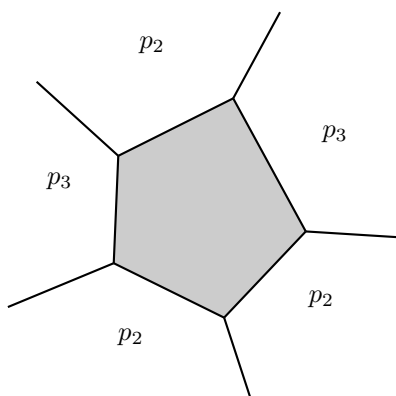
secondo caso $F = 4 \wedge V = 5$:

utilizzando $V \leq 2F - 4$ si ha $5 \leq 2 \cdot 4 - 4 = 4$

□

Problema 28. Se un poliedro uniforme ha valenza 3 e uno dei p_k è dispari allora gli altri due poligoni sono uguali

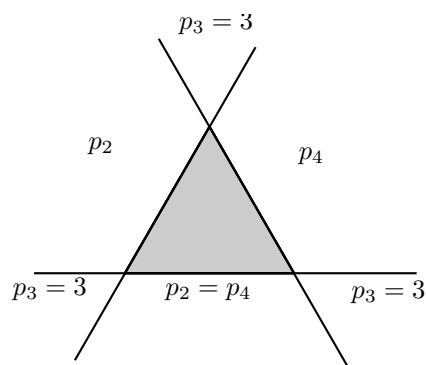
Soluzione. Supponiamo che p_1 sia dispari e ne seguiamo il contorno, partendo da un vertice, le due facce adiacenti uscenti dal vertice sono un p_2 -gono e un p_3 -gono; continuando a seguire le facce adiacenti avremo alternativamente p_2 -gono e un p_3 -gono: dato che p_1 è dispari si arriva ad un assurdo a meno che $p_2 = p_3$



□

Problema 29. Se un poliedro uniforme ha valenza 4 e supponiamo che due dei p_k siano uguali a 3: allora gli altri due sono uguali e il poliedro è del tipo $(3, n, 3, n)$

Soluzione. Supponiamo che $p_1 = 3$ e ne seguiamo il contorno; altrimenti le facce adiacenti sono, alternativamente, un p_2 -gono e un p_4 -gono e $p_2 = p_4$



□

23.2 I pentagoni del pallone da calcio

Quanti sono $E = \text{numero di esagoni}$ e $P = \text{numero di pentagoni}$ nel classico pallone da calcio?



Sicuramente basta contarli, ma ... usando quanto imparato ...

Il poliedro (pallone da calcio) ha valenza tre $q = 3$

23.2.1 Formule utili

- $F + V - S = 2$
 $\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$
- $\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$

Utilizziamo la formula di Eulero:

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$

Osserviamo che non si sono fatte ipotesi sul tipo di poligoni che formano il poliedro, si utilizzata solo la valenza.

Quanti sono gli esagoni?

Dobbiamo qui utilizzare l'ipotesi che il poliedro sia formato da poligoni regolari:

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$

$$\dots \text{calcoli } V = 60 \quad V = \frac{2S}{q} \Rightarrow S = 90 \quad F = 32 \Rightarrow E = 20$$

23.3 I poliedri uniformi

Definizione 89 (Poliedro uniforme). Ha facce formate da poligoni regolari, non necessariamente uguali, ha valenza (q) fissa, è invariante per simmetria: ogni vertice è costruito nello stesso modo.

23.3.1 Osservazioni preliminari

Ogni poliedro viene indicato da una n -upla $(p_1, p_2, \dots, p_q)$ dove p_i indica il numero dei lati del poligono che concorre sul generico vertice del poliedro.

Esempio: dodecaedro $(5, 5, 5)$

23.3.2 Quanti sono i poliedri uniformi e come sono fatti

Sicuramente sono poliedri uniformi i cinque solidi platonici. Ci sono poi due famiglie infinite di solidi, i prismi di basi due ennagoni regolari e facce laterali enne quadrati (valenza tre)

e gli antiprismi basi due ennagoni regolari e facce laterali triangoli equilateri (valenza quattro)

Sia P un poliedro convesso uniforme, del tipo $(p_1, p_2, \dots, p_q)$ la somma degli angoli delle q facce che concorrono su di un vertice è minore di 2π , pertanto:

$$\sum_{i=1}^q \pi \frac{p_i - 2}{p_i} < 2\pi$$

da cui $q-2 < \sum_{i=1}^q \frac{2}{p_i}$ cioè $\sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i} > \frac{q-2}{2}$ dato che $\forall i = 1 \dots q \quad \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{3}$ segue che $\sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i} < \frac{q}{3}$, quindi $\frac{q}{3} > \frac{q-2}{2} \Rightarrow q < 6$.

Ci sono tre casi possibili: $q = 3$, $q = 4$ e $q = 5$

$q = 3$ dato $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} > \frac{1}{2}$ almeno uno fra i p_k deve essere uguale a 3 o 4 o 5, se p_1 è dispari allora $p_2 = p_3$ (teorema 28), inoltre sono numeri pari a meno che non siano entrambi uguali a p_1

$$p_1 = 3 \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{2}{p_2} > \frac{1}{6} \quad p_2 = p_3 < 12$$

(3, 3, 3)	tetraedro regolare
(3, 4, 4)	3-prisma
(3, 6, 6)	U_1
(3, 8, 8)	U_2
(3, 10, 10)	U_3

$$p_1 = 5 \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{2}{p_2} > \frac{3}{10} \quad p_2 = p_3 \leq 6$$

(5, 4, 4)	5-prisma
(5, 5, 5)	dodecaedro
(5, 6, 6)	U_4

$p_1 = 4 \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} > \frac{1}{4}$ se $p_2 = 4$ allora p_3 qualsiasi otteniamo i prismi, altrimenti p_2 e p_3 saranno pari e uno dei due deve essere minore di 8

(4, 4, n)	n-prisma
(4, 6, 6)	U_5
(4, 6, 8)	U_6
(4, 6, 10)	U_7

$q = 4$ dato $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > 1$, almeno uno dei p_k è uguale a 3, sia $p_1 = 3$ allora $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > \frac{2}{3}$
almeno uno dei restanti p_k è minore di 5 perciò: $p_1 = 3$ e $p_2 = 3$, in questo caso $\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > \frac{1}{3}$

se invece $p_1 = 3$ e $p_2 = 4$ si ha $\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > \frac{5}{12}$. nel primo caso utilizzando i teoremi 28 e 29 si ottiene:

(3, 3, 3, n)	n-antiprisma
(3, 4, 3, 4)	U_8
(3, 5, 3, 5)	U_9

Nel secondo caso si deve escludere che i due restanti p_k possano essere uguali a 3, in quanto si ricadrebbe nel caso precedente, si ha che uno dei due è necessariamente 4, quindi l'altro è minore di 6:

(3, 4, 4, 4)	U_{10}
(3, 4, 5, 4)	U_{11}

$q = 5$ dato $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} > \frac{3}{2}$, almeno quattro dei p_k sono uguali a 3, e quindi, per il quinto si ha $\frac{1}{p_1} > \frac{1}{6}$

(3, 3, 3, 3, 3)	icosaedro
(3, 3, 3, 3, 4)	U_{12}
(3, 3, 3, 3, 5)	U_{13}

Ora non ci resta che costruire i poliedri uniformi:

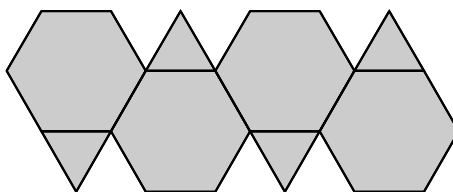
23.3.3 Struttura dei poliedri uniformi

prisma P_n (4, 4, n); antiprisma P'_n (3, 3, 3, n)

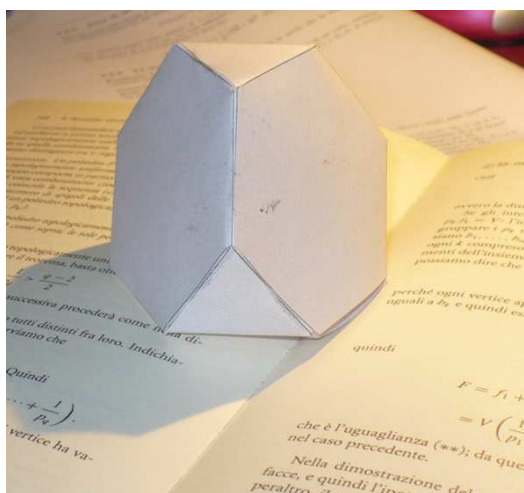
q	poliedro	V	S	F	facce specifiche
3	(3, 6, 6)	12	18	8	$T = 4, E = 4$
	(3, 8, 8)	24	36	14	$T = 8, O = 6$
	(3, 10, 10)	60	90	32	$T = 20, D = 12$
	(4, 6, 6)	24	36	14	$E = 8, Q = 6$
	(4, 6, 8)	48	72	26	$E = 8, Q = 12, O = 6$
	(4, 6, 10)	120	180	62	$Q = 30, E = 20, D = 12$
	(5, 6, 6)	60	90	32	$P = 12, E = 20$
4	(3, 4, 3, 4)	12	24	14	$T = 8, Q = 6$
	(3, 4, 4, 4)	24	48	26	$T = 8, Q = 18$
	(3, 5, 3, 5)	30	60	32	$T = 20, P = 12$
	(3, 4, 5, 4)	60	120	62	$T = 20, P = 12, Q = 30$
5	(3, 3, 3, 3, 4)	24	60	38	$T = 32, Q = 6$
	(3, 3, 3, 3, 5)	60	150	92	$T = 80, P = 12$

23.3.4 Un esempio

Costruiamo il poliedro uniforme (3, 6, 6), lo sviluppo è:



da cui si ottiene il seguente modello in cartoncino:



23.4 Con Python

23.4.1 Costruzione poliedri uniformi

Primo passo

Ricavare, noti p e q , numero facce, vertici e spigoli.

esempio: (3,4,3,4) valenza $q = 4$ formato da triangoli (numero triangoli T) e quadrati (numero quadrati Q).

$$F = Q + T \quad S = \frac{4Q + 3T}{2} \quad V = \frac{4Q + 3T}{4}$$

usando la formula di Eulero $F + V - S = 2$ si ricava $T = 8$, usando poi $\sum_{i=1}^F \alpha_i = 2\pi(V - 2)$ si

ha $\sum_{i=1}^F \alpha_i = V \left(2\frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi V - 4\pi$ da cui si ricava $V = 12$, $Q = 6$, $S = 24$ ed $F = 14$ ###

Secondo passo Costruire il modello in cartoncino: prima lo sviluppo e poi il solido. ### Terzo passo Trovare le coordinate esatte dei vertici e poi, con l'aiuto del codice qui di seguito riportato, costruire l'immagine rappresentativa del solido.

```
[1]: %matplotlib ipynb
from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
import numpy as np
```

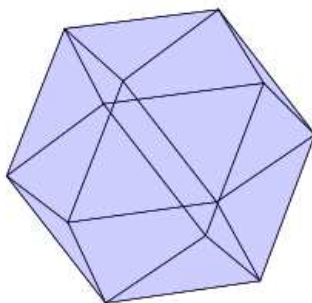
Cubottaedro (3,4,3,4)

```
[2]: fig = plt.figure(figsize = (5,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
l = 3/4
ax.set_xlim(-1,l)
ax.set_ylim(-1,l)
ax.set_zlim(-1,l)
V = []
# elenco vertici
x = [1/2, 1, 1/2, 0, 0, 1, 1, 0, 1/2, 1, 1/2, 0]
y = [0, 1/2, 1, 1/2, 0, 0, 1, 1, 0, 1/2, 1, 1/2]
z = [0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1, 1, 1]
# portare l'origine delle coordinate nel centro del solido (traslazione)
x = np.array(x, dtype = np.float64)
x = x-1/2
y = np.array(y, dtype = np.float64)
y = y-1/2
z = np.array(z, dtype = np.float64)
z = z-1/2
##
# vertici per disegnare spigoli
V.append((0, 4, 1, 5, 3)) # primo vertice, vertici consecutivi
V.append((1, 0, 6, 5, 2))
```

```

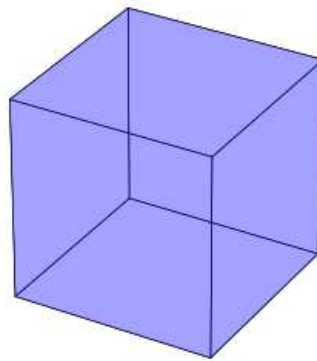
V.append((2, 1, 3, 6, 7))
V.append((3, 0, 7, 2, 4))
V.append((4, 8, 11, 0, 3))
V.append((5, 8, 9, 1, 0))
V.append((6, 1, 2, 10, 9))
V.append((7, 10, 11, 2, 3))
V.append((8, 9, 11, 4, 5))
V.append((9, 8, 10, 5, 6))
V.append((10, 9, 11, 7, 6))
V.append((11, 8, 10, 7, 4))
# facce individuate dai vertici
facce = [[0, 1, 2, 3], [0, 5, 1], [1, 2, 6], [2, 3, 7], [3, 0, 4], [4, 8, 11], \
        [8, 9, 5], [9, 10, 6], [10, 11, 7], [8, 9, 10, 11], \
        [1, 6, 9, 5], [2, 7, 10, 6], [3, 7, 11, 4], [0, 5, 8, 4]]
spigoli = list(zip(x, y, z))
poliedro = []
# elenco vertici delle facce
for k in range(len(facce)) :
    l = len(facce[k])
    faccia = []
    for h in range(l) :
        faccia.append(spigoli[facce[k][h]])
    poliedro.append(faccia)
ax.set_aspect('equal')
ax.set_axis_off()
n = len(x)
for k in range(n) :
    for h in range(len(V[k])-1) :
        ax.plot((x[V[k][0]], x[V[k][h+1]]), (y[V[k][0]], y[V[k][h+1]]), \
        (z[V[k][0]], z[V[k][h+1]]), 'k-', linewidth=0.4)
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(poliedro, facecolors = 'b', alpha = 0.1))
plt.show()

```



Cubo

```
[3]: fig = plt.figure(figsize = (5,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
l = 3/4
ax.set_xlim(-1,l)
ax.set_ylim(-1,l)
ax.set_zlim(-1,l)
V = []
# elenco vertici
x = [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]
y = [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1]
z = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
# portare l'origine delle coordinate nel centro del solido (traslazione)
x = np.array(x, dtype = np.float64)
x = x-1/2
y = np.array(y, dtype = np.float64)
y = y-1/2
z = np.array(z, dtype = np.float64)
z = z-1/2
##
# vertici per disegnare spigoli
V.append((0, 1, 3, 4)) # primo vertice, vertici adiacenti
V.append((1, 0, 2, 5))
V.append((2, 1, 3, 6))
V.append((3, 0, 7, 2))
V.append((4, 0, 7, 5))
V.append((5, 6, 4, 1))
V.append((6, 5, 7, 2))
V.append((7, 6, 3, 4))
# facce individuate dai vertici
facce = [[0, 1, 2, 3], [0, 4, 5, 1], [0, 3, 7, 4], [6, 7, 4, 5], [6, 5, 1, 2], [6, 2, 3, 7]]
spigoli = list(zip(x, y, z))
poliedro = [[spigoli[facce[ix][iy]] for iy in range(len(facce[0]))] for ix in range(len(facce))]
ax.set_aspect('equal')
ax.set_axis_off()
n = len(x)
for k in range(n) :
    for h in range(3) :
        ax.plot((x[V[k][0]], x[V[k][h+1]]), (y[V[k][0]], y[V[k][h+1]]), (z[V[k][0]], z[V[k][h+1]]), 'k-', linewidth=0.4)
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(poliedro, facecolors='b', alpha=0.2))
plt.show()
```



```
[1]: %matplotlib ipynb
from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d.art3d import Poly3DCollection
import numpy as np
import math
```

23.4.2 (3,6,6)

```
[3]: L = 2
H = L*math.sqrt(2/3)
v = [[-L/2, -L/(2*math.sqrt(3)), -H/4], [L/2, -L/(2*math.sqrt(3)), -H/4], [0, L/math.
↪ sqrt(3), -H/4], [0, 0, 3*H/4]]
i = 0
x = [(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ 2*(v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], (v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], ↪
↪ 2*(v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], (v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ (v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ 2*(v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i], (v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i], ↪
↪ (v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i], 2*(v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i]]
i = 1
y = [(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ 2*(v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], (v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], ↪
↪ 2*(v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], (v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ (v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ 2*(v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i], (v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i], ↪
↪ (v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i], 2*(v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i]]
i = 2
z = [(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[3][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ 2*(v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], (v[3][i]-v[1][i])/3+v[1][i], ↪
↪ 2*(v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], (v[1][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
↪ (v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], 2*(v[2][i]-v[0][i])/3+v[0][i], ↪
```

```

2*(v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i],(v[2][i]-v[1][i])/3+v[1][i],
↪(v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i], 2*(v[3][i]-v[2][i])/3+v[2][i]]

```

```

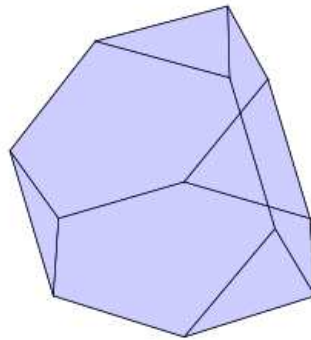
[4]: fig = plt.figure(figsize = (5,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

l = 3/4
ax.set_xlim(-1,l)
ax.set_ylim(-1,l)
ax.set_zlim(-1,l)

V = []
# vertici per disegnare spigoli
V.append((0, 6, 5, 1)) # primo vertice, vertici consecutivi
V.append((1, 0, 2, 11))
V.append((2, 1, 11, 3))
V.append((3, 2, 4, 9))
V.append((4, 3, 5, 9))
V.append((5, 6, 4, 0))
V.append((6, 0, 5, 7))
V.append((7, 10, 8, 6))
V.append((8, 9, 10, 7))
V.append((9, 8, 3, 4))
V.append((10, 11, 7, 8))
V.append((11, 10, 1, 2))

# facce individuate dai vertici
facce = [[0, 5, 4, 3, 2, 1], [3, 9, 8, 10, 11, 2], [6, 5, 4, 9, 8, 7], \
         [0, 6, 7, 10, 11, 1], [0, 6, 5], [3, 4, 9], [7, 8, 10], [1, 2, 11]]
spigoli = list(zip(x, y, z))
poliedro = []
# elenco vertici delle facce
for k in range(len(facce)) :
    l = len(facce[k])
    faccia = []
    for h in range(l) :
        faccia.append(spigoli[facce[k][h]])
    poliedro.append(faccia)
ax.set_aspect('equal')
ax.set_axis_off()
n = len(x)
for k in range(n) :
    for h in range(len(V[k])-1) :
        ax.plot((x[V[k][0]], x[V[k][h+1]]), (y[V[k][0]], y[V[k][h+1]]), \
                (z[V[k][0]], z[V[k][h+1]]), 'k-', linewidth=0.4)
ax.add_collection3d(Poly3DCollection(poliedro, facecolors = 'b', alpha = 0.1))
plt.show()

```



Capitolo 24

Funzioni continue

24.1 Il problema della continuità di una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Cerchiamo di tradurre l'idea di continuo in termini matematici.

Analizziamo una generica funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'idea che vogliamo formalizzare è riassunto da un

Le funzioni reali di variabile reale non sono, come sappiamo, tutte le funzioni ma solo quelle con cui avremo più a che fare

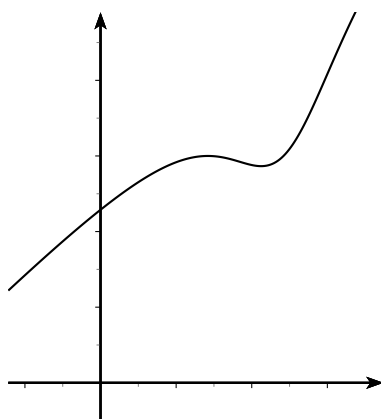
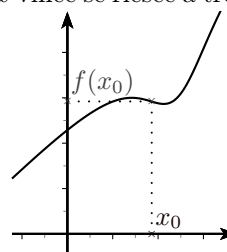


Figura 24.1: Grafico di una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

«gioco», due giocatori uno situato sull'asse delle ordinate (y), ed uno sull'asse delle ascisse (x). L'arbitro sceglie un punto: x_0 , il giocatore y sceglie un intorno di $f(x_0)$, x vince se riesce a trovare



un intorno di x_0 i cui punti hanno immagini nell'intorno scelto da y .

Definizione 90 (Funzione continua in un suo punto).

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

È importante osservare come il formalismo matematico permetta di tradurre un concetto complesso come quello della continuità.

24.2 La continuità delle funzioni elementari

Continuità della funzione costante

Applicando la definizione data, dimostriamo che la funzione costante $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ è continua in x_0 $\forall \epsilon > 0$ $|k - k| < \epsilon$, quindi δ può essere scelto qualsiasi, infatti l'immagine di ogni x nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è k che ovviamente appartiene ad ogni intorno del tipo $(k - \epsilon, k + \epsilon)$.

Continuità della funzione identica

Analizziamo $|f(x) - f(x_0)|$ che nell' caso in analisi è $|x - x_0|$ quindi se si sceglie $\delta = \epsilon$, la definizione di continuità è verificata $\forall x_0$.

Definizione 91 (Funzione continua in un intervallo). Una funzione f si dice continua in un insieme I ($\subseteq \mathbb{D}$), se è continua $\forall x \in I$

Da quanto precedentemente dimostrato segue che la funzione costante e la funzione identità sono continue su tutto $\mathbb{R}$

Continuità della funzione $f(x) = mx$

$|mx - mx_0| = |m| |x - x_0|$ quindi se si sceglie $\delta = \frac{\epsilon}{m}$, ... il gioco è fatto.

Procedere dimostrando la continuità di ogni funzione elementare diventa lavoro lungo e faticoso, quindi cerchiamo una diversa strada. Le funzioni elementari si ottengono "operando" con la funzione costante e la funzione identica. Ad esempio $x^2 = x \cdot x$

24.3 Continuità delle "operazioni"

La funzione somma è continua

$$+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

Definizione di continuità (in questo caso):

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall (x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| < \epsilon$$

Consideriamo $|z - z_0| = |x + y - (x_0 + y_0)|$, si può utilizzare la disuguaglianza triangolare e si ottiene $|z - z_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0|$ scegliendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ si giunge alla dimostrazione.

La funzione prodotto è continua

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow xy$$

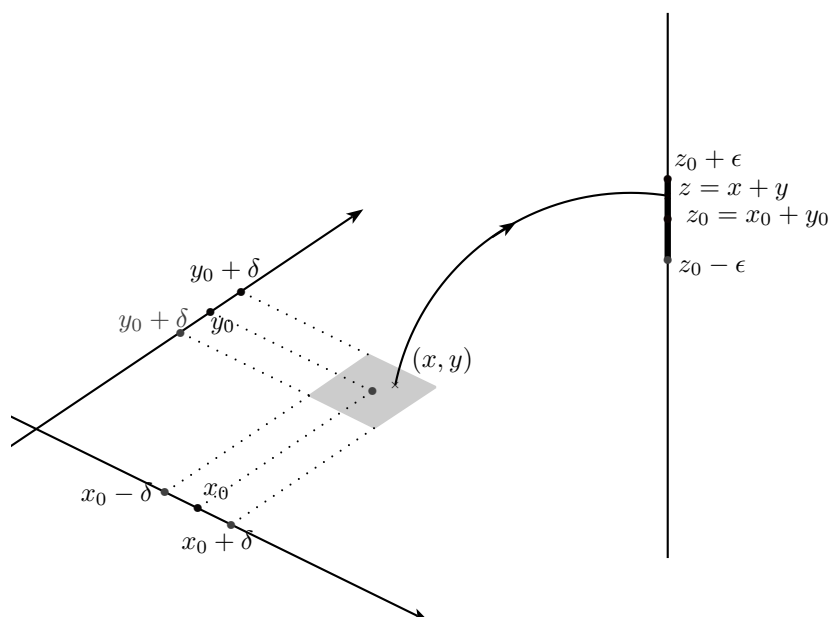


Figura 24.2: Continuità della funzione somma

Definizione di continuità (in questo caso):

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall (x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| < \epsilon$$

Consideriamo $|z - z_0| = |xy - (x_0 y_0)|$, utilizzando le proprietà di campo in $\mathbb{R}$ posso scrivere $|xy - (x_0 y_0)| = |xy - (x_0 y_0) + x y_0 - x y_0|$ da cui raccogliendo si ha $|x(y - y_0) + y_0(x - x_0)|$, sia ora M il massimo fra $|x|, |y_0|$, quindi $M|(y - y_0) + (x - x_0)|$, ed infine applicando la disuguaglianza triangolare si ha: $|z - z_0| \leq M(|x - x_0| + |y - y_0|)$ scelto $\forall \epsilon \delta = \frac{\epsilon}{2M}$, si giunge alla dimostrazione. *esiste sempre in $\mathbb{R}$*

Scrivi i precedenti risultati come teoremi (continuità della somma e del prodotto)

Teorema 65 (Continuità della composizione di due funzioni). Siano f e g due funzioni, $\exists f \circ g(x) = g(f(x))$, se f è continua in x_0 e g è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $f \circ g$ è continua in x_0

Dimostrazione. Si deve dimostrare che: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$ Per la continuità di g , si ha che: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta' > 0$ tale che $\forall y : |y - y_0| < \delta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$
Per la continuità di f , si ha che: $\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall y : |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |y - y_0| < \epsilon'$
Ma per ogni scelta di ϵ' è possibile determinare un δ' che permette di ottenere la continuità. $\square$

Teorema 66 (continuità del quoziente). La funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che $(x, y) \mapsto \frac{x}{y} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$ è continua.

Dimostrazione. Consideriamo $|z - z_0| = \left| \frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0} \right|$, utilizzando le proprietà di campo in $\mathbb{R}$ posso scrivere $\left| \frac{xy_0 - x_0y}{yy_0} \right| = \left| \frac{xy_0 + x_0y_0 - x_0y_0 - x_0y}{yy_0} \right|$ da cui detto M il massimo fra $|x_0|, |y_0|$ ed

*M ed m esistono sempre
siamo in $\mathbb{R}$* m il minimo del prodotto $|yy_0|$, si ottiene $\frac{M}{m} |(y - y_0) + (x - x_0)|$, ed infine applicando la disuguaglianza triangolare si ha: $|z - z_0| \leq \frac{M}{m} (|x - x_0| + |y - y_0|)$ scelto $\forall \epsilon \delta = \frac{\epsilon m}{2M}$, si giunge alla dimostrazione. $\square$

Dimostrare con cura che:

- a) la funzione opposto è continua.
- b) la funzione valore assoluto è continua

Indicare il dominio delle funzioni!

Utilizzando quanto precedentemente sviluppato:

- a) dimostrare che i polinomi sono funzioni continue
- b) dimostrare che le funzioni razionali fratte (nel dominio di definizione) sono continue.

24.4 Conclusioni

Le principali funzioni con cui abbiamo lavorato in questi anni sono continue, ricordando che le funzioni trascendenti ($e^x, \log x, \sin x, \cos x$) sono state “costruite continue”, si conclude che nel dominio di definizione tutte le funzioni “note” sono continue.

Capitolo 25

L'operatore Limite

25.1 Il limite come strumento per estendere la continuità

Nel capitolo precedente si è visto, in sostanza, che tutte le funzioni "note" (*a noi*) sono continue nel **dominio di definizione**.

I punti in cui le funzioni non sono definite, a causa delle limitazioni algebriche imposte dal campo $\mathbb{R}$, possono essere indagati costruendo però un nuovo strumento.

25.2 L'operatore Limite

Riprendiamo la definizione di continuità in un punto:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

È chiaro che in presenza di un x_0 in cui la funzione non è definita, la definizione non si può applicare, ma possiamo però dire:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Il valore l che verifica la precedente proposizione «estende la continuità di f in x_0 ».

Mettiamo un po' di ordine alle cose:

- dobbiamo innanzi tutto poter indagare «su cosa accade "vicino" ad x_0 », quindi x_0 deve essere punto di accumulazione per il dominio della funzione.
- l deve essere unico, altrimenti l'estensione ci porterebbe lontano dalla definizione di funzione.

Definizione 92 (Limite di una funzione in un suo punto). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ed x_0 un punto di accumulazione per il dominio di f , si dice che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, f è continua su tutto $\mathbb{R} - \{-1\}$, vogliamo, grazie all'uso dell'operatore limite, costruire una **nuova** funzione $\tilde{f}$ ovunque continua e coincidente con f in $\mathbb{R} - \{-1\}$.

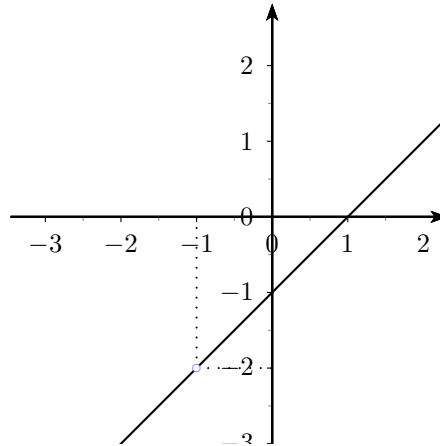


Figura 25.1: Estensione della continuità con l'uso del limite

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ -2 & x = -1 \end{cases} \quad \text{Dove } -2 \text{ è il } \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \text{ infatti: } \left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| = |x - 1 + 2| = |x + 1|, \text{ pertanto con la scelta } \delta = \epsilon \dots \text{il gioco è fatto!}$$

25.2.1 Unicità del limite

Teorema 67 (unicità del limite). Sia f una funzione, reale di variabile reale, definita in un intorno U di x_0 sia x_0 di accumulazione per U , ed esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

allora il limite è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il limite non sia unico:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l'| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta' > 0 : |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l''| < \epsilon$$

Essendo $\mathbb{R}$ un insieme separato esistono U' intorno di l' e U'' intorno di l'' tali che $U' \cap U'' = \emptyset$, ma dall'esistenza dei limiti si ha che detto $\tilde{\delta}$ il minore fra δ e δ' , le immagini di ogni $x \in (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$ debbono appartenere ad un intorno di l' e di l'' assurdo. $\square$

Verificare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} = \frac{3}{8}$$

25.3 Limiti «infiniti» e all'«infinito»

Sebbene questo problema possa essere risolto con l'introduzione dell'insieme $\tilde{\mathbb{R}}$,¹ diamo le definizioni di limite nei casi in cui «appare» l'infinito.

$$25.3.1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$25.3.2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall N < 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

$$25.3.3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$25.3.4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N < 0 : x < N \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Scrivere le definizioni dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

25.4 Teoremi sui limiti

Teorema 68 (Permanenza del segno). Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ allora esiste un intorno U di x_0 in cui $\forall x \in U \ f(x) > 0$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si sa che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$, questo significa che scelto un particolare ϵ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U)$ è contenuto nell'intorno di centro l e raggio ϵ , quindi dato che $l > 0$, è sufficiente scegliere $\epsilon = \frac{l}{2}$ per dimostrare il teorema. $\square$

Teorema 69 (il limite è un operatore lineare). Se esistono $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l''$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda l' + \mu l''$

Dimostrare per esercizio

¹L'insieme $\tilde{\mathbb{R}}$ si ottiene imponendo che il punto $-\infty$ precede tutti gli $x \in \mathbb{R}$ e il punto $+\infty$ li segua tutti. L'insieme $\tilde{\mathbb{R}}$ è così totalmente ordinato, inoltre la famiglia degli intorni viene estesa con le semirette del tipo $[a, +\infty]$ e $[-\infty, b]$, la retta ampliata è così un insieme separato e quindi si applica la definizione di limite precedentemente introdotta

Teorema 70 (del confronto o « due carabinieri »). Siano f, g, h tre funzioni reali di variabile reale, tali che in un intorno V di x_0 escluso al più x_0 stesso, valga: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, se esistono: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Dimostrazione. Scriviamo le definizioni di limite per f e h :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta' > 0 : |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta'' > 0 : |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - l| < \epsilon$$

detto δ il minore fra δ' e δ'' , si ha che in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$ e $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$, valgono contemporaneamente, utilizzando l'ipotesi del teorema si può scrivere:

$l - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \epsilon$ che conduce alla tesi. □

Capitolo 26

Successioni e limiti notevoli

Una successione è una funzione reale di variabile intera: $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

*Osservare la
notazione
non $a(n)$
ma a_n !*

26.1 I limiti delle successioni

Dato che l'unico punto di accumulazione in $\mathbb{N}$ è $+\infty$ Si considerano solo i limiti del tipo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ma dato che non è possibile far tendere n ad altri valori per convenzione il limite delle successioni si scrive $\lim a_n$ È facile scrivere le definizioni di limite per una successione:

*Quanto
scritto non
è proprio
corretto in
quanto $+\infty$
non
appartiene
ad $\mathbb{N}$, più
giusto
sarebbe
ragionare su
 $\bar{\mathbb{N}}$*

$$\lim a_n = l \quad \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

$$\lim a_n = +\infty \quad \forall M > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n > m \Rightarrow a_n > M$$

26.2 Successioni monotone

- Successione **monotona crescente**: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
- Successione **monotona decrescente**: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$
- Successione **monotona non crescente**: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$
- Successione **monotona non decrescente**: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

Teorema 71 (esistenza del limite per successioni monotone). Per ogni successione reale non decrescente $n \rightarrow a_n$, esiste il $\lim a_n$ e coincide con l'estremo superiore dell'insieme delle immagini a_n . Pertanto il limite è finito o uguale a $+\infty$

Dimostrazione. Sia $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sia $l' < l$. Per la definizione di estremo superiore, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} \geq l'$ allora dato che la successione è monotona, si ha: per ogni $n \geq \bar{n}$: $l' \leq a_{\bar{n}} \leq a_n \leq l$. Questo dimostra il teorema. $\square$

Quindi se la successione è limitata il limite esiste finito.

*cioè
 $\{a_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$
è limitato*

26.3 Un limite veramente « notevole »

Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dimostriamo che è crescente:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Se si sostituisce ad n $n+1$ si ottiene una somma maggiore, in quanto le quantità in parentesi diventano maggiori ed in più si aggiunge un termine positivo. Quindi $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} > a_n$.

La successione è inferiormente limitata.

Mostriamo che è superiormente limitata:

$$\begin{aligned}2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &< 2 + \frac{1}{2!} \dots \frac{1}{k!} \\ 2 + \frac{1}{2!} \dots \frac{1}{k!} &= 2 + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \leq 2 + \sum_{j=2}^k \frac{1}{2^j} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{k-2} \frac{1}{2^h}\end{aligned}$$

Si dimostri per induzione che $n! \geq 2^{n-1}$

Ricordando che:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 + \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 2$$

si ottiene che la successione è maggiorata da 3, quindi esiste:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

questo limite è un numero convenzionalmente chiamato e numero di Neper ¹ $2 < e < 3$

¹ John Napier (Nato nel 1550, Merchiston Castle, vicino Edimburgo, morto il 4 Apr 1617, Merchiston Castle). Matematico scozzese e campione del protestantesimo. Ha diviso la sua vita tra attacchi alla Chiesa di Roma e il perseguimento di calcoli numerici. In varie occasioni egli ha esortato Giacomo IV di Scozia per affrontare con fermezza la minaccia cattolica. Dal 1594 ha lavorato sullo sviluppo di armi segrete, tra cui un carro di metallo. Ha sviluppato il concetto di logaritmo per facilitare i calcoli nella moltiplicazione, nella divisione, nell'estrazione di radici, e nell'elevamento a potenze. Egli ha anche introdotto il punto decimale come notazione dei numeri decimali. È stato un precursore del regolo calcolatore. Sue principali opere a carattere matematico: *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio*, 1614, e *Mirifici logarithmorum canonicis constructio*, 1619 (pubblicato postumo).

Un interessante approfondimento si può trovare su: Boyer 2009 pagg.358-363)

26.4 Alcuni importanti limiti

26.4.1 Dalle successioni alle funzioni

Consideriamo il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, si può provare che questo limite vale e . Sia $[.] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione parte intera: $[x]$ è il più grande intero minore o uguale ad x , si ha per $x > 1$

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

ed essendo che $x \rightarrow +\infty \Rightarrow [x] \rightarrow +\infty$, i limiti esterni della disuguaglianza tendono ad e , e quindi per il teorema del confronto si ha la tesi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, \text{ infatti } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \text{ da cui la tesi.} \end{aligned}$$

giustificare tutti i passaggi

26.4.2 Limiti ... « quasi notevoli »

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} &= 1 \end{aligned}$$

quasi, in quanto vengono spesso indicati come limiti notevoli ma sono riconducibili al limite « veramente notevole »

26.5 Un interessante definizione di limite*

Teorema 72 (esistenza del limite: condizione di Cauchy). Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f ammetta limite per $x \rightarrow x_0$ (essendo x_0 di accumulazione nel dominio E di definizione di f) è che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{S}_{x_0} : \forall x_1, x_2 \in (U - \{x_0\}) \cap E \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \begin{matrix} \xrightarrow{\text{necessità}} \\ \xleftarrow{\text{sufficienza}} \end{matrix} \forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{S}_{x_0} : \forall x_1, x_2 \in (U - \{x_0\}) \cap E \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Necessità ($\Rightarrow$) dato che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora esiste un $U \in \mathfrak{S}_{x_0}$ tale che per $x \in U - \{x_0\}$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$ presi $x_1, x_2 \in U - \{x_0\}$ si ottiene che $|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2) - l + l - f(x_1)| \leq |f(x_2) - l| + |f(x_1) - l| < \varepsilon$

Sufficienza ($\Leftarrow$) la condizione $\forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{S}_{x_0} : \forall x_1, x_2 \in (U - \{x_0\}) \cap E \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ è detta "condizione di Cauchy". Sia per $n = 1, 2, \dots$, $U_n \in \mathfrak{S}_{x_0}$ tale che per $x_1, x_2 \in U_n - \{x_0\}$ si abbia $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{n}$, ne segue che, posto $\lambda'_n = \inf_{x \in U_n - \{x_0\}} f(x)$ e $\lambda''_n = \sup_{x \in U_n - \{x_0\}} f(x)$,

si ricordi che $|-x| = |x|$

si ha $\lambda'' - \lambda' < \frac{1}{n}$, inoltre gli intorno U_i possono essere costruiti in modo tale che $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_i \supset \dots$, da cui $\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots$ $\lambda''_1 \geq \lambda''_2 \geq \dots$ indicato $I_n = \{y : \lambda'_n \leq y \leq \lambda''_n\}$ si ha

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

Chiamiamo $l = \sup_{i \in \mathbb{N}} \lambda'_i$, sia V un intorno arbitrario di l , in esso è sicuramente contenuto almeno un I_m . Allora, per $x \in U_m - \{x_0\}$ si ha $f(x) \in I_m$, e quindi $f(x) \in V$, ma questo altro non è che la definizione di limite. $\square$

26.6 Ancora un limite ... veramente notevole

Per ottenere il risultato cercato è necessario lavorare un po'.

26.6.1 I cammini continui

Una delle situazioni reali più importanti ed interessanti da « matematizzare » è quella del moto dei corpi; il caso più tipico e più semplice è quello in cui si vuole descrivere il moto di un corpo così piccolo da essere assimilato ad un punto. In questo studio vi sono due elementi essenziali: una è l'ambiente in cui avviene il moto (che chiameremo spazio), l'altro è il tempo, che rappresenteremo sulla retta reale. Come spazio tipico assumeremo il piano euclideo $\mathcal{E}$, che conosciamo già bene: fissato un riferimento cartesiano, $\mathcal{E}$ si può porre in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}^2$ (insieme delle coppie di numeri reali).

La descrizione del moto consiste nell'associare ad ogni istante t il punto P in cui si trova il corpo: in altre parole, si tratta di assegnare un'applicazione $F : t \rightarrow P = F(t)$ della retta reale (o di un intervallo $[, b]$ di essa) in $\mathcal{E}$. Un'applicazione di questo tipo verrà detta cammino piano; la variabile t è detta anche parametro, e l'intervallo $[, b]$ è detto intervallo parametrico. Notiamo che quest'applicazione può benissimo non essere iniettiva: infatti niente vieta che il corpo passi più volte, in tempi successivi, per lo stesso punto. (Se nei due istanti successivi t_1, t_2 il corpo si trova nello stesso punto P , si ha $F(t_1) = F(t_2) = P$, dunque l'applicazione F non è iniettiva).

Indichiamo con $f(t), g(t)$ le coordinate cartesiane di $F(t)$:

Quindi un cammino può essere rappresentato da una coppia di equazioni:
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Un altro moto che sappiamo rappresentare è il moto rotatorio uniforme. A questo scopo, supponiamo che l'origine O del riferimento sia il centro di rotazione, e utilizziamo i numeri complessi per rappresentare i punti del piano. Sia ω la pulsazione; allora il moto di un punto che per $t = 0$ si trova sul semiasse delle ascisse positive a distanza R da O è rappresentato dall'equazione $z = Re^{i\omega t}$.

Se di questa equazione si prendono la parte reale e la parte immaginaria si ottiene una rappresentazione che rientra, naturalmente, nella forma
$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases}$$

Nei libri di fisica si trovano numerosi esempi di cammini piani che descrivono moti importanti: il moto di un Punto soggetto alla gravità terrestre, il moto di un pianeta attorno al Sole, ecc.

Definizione 93 (Cammino continuo localmente). Il cammino F si dice continuo in t_0 se, preso un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni t dell'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (che appartenga, naturalmente, all'intervallo parametrico) si abbia $\overline{F(t)F(t_0)} < \varepsilon$

(Cioè: il punto $F(t)$ si trovi nel disco con centro in $P_0 = F(t_0)$ e raggio ε).

Evidentemente: il cammino F è continuo in t_0 se e soltanto se la funzione (a valori reali) $t \rightarrow \frac{F(t)F(t_0)}{F(t)F(t_0)}$ (che esprime la distanza del punto variabile $F(t)$ dal punto fisso $F(t_0)$) è infinitesima per $t = t_0$.

Abbiamo dato la definizione di « cammino continuo in t_0 »; occorre ora completare la definizione:

Definizione 94 (Cammino continuo globalmente). Un cammino si dice continuo se è continua in ogni punto del suo intervallo parametrico.

26.6.2 La lunghezza di un cammino

L'idea di lunghezza di un cammino (ad esempio di un certo percorso stradale) molto chiara per la nostra intuizione: tanto che può essere utilizzata nella stessa fondazione della geometria.

Si tratta ora di formulare in modo preciso questa nozione, utilizzando gli strumenti che abbiamo già introdotto (come l'operazione di estremo superiore e quella di limite)

Cominciamo con un'osservazione: l'intervallo parametrico, come sottoinsieme della retta reale, è ordinato. (Nell'interpretazione più ovvia l'intervallo parametrico ha il significato di un intervallo temporale: c'è un «prima» e un «dopo», ...) Consideriamo un insieme di punti di $[a, b]$ (cioè di istanti): $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Ad essi corrispondono i punti sulla curva: $A = P_0, P_1, \dots, P_m = B$, dove scriviamo $P_k = F(t_k)$. I punti A e B si dicono gli estremi del cammino.

Questi punti rappresentano la posizione raggiunta nei vari istanti dall'oggetto di cui studiamo il moto; è importante notare che essi non sono dati «alla rinfusa», ma in un certo ordine che è indotto dal parametro e che è rispecchiato dall'indice con cui sono contrassegnati.

Ora costruiamo la poligonale (o spezzata) che ha come vertici $P_0, P_1, \dots, P_m$; una tale poligonale verrà detta inscritta nel cammino. Di essa si definisce in modo ovvio la lunghezza $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{m-1}P_m}$.

Ed ecco un'osservazione fondamentale: se infittiamo la suddivisione dell'intervallo parametrico, cioè se intercaliamo nuovi punti fra i punti P_k , la lunghezza della poligonale aumenta, o, almeno conserva il medesimo valore.

Ad esempio, se fra i punti P_k e P_{k+1} intercaliamo un punto Q , nel calcolo della lunghezza della poligonale troviamo la somma $\overline{P_kQ} + \overline{QP_{k+1}}$ in luogo $\overline{P_kP_{k+1}}$; per la disuguaglianza triangolare si ha $\overline{P_kP_{k+1}} \leq \overline{P_kQ} + \overline{QP_{k+1}}$ e il segno di uguaglianza vale solo nel caso in cui Q stia sul segmento P_kP_{k+1} .

Ci rendiamo conto intuitivamente che se facessimo crescere la lunghezza della poligonale « al massimo possibile », essa finirà per aderire strettamente al cammino assegnato. Siamo dunque portati naturalmente a dare questa definizione

Definizione 95 (Lunghezza di un cammino). Si dice lunghezza di un cammino F l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte.

Occorre però notare che in certi casi, anche quando il cammino F è continuo, questo estremo superiore può essere $+\infty$.

Un cammino si dice rettificabile quando questo estremo superiore è finito. Il termine « rettificazione » è quello che si usa tradizionalmente per indicare il calcolo delle lunghezze dei cammini:

esso ha una notevole suggestione perché fa assimilare il nostro cammino ad un filo inestensibile che viene poi tirato in modo da diventare un segmento: la lunghezza del segmento coincide con la lunghezza del cammino. Ma questa idea intuitiva non può giovare per suggerire una definizione rigorosa, dal momento che per poter parlare di un filo inestensibile occorrerebbe già disporre della nozione di lunghezza di una curva.

Lo scopo che ora ci proponiamo è di dimostrare una disuguaglianza molto importante che riguarda la lunghezza di un arco di cerchio. Su un cerchio di centro O , prendiamo un arco di estremi A , B , tale che l'angolo $\widehat{AOB}$ sia acuto. Sia H la proiezione ortogonale del punto B sulla retta OA , e sia K il punto d'incontro del raggio OB con la tangente al cerchio in A (che è, ovviamente, la perpendicolare al raggio OA nel punto A).

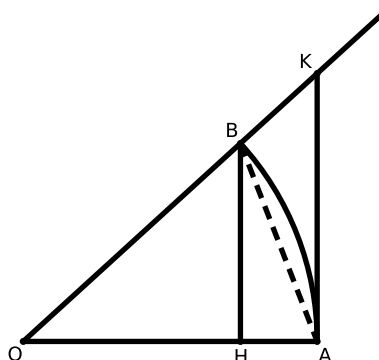


Figura 26.1: disuguaglianza fondamentale

Teorema 73 (legame fra circonferenza e poligoni inscritti e circoscritti). Con le notazioni ora introdotte, vale la doppia disuguaglianza

$$\overline{BH} < \widehat{AB} < \overline{AK}$$

Dimostrazione. È molto facile dimostrare la disuguaglianza $\overline{BH} < \widehat{AB}$. Infatti si $\overline{BH} < \overline{BA}$, essendo il segmento BH perpendicolare alla retta OA , mentre il segmento BA è obliquo. D'altra parte il segmento BA può essere considerato come una particolare poligonale iscritta nell'arco, ed ha perciò una lunghezza che non supera la lunghezza di questo (per la definizione generale di lunghezza di un arco); dalle disuguaglianze $\overline{BH} < \overline{BA}$, $\overline{BA} \leq \widehat{AB}$ segue subito che $\overline{BH} < \widehat{AB}$. È più complessa la dimostrazione dell'altra disuguaglianza: $\widehat{AB} < \overline{AK}$. Per ottenerla, cominciamo col dimostrare un lemma del tutto elementare.

Lemma 1 (del teorema sul legame fra circonferenza e poligoni inscritti e circoscritti). Dato un triangolo isoscele $\widehat{OMN}$, con vertice O , e preso un punto M' sul prolungamento del lato OM , dalla parte di M , ed un punto N' sul prolungamento del lato ON , dalla parte di N , si ha:

$$\overline{MN} \leq \overline{M'N'} \quad (26.1)$$

Dimostrazione. Proiettiamo i punti M' , N' sulla retta MN , ottenendo (rispettivamente) i punti M'' , N'' . Proiettiamo anche il punto O sulla retta MN , ottenendo il punto S , che è il punto medio del segmento MN . Mandiamo poi la retta r perpendicolare alla retta MN nel punto M .

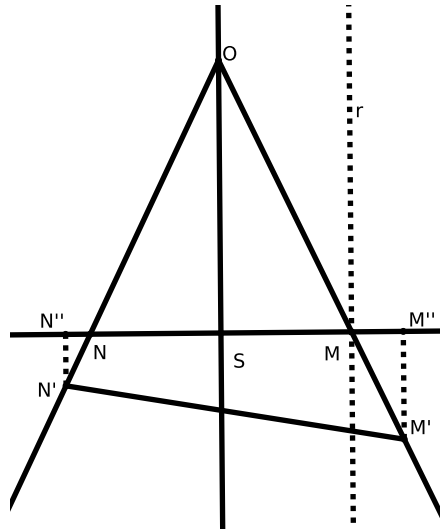


Figura 26.2: Poligoni inscritti e circoscritti

I punti M' , O stanno da parti opposte rispetto alla tetta r (infatti il segmento OM' , per ipotesi, taglia la retta r in M). Ma anche S ed M'' stanno da parti opposte rispetto ad r perché i segmenti OS e $M'M''$ non tagliano la retta r , essendo paralleli ad essa. Dunque M'' ed S stanno da parti opposte rispetto ad r , quindi il punto M è interno al segmento $M''S$. Alla stessa maniera si dimostra che il punto N è interno al segmento $N''S$. Dunque il segmento MN è interno al segmento $M''N''$; si ha perciò

$$\overline{MN} < \overline{M''N''}$$

D'altra parte si ha

$$\overline{M''N''} < \overline{M'N'}$$

perché, come sappiamo, il rapporto di proiezione è ≤ 1 . Da queste due disuguaglianze si ricava la tesi. $\square$

Scorrendo la dimostrazione si vede subito che la 26.1 vale anche quando sia $M = M'$ ed $\overline{ON'} > \overline{ON}$, oppure viceversa, quando sia $\overline{OM'} > \overline{OM}$. Veniamo dunque alla dimostrazione del nostro teorema. Prendiamo una qualsiasi poligonale inscritta nell'arco, con vertici: $P_O = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$, dal centro O proiettiamo questi punti sulla retta AK , ottenendo i punti $P'_O = A, P'_1, P'_2, \dots, P'_n = K$ che appartengono evidentemente al segmento AK . In virtù del lemma geometrico, abbiamo $\overline{P_{k-1}P_k} < \overline{P'_{k-1}P'_k}$ per $(k = 1, 2, \dots, n)$ sommando membro a membro rispetto all'indice k otteniamo $\sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} < \sum_{k=1}^n \overline{P'_{k-1}P'_k}$; dunque, il numero $\overline{AK}$ è una limitazione superiore per la lunghezza di una qualsiasi poligonale inscritta nell'arco. Ricordando che la lunghezza di un arco è, per definizione, l'estremo superiore (cioè la più piccola delle limitazioni superiori) delle lunghezze delle poligoni inscritte, si ha $\widehat{AB} \leq \overline{AK}$. Questa non è ancora esattamente la disuguaglianza che ci siamo proposti di dimostrare: dobbiamo infatti dimostrare che questa disuguaglianza sussiste anche in senso forte (cioè che il segno $\leq$ può essere sostituito da $<$).

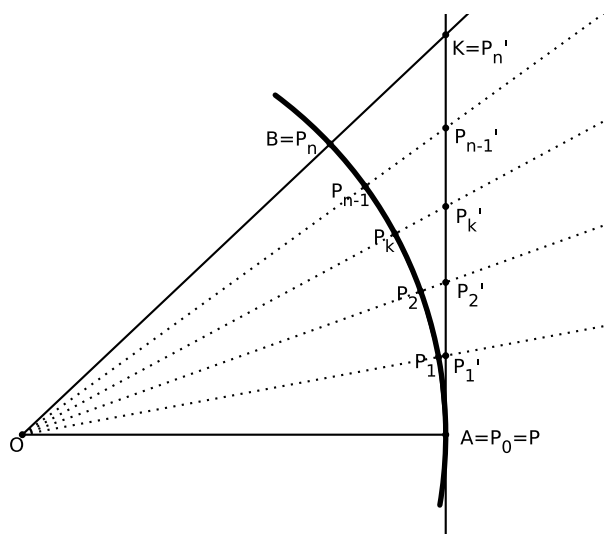


Figura 26.3: Poligonale circoscritta

È facile ora ottenere anche questo risultato. Infatti, tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$: sia C il punto in cui essa taglia l'arco e sia M il punto in cui essa taglia il segmento AK . Per la

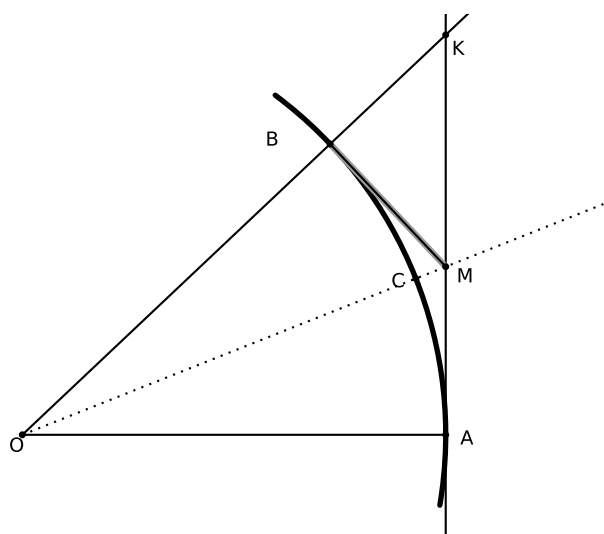


Figura 26.4: Poligonale circoscritta: costruzione della disuguaglianza

disuguaglianza $\widehat{AB} \leq \overline{AK}$ si ha $\widehat{AC} \leq \overline{AM}$ ed anche $\widehat{CB} \leq \overline{BM}$ da cui $\widehat{AB} \leq \overline{AM} + \overline{BM}$ ma, essendo $\overline{BM} < \overline{MK}$ perché la retta BM è ortogonale alla retta OB , mentre MK è obliqua, si ha $\widehat{AB} < \overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}$.

Così anche la seconda delle disuguaglianze 26.1 è dimostrata. $\square$

La disuguaglianza 26.1 è particolarmente importante per lo studio delle funzioni circolari.

Sia infatti α un numero reale tale che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Possiamo interpretare α come coordinata angolare di un punto $P = (x, y)$ che si trova sul cerchio unitario, nel primo quadrante. Sia $A = (1, O)$, sia H la proiezione di P sull'asse delle ascisse e sia K l'intersezione della retta OP con la perpendicolare mandata all'asse x in A .

Pertanto si ha: $\overline{PH} = y = \sin \alpha$, $\overline{AK} = \operatorname{tg} \alpha$

Teniamo presente che, avendo adottato la misura degli angoli in radianti, risulta $\widehat{AB} = \alpha$ applicando la disuguaglianza 26.1 si ha allora immediatamente

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

valida per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Occorre tenere ben presente che è essenziale, per la validità di questa formula, che le funzioni circolari siano definite a partire dalla misura degli angoli in radianti.

Dividiamo la precedente disuguaglianza per $\sin \alpha$ che è un numero positivo, ricaviamo $1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ passando ai reciproci:

$$1 < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < \cos \alpha$$

Osserviamo che questa disuguaglianza vale non solo per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ma anche per $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, infatti, le funzioni $\alpha \rightarrow \cos \alpha$ e $\alpha \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ sono pari (ciò significa, come sappiamo, che assumono lo stesso valore per valori opposti della variabile).

$$\mathbf{26.6.3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tenuto conto che $1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$, applicando il teorema del confronto si ottiene questo importante risultato

26.7 Un bel quesito per ripassare ... pensando*

Problema 30. Si considerino le soluzioni reali positive dell'equazione

$$\operatorname{tg}(x) = x \tag{26.2}$$

e le si rappresentino mediante una successione a_n ($n \in \mathbb{N}$), ove $a_n < a_{n+1}$. Si dica se il

$$\lim (a_{n+1} - a_n)$$

esiste e in caso affermativo lo si calcoli.

Soluzione. Il limite di a_n , dato che la successione è monotona crescente esiste (infinito).

Osservazione preliminare (ripasso) La funzione $\operatorname{tg}(\cdot) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile ed ammette come inversa la funzione $\operatorname{arctg}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

L'equazione 26.2 è rappresentata in figura 26.5 Se all'equazione 26.2 si applica l'arcotangente gli

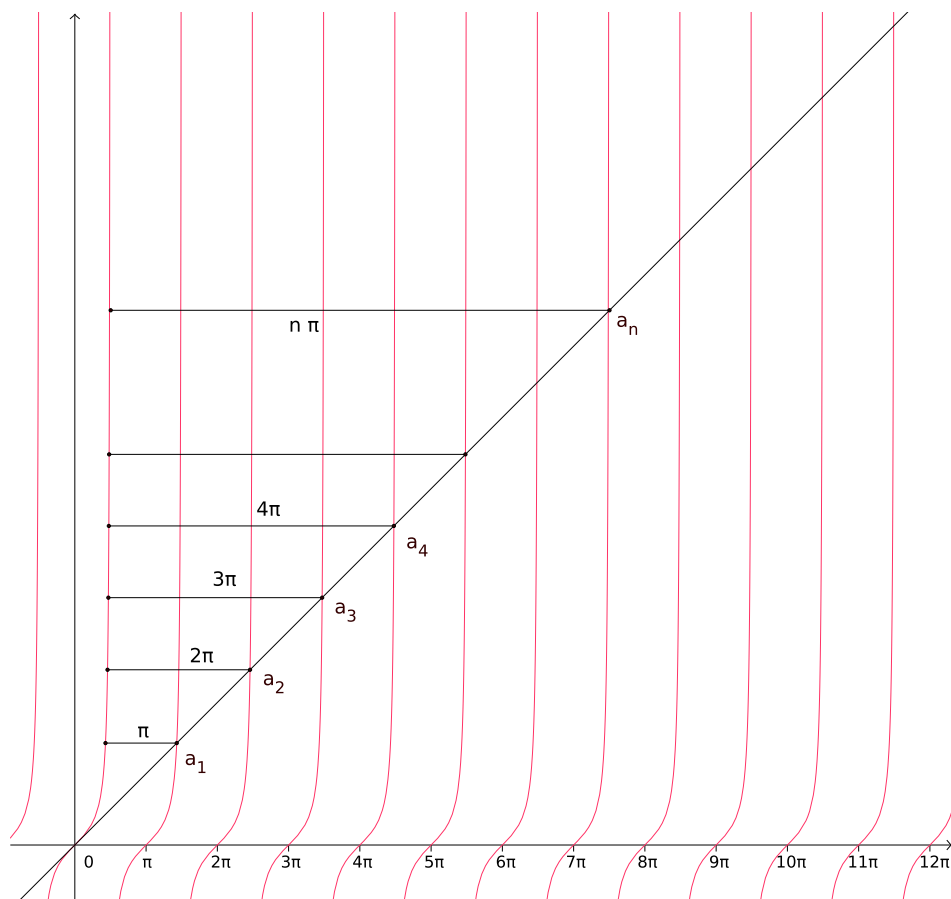


Figura 26.5: rappresentazione di $\operatorname{tg}(x) = x$

a_n vengono “spediti” (come in figura 26.5) nell’intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. E quindi si ha:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(a_n)) = \operatorname{arctg}(a_n)$$

ma: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(a_n)) = a_n - n\pi$ e $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(a_{n+1})) = a_{n+1} - (n+1)\pi$ da cui:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(a_{n+1}) &= a_{n+1} - (n+1)\pi \\ \operatorname{arctg}(a_n) &= a_n - n\pi \end{aligned} \tag{26.3}$$

e sottraendo membro a membro nella 26.3, si ha

$$a_{n+1} - a_n = \operatorname{arctg}(a_{n+1}) - \operatorname{arctg}(a_n) + \pi$$

e quindi passando al limite si ottiene:

$$\lim (a_{n+1} - a_n) = \lim (\operatorname{arctg}(a_{n+1}) - \operatorname{arctg}(a_n) + \pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi = \pi$$

□

Capitolo 27

Le Derivate

Vi riporto integralmente i paragrafi introduttivi al concetto di derivata che si trovano nelle dispense scritte negli anni 70 (del novecento) dal prof. Mario Dolcher⁽¹⁾ Dolcher 1972.

¹Alcune note scritte dal prof. Giovanni Prodi che descrivono il prof. Mario Dolcher

I matematici italiani della mia generazione sanno quanto furono importanti i corsi estivi che il C.I.M.E. organizzava a Villa Monastero, sul lago di Como. Questi corsi fecero uscire la ricerca matematica italiana dall'isolamento in cui il fascismo e la guerra l'avevano ridotta; inoltre, cosa non meno importante, consentirono ai giovani ricercatori di conoscersi e di collaborare, a prescindere dall'appartenenza alle varie scuole. Fu proprio ad uno di questi corsi dedicato alla teoria dei numeri - che conobbi Mario Dolcher. Mi colpì la sua cultura vastissima e ben organizzata, che spaziava anche su temi allora poco sviluppati, come la teoria dei gruppi e la topologia. Facemmo subito amicizia. Mario si era laureato a Pisa nel 1942 come allievo della prestigiosa Scuola Normale Superiore, tuttavia, avendo avvertito chiaramente il ritardo in cui allora la matematica italiana si trovava sul piano internazionale, aveva chiesto di poter continuare gli studi a Zurigo, presso il Prof. Heinz Hopf. Si deve indubbiamente ascrivere a merito di Giovanni Gentile, allora direttore della Scuola Normale Superiore, di avere assecondato il desiderio del giovane ricercatore. Mario seppe introdursi con acutezza anche in campi difficili e attuali come la teoria generale delle strutture matematiche. Fra i suoi numerosi temi di ricerca, mi faceva particolare impressione la topologia bidimensionale: un vero campo da "intenditori", sotto un' apparenza elementare. Nel dicembre del 1956 fui chiamato alla cattedra di Analisi Matematica della Facoltà di Scienze dell'Università di Trieste. Ero molto contento, anche per la sede; infatti provai subito per Trieste una vivissima simpatia, che, con il passare degli anni, si è sempre più trasformata in un sentimento di pungente nostalgia. Ma il timore di non essere all'altezza delle mie nuove responsabilità, sia sul piano scientifico sia sul piano didattico e organizzativo, mi toglieva la serenità. Non era facile mandare avanti il corso di laurea in matematica e fornire il supporto matematico per i fisici e gli ingegneri con le forze allora disponibili: basta pensare che, quanto a cattedre di matematica pura, c'era soltanto quella che io ero venuto ad occupare. Fortunatamente, c'erano i professori U. Morin e G. Scorza Dragoni che facevano spola da Padova e sostenevano il nostro Istituto anche con il loro prestigio, ma le forze scarseggiavano. In quel frangente, mi resi conto che la soluzione possibile era una sola: fare ritornare Mario Dolcher dal suo esilio ferrarese. Così, a partire dall'Anno Accademico 1956-57, Mario, che aveva intanto conseguito la libera docenza in Topologia, fu di nuovo fra i docenti dell'Istituto di Trieste. Come avevo previsto, l'ampiezza della sua cultura fu un bene importante perché Mario, come docente era "spendibile" per le più varie esigenze. Così ebbe inizio la nostra collaborazione, che durò fino all'autunno del 1963, quando io partii per Pisa. Su tutti i problemi ci consultavamo quotidianamente. Mandammo avanti assieme un seminario di avviamento alla ricerca matematica; non è il caso di elencare tutti i frequentatori: mi basta ricordare l'atmosfera di grande entusiasmo in cui eravamo immersi. Un'altra occasione di iniziativa comune furono le "Gare matematiche", a cominciare dal 1958; Mario vi si era impegnato con tutto il suo entusiasmo: in alcuni dei quesiti proposti per le gare sono riconoscibili il suo stile e la sua fantasia. Ben presto la nostra amicizia si estese alle famiglie: così anche io e mia moglie facemmo l'esperienza della "triestinità" (che mi auguro sia ancora attuale). Voglio dire che in nessun altro luogo ho trovato così viva la consuetudine della comunicazione amichevole, della conversazione punteggiata di battute intelligenti e frizzanti. Ricordo anche le camminate sul Carso, con le immancabili soste sulle panche delle trattorie, sotto il pergolato, mentre i nostri bambini giocavano tranquilli. La nostra compagnia continuava anche nell'estate, nel paesino della Val Badia che Mario e Maria Novella ci avevano fatto conoscere e apprezzare. Quel paesino continua ad essere un appuntamento immancabile anche dopo che ci eravamo trasferiti a Pisa. Anzi, negli anni migliori,

« ...

27.1 Il rapporto incrementale.

Nel voler descrivere il comportamento di una funzione, ossia il modo di variare del suo valore al variare del punto nel dominio, l'idea più ovvia è di commisurare l'incremento del valore della funzione all'incremento della variabile al quale esso corrisponde: il Calcolo differenziale prende le mosse da un tale confronto ed elabora nozioni atte ad analizzare il comportamento e le possibili approssimazioni per una classe importante di funzioni, nella quale rientrano, in particolare, le "funzioni elementari" che già conosciamo.

Detta f una funzione definita in un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$

sia x un punto di E il quale sia anche di accumulazione per E ; ci si metta pure tranquilli supponendo x_0 interno ad E e nulla si perderà dell'essenziale.

Per ogni $x \in E$, che interessa supporre diverso da x_0 , la differenza $h = x - x_0$

è detta un incremento della variabile. Essendo che interessa pensare x_0 fissato ed x variabile, x_0 è detto "punto iniziale".

La differenza $f(x) - f(x_0)$, ossia $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è detta l'incremento della funzione, corrispondente ad h (e relativo al punto x_0). Naturalmente, bisogna non far gran caso alle parole: incremento non significa per noi aumento: tanto h quanto l'incremento della funzione sono numeri (reali) relativi. Per ogni x di E diverso da x_0 resta definito il rapporto incrementale della f : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esso è dunque una funzione di x , definita in $E - \{x_0\}$. Più volentieri però penseremo il rapporto stesso come funzione dell'incremento h , definita per quei valori di h per i quali $x_0 + h$ appartiene ad $E - \{x_0\}$ $R(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Teniamo ben presente che se x_0 si suppone interno ad E , $R(h)$ è definito in $U - \{0\}$, essendo U un opportuno intorno di 0. Sia ben chiaro che $R(h)$ non è definito per $h = 0$. Scrivendo, come si è fatto, $R(h)$, il punto iniziale è sottointeso: se chiarezza vuole che se ne faccia menzione, si scriva $R_{x_0}(h)$, e magari anche $R_{x_0}^f(h)$ quando ci possa essere dubbio circa la funzione. Spesso l'incremento h si indica con Δx , e il corrispondente incremento della funzione con Δf od anche, quando piaccia indicare i valori della f con un'apposita lettera - p. es. y -, con Δy . Il rapporto incrementale si scrive allora $R(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ scrittura piena di sottointesi ma molto espressiva, che qua e là useremo. Dopo questi minuziosi preamboli, avvertiamo che nel seguito ometteremo di spiegare il significato delle notazioni più ovvie e delle ipotesi più abituali o necessarie a dar senso al discorso (p. es. x interno ad E , h tale che $x_0 + h$ non evada da E , $h \neq 0$ quando si parla di $R(h)$, ecc.). Le restrizioni della funzione $R(h)$ ai valori positivi, risp. negativi, di h si chiamano rapporto incrementale destro, risp. sinistro; potranno indicarsi con $R^+(h)$, $R^-(h)$. Ad esempio, se la f è definita in un intervallo chiuso avente x_0 come estremo destro, $R(h)$ è necessariamente $R^-(h)$; ma anche se x_0 è interno al dominio, può essere opportuno considerare separatamente quanto avviene alla sua sinistra e quanto avviene alla sua destra. Un primissimo esempio, più che banale: la funzione f sia costante. Quali che siano $x \in E$ e l'incremento Δx , è $\Delta y = 0$, dunque $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ da qualunque punto x_0 si parta

divenne un punto di incontro di molti matematici in vacanza. Per molti anni ancora mi ritrovai puntualmente con Mario alle riunioni del gruppo "Scienza fede", a discutere dei rapporti fra la religione e la visione scientifica del mondo. I contributi portati da Mario erano sempre pertinenti e profondi. Voglio infine ricordare una componente importante del carattere di Mario: il senso dell'umorismo. Questa in lui non era solo una dote intellettuale, ma anche morale. L'umorismo lo aiutava a "metabolizzare" i torti ingiustamente subiti conservando la comprensione e la serenità e a mantenere, senza mettersi in posa, una struttura morale aliena da cedimenti e da compromessi.

e qualunque incremento gli si attribuisca. Ben più notevole è il seguente esempio, che contiene come caso particolare il precedente. Sia f una funzione lineare: $f(x) = mx + q$. Quali che siano x_0 ed h si ha $R(h) = \frac{(m(x_0+h)+q)-(mx_0+q)}{h} = m$. Dunque: per le funzioni lineari il rapporto incrementale è costante, uguale al coefficiente m della x . Atteso il significato del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ciò può esprimersi dicendo che al variare di x , il valore $f(x)$ della funzione (lineare!) “aumenta m volte più” di quella della variabile². Quando la f venga rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali e si prendano sui due assi i punti-unità equidistanti dall’origine, il grafico della f è una retta (cosa che si deduce proprio dall’essere costante il rapporto incrementale) ed m ne è il coefficiente angolare, ossia $\widehat{tg\hat{x}r}$ ³.

27.2 La derivata di una funzione.

La fortuna di avere costante il rapporto incrementale non è di tutte le funzioni⁴; in generale il rapporto incrementale $R(h)$, fissato che sia x_0 , varia al variare di h . Per avere informazione sul comportamento della funzione in prossimità di x_0 si dovranno prendere in considerazione i valori $R(h)$ con h piccolo. Se questi valori risultano prossimi ad un numero m , la funzione, per quanto riguarda il confronto dei suoi incrementi con quelli della variabile, si comporta vicino ad x press’a poco come una funzione lineare di coefficiente m . Si tratta dunque di studiare il comportamento di $R(h)$ per $h \rightarrow 0$; il caso più felice sarà quello in cui vi sia un limite. Diamo perciò le definizioni seguenti.

Definizione 96 (Derivata in un punto). Se il rapporto incrementale di una funzione f relativo al punto x_0 ammette limite finito per $x \rightarrow x_0$, la f si dice derivabile in x_0 ; il numero $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ossia $\lim_{h \rightarrow 0} R_{x_0}(h)$ è detto la derivata della f nel punto x_0 .

Definizione 97 (Derivata infinita). Se per una f si ha $\lim_{h \rightarrow 0} R_{x_0}(h) = \infty$ ($+\infty, -\infty$) si dice che la funzione f ammette derivata infinita (risp. $+\infty, -\infty$) nel punto x_0 .

Si noti che la parola derivabile non sta a significare che ammette derivata, ma che ammette derivata finita.

Teorema 74 (condizione necessaria per l’esistenza della derivata). Affinché una funzione f sia derivabile in un punto x_0 è necessario che essa sia continua in x_0 .

Dimostrazione. Scrivasi l’incremento della funzione nella forma $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$. Dall’ipotesi fatta della derivabilità della f in x_0 , tenuto presente il teorema sul limite di un prodotto, si deduce che per $x \rightarrow x_0$ è $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$, ossia $f(x) \rightarrow f(x_0)$. $\square$

...»

La matematica che potete leggere qui sopra è veramente raffinata. Vi assicuro, la persona che ha scritto queste cose, che se ne dica, era decisamente speciale.

² Evidentemente, anche questa è un’espressione grossolana, poichè non è necessariamente $m < 1$ (come il “più” farebbe supporre).

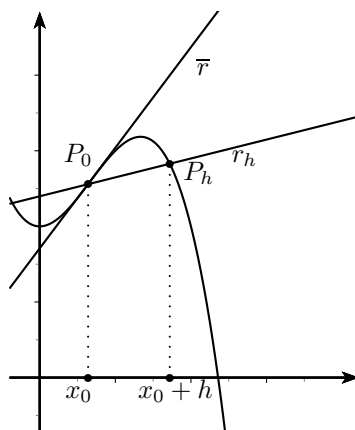
³ S’intende che l’asse x va preso con la sua orientazione, mentre l’orientazione di r è indifferente.

⁴ Ma solo delle funzioni lineari: infatti da $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$ si deduce $f(x) = m(x-x_0) + f(x_0)$.

27.3 Interpretazione geometrica

Definizione 98 (Grafico di una funzione). L'insieme $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \forall x \in \mathbb{D}\}$ essendo $\mathbb{D}$ il dominio di f , è detto grafico di f

Sia $P_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, in particolare $P_0 = (x_0, f(x_0))$, per ogni $h \neq 0$, sia r_h la retta $P_h P_0$ secante G_f . Il coefficiente angolare della secante r_h è il rapporto incrementale $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$



$\widehat{tgr_h}$ ed essendo: $-\frac{\pi}{2} < \widehat{tgr_h} < \frac{\pi}{2}$ la derivabilità di f in x_0 significa l'esistenza di un limite finito $\overline{m}$ per il rapporto incrementale al tendere di h a 0, e quindi l'esistenza di una retta tangente come posizione limite della retta r_h .

Equazione della tangente alla curva-grafico di una funzione f in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ quando f sia derivabile in x_0 è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

27.4 La funzione derivata

Sia f una funzione reale di variabile reale definita in un insieme A di $\mathbb{R}$, detto $A' \subseteq A$ l'insieme in cui f è derivabile, si associ ad ogni punto di $x \in A'$ la derivata della f in x . Si ottiene così una funzione che è detta funzione derivata prima di f , e si indica con f' .

Se f è derivabile e così pure f' , la derivata di questa è detta derivata seconda di f e si indica con f'' , e così via ottenendo $f'' = (f')'$; $f''' = (f'')'$; $f^{(4)} = (f''')'$; $\dots f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. Per completezza si estende la definizione a tutti i casi e perciò si indica con $f^{(0)} = f$.

Indichiamo con $C^0(A)$ l'insieme di tutte le funzioni continue definite in A , con $C^1(A)$ l'insieme di tutte le funzioni derivabili in A ... con $C^n(A)$ le funzioni derivabili n volte, infine con $C^\infty(A)$ l'insieme delle funzioni che ammettono derivate di ogni ordine.

Si ha $C^0(A) \supset C^1(A) \supset \dots \supset C^m(A) \supset \dots \supset C^\infty(A)$

Infatti tutte le funzioni C^1 sono C^0

Teorema 75 (se f è derivabile allora è continua). Una funzione f derivabile in x_0 è continua in x_0

Dimostrazione. Dalla definizione di derivata si ha che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ per cui esiste una funzione $\varepsilon(x_0, h)$ tale che $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0, h)$, da cui $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(x_0, h)h$ ed applicando il limite si ottiene: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(x_0, h)h = f(x_0)$ da cui si deduce la continuità. $\square$

È evidente che l'inclusione $C^0(A) \supset C^1(A)$ è propria, infatti: la funzione $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile nello zero.

27.4.1 Esempio ... estremo

Si ponga $f_1(x) = |x|$ per $|x| \leq \frac{1}{2}$ definiamo $f_1(x)$ negli altri valori di x imponendo $f_1(x + n) = f_1(x)$ per ogni reale x e per ogni intero n . Per $n > 1$ sia $f_n(x) = 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$, da cui perveniamo alla definizione di $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. f è continua ma mai derivabile.

```
from sympy import *
init_printing()
import math
```

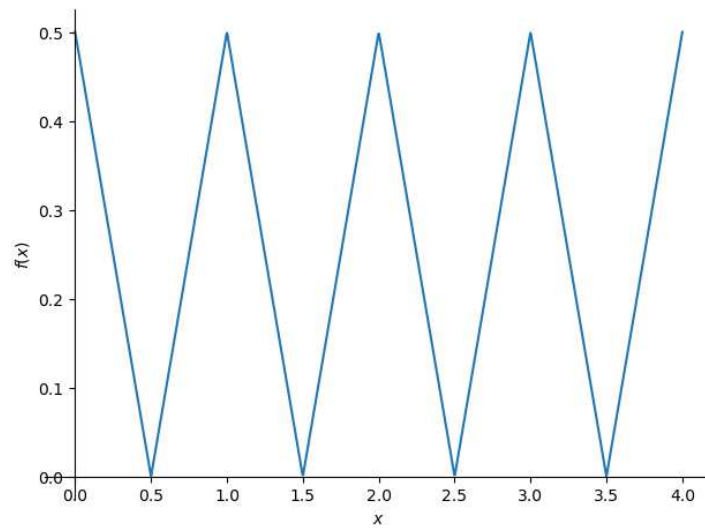
```
def g(x) :
    y = Abs(x - floor(x) - Rational(1,2))
    return y
```

```
x = symbols('x', real = True)
```

```
g(x)
```

$$\left| -x + \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \right|$$

```
Gg = plot(g(x), (x,0,4), show =False)
Gg.show()
```



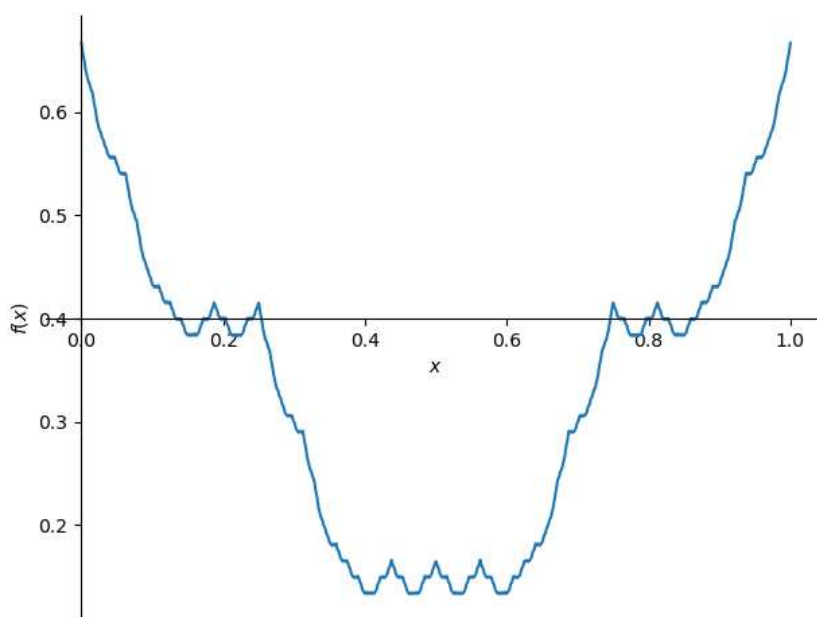
```
def f(n,x) :
    y = 4**(-n+1)*g(4**(n-1)*x)
    return y
def h(n,x) :
    k = symbols('k', integer = True)
    y = Sum(f(k,x),(k,1,n))
    return y
```

```
n = symbols('n', integer = True)
```

```
h(n,x)
```

$$\sum_{k=1}^n 4^{1-k} \left| -4^{k-1}x + \lfloor 4^{k-1}x \rfloor + \frac{1}{2} \right|$$

```
Gh = plot(h(300,x), (x,0,1), show = False)
Gh.show()
```

Figura 27.1: Grafico di una funzione continua non derivabile in n punti

27.5 Regole di derivazione

Teorema 76 (derivabilità di $cf(x)$). Siano f derivabili in x_0 allora $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

Dimostrazione. Si dimostra applicando la linearità dell'operatore limite. □

Teorema 77 (derivata della somma). Siano f, g funzioni derivabili in x_0 allora $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Dimostrazione. Si dimostra applicando la linearità dell'operatore limite. □

Teorema 78 (derivata del prodotto). Siano f, g funzioni derivabili in x_0 allora

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Teorema 79 (derivata del quoziente). Siano f, g con $g(x_0) \neq 0$ funzioni derivabili in x_0 allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Teorema 80 (derivata della funzione composta). Siano f, g componibili, esiste $g \circ f$. La f sia derivabile in un punto x_0 e la g sia derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ allora $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$

Dimostrazione. Ad ogni incremento h corrisponde un ben determinato incremento della f , $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, ad ogni Δy corrisponde un ben determinato incremento della g $\Delta z = g(y_0 + h) - g(y_0)$ che è anche l'incremento della $g \circ f$ corrispondente ad h .

Quindi si può pensare il rapporto incrementale $\frac{\Delta z}{h}$ di $g \circ f$ come il prodotto: $\frac{\Delta z}{h} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{h}$ uguaglianza dalla quale passando al limite per x tendente a 0 si ottiene la tesi ... ma

« Ma il diavolo può metterci la coda: può avvenire che per certi incrementi h (pur diversi da 0) la f abbia incremento nullo, $\Delta y = 0$. Il che manda all'aria l'uguaglianza di sopra. È d'uopo dunque aggirare la difficoltà con uno stratagemma.

Il rapporto incrementale $R_{y_0}^g(\Delta y) = \frac{\Delta z}{\Delta y}$ non è definito per $\Delta y = 0$. Conveniamo allora di attribuire alla funzione $R_{y_0}^g$, come valore per $\Delta y = 0$ il suo limite (esistente per ipotesi) per $\Delta y \rightarrow 0$. Poniamo dunque: $R_{y_0}^g(0) = g'(y_0)$, l'uguaglianza $\frac{\Delta z}{h} = R_{y_0}^g(\Delta y) \frac{\Delta y}{h}$ sussiste allora sia se è $\Delta y \neq 0$ sia se è $y = 0$.

Esaminiamo il comportamento per $h \rightarrow 0$ dei due fattori al secondo membro della precedente uguaglianza.

L'incremento Δy , funzione di h , ha limite 0 a cagione della continuità della f in x_0 ; la funzione $R_{y_0}^g$ ha per ipotesi, per $\Delta \rightarrow 0$, limite $g'(y_0)$ ed è anche continua in 0. È quanto basta per concludere che è:

$$\lim_{h \rightarrow 0} R_{y_0}^g(\Delta y) = g'(y_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(x_0)$$

Dal teorema sul limite di un prodotto segue allora la tesi »

□

Teorema 81 (derivata dell'inversa). Se una funzione f è monotona in senso stretto in un intorno di x_0 e derivabile in x_0 , tale che $f'(x_0) \neq 0$ allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ ed è:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

27.5.1 Derivate delle principali (o meglio più interessanti) funzioni

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ attenzione } x > 0, x^\alpha \text{ è una funzione esponenziale}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

27.6 Funzioni crescenti localmente, funzioni crescenti in un intervallo

Definizione 99 (Funzione crescente localmente). Si dice che una funzione f è crescente in x_0 se esiste un intorno U di x_0 nel quale $\forall x \in U - x_0$ si ha:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (27.1)$$

Se nella 27.1 sostituiamo al segno di $>$ il segno $<$ otteniamo la definizione di funzione decrescente in x_0 , con $\geq$ non decrescenza ed infine con $\leq$ non crescenza.

Definizione 100 (Funzione crescente su di un intervallo). Si dice che una funzione f è crescente in un intorno U di x_0 se $\forall x_1, x_2 \in U$ tali che $x_1 \neq x_2$ si ha:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad (27.2)$$

Se nella 27.2 sostituiamo al segno di $>$ il segno $<$ otteniamo la definizione di funzione decrescente in U , con $\geq$ non decrescenza ed infine con $\leq$ non crescenza.

Non si faccia confusione fra le nozioni ora definite, 27.1 ha carattere locale, mentre 27.2 riguarda intervalli. Se f è crescente in A è crescente in ogni punto di A , sarebbe però errato ritenere che se una funzione è crescente in x_0 vi sia un intorno di x_0 in cui f è crescente, infatti la funzione:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è crescente nello zero: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} + \frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}$ (cioè ha derivata prima positiva nello zero) ma in ogni intorno dello zero esistono punti in cui la derivata cambia segno: infatti essendo $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ si ha $f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = \frac{3}{2} \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ mentre

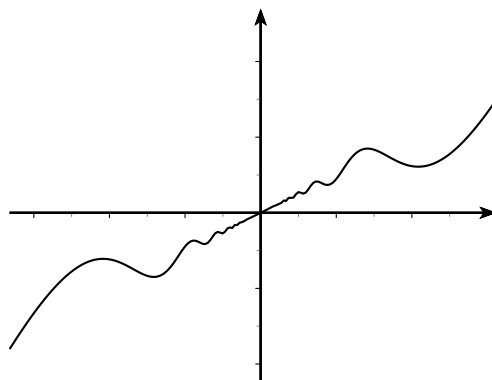


Figura 27.2: funzione crescente nello 0 ma in nessun intervallo dell'origine

$$f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = -\frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quanto ricavato non vuol dire che se f è crescente in ogni punto $x \in U \in \mathcal{I}_{x_0}$ non sia crescente in U , ma che, sapendo che f è crescente in x_0 non segue necessariamente che f sia crescente in U .

Teorema 82 (funzione crescente in un punto). Se una funzione f ha in x_0 derivata positiva, allora è crescente in x_0

Dimostrazione. Osserviamo che il teorema ci indica che $\exists f'(x_0)$ e perciò dalla definizione di derivata si ha: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, applicando il teorema di permanenza del segno (teorema 68) si ricava che $\exists U \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in U \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Applicando la definizione 99 si ottiene la tesi. $\square$

Teorema 83 (di Fermat sui punti stazionari). Se una funzione f , è derivabile in un punto x_0 interno al suo dominio, ed ha in x_0 un massimo o un minimo relativo, è **necessariamente** $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione. Si nota che se $f'(x_0) < 0$ allora f è decrescente in x_0 e se $f'(x_0) > 0$ allora f è crescente in x_0 , pertanto si ricava la tesi. $\square$

Delle proposizioni ora stabilite non sussistono le inverse: può, in effetti, una funzione essere crescente in un punto ed essere ivi derivabile, senza che la derivata sia positiva: la funzione $f(x) = x^3$ definita in $\mathbb{R}$ è crescente nello 0 ma $f'(0) = 0$, questo stesso esempio ci fa vedere che la condizione non assicura che x_0 sia punto di massimo o minimo relativo.

Teorema 84 (funzione crescente in un intervallo). Se una funzione, definita in un intervallo I , è crescente in ogni punto di I , essa è crescente in I .

Dimostrazione. siano x_1 e x_2 punti arbitrari di I , e sia $x_1 < x_2$ proviamo che $f(x_1) < f(x_2)$.

Dall'ipotesi che f è crescente in x_1 segue l'esistenza di un intorno destro U (ad esempio del tipo $(x_1 - \delta, x_1)$) di x_1 in cui $f(x) > f(x_1) \forall x \in U$. Consideriamo l'insieme: $E = \{x : x_1 < x < x_2, f(x) > f(x_1)\}$ sia $\xi = \sup E$, proviamo che $\xi = x_2$.

Se fosse $\xi < x_2$, dall'ipotesi di crescenza di f in ξ segue che $f(\xi) > f(x_1)$ poiché in ogni intorno sinistro di ξ vi sono punti di E ; e inoltre $f(x) > f(x_1)$ per ogni x in un opportuno intorno destro di ξ , in contrasto con il fatto che $\xi = \sup E$. Dunque $\xi = x_2$, ed è, come si visto, $f(\xi) = f(x_2) > f(x_1)$. $\square$

Il precedente teorema “funziona” solo sotto l'ipotesi che il dominio sia un intervallo. Ad esempio la funzione: $\operatorname{tg} x$ è crescente in ogni punto ma non è crescente nell'intero dominio.

Teorema 85 (condizione sufficiente affinché una funzione sia crescente in un intervallo). Se una funzione f , definita e derivabile in un intervallo I , ha $f'(x) > 0 \forall x \in I$ allora f è crescente su I .

Quindi condizione **sufficiente** affinché f sia crescente su I è che f sia definita in un intervallo I , sia derivabile e risulti $f'(x) > 0 \forall x \in I$

Prima di analizzare le proprietà delle funzioni definite su di un intervallo è opportuno digerire bene quanto esposto in questa parte. Analizzate i teoremi con cura e attenzione cogliendo tutti i risvolti ... buon lavoro

Capitolo 28

Proprietà delle funzioni continue su un intervallo

28.1 Zeri delle funzioni continue

(Tratto da M.Apostol 1987)

Teorema 86 (di Bernhard Bolzano). Sia f una funzione continua su $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$ allora $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Dimostrazione. Supponiamo, senza violare la generalità del problema, che $f(b) > 0$, sia ora $c = \frac{b+a}{2}$, si possono avere i seguenti casi:

i) $f(c) > 0$ allora ridefiniamo $a_1 = a$, $b_1 = c$

ii) $f(c) < 0$ allora ridefiniamo $a_1 = c$, $b_1 = b$

iii) $f(c) = 0$ teorema dimostrato

avendo posto $a_0 = a$ e $b_0 = b$ possiamo proseguire nella costruzione ottenendo intervalli $[a_n, b_n]$ di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$ e tali che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$. La successione $\{a_n\}$ è formata da punti dell'intervallo $[a, b]$, non è vuota in quanto $a \in \{a_n\}$, pertanto sia $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$, (α esiste per l'assioma dell'estremo superiore) dato che $\alpha \in [a, b]$, e sapendo, per ipotesi, che f è continua in α , si ha: se $f(\alpha) > 0$, per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno U di α in cui $\forall x \in U$ $f(x) > 0$, ma questo implica che preso un $\bar{x} > \alpha$ si ha $f(\bar{x}) > 0$ impossibile in quanto α è estremo superiore degli a_n , analogo ragionamento per $f(\alpha) < 0$, pertanto $f(\alpha) = 0$ $\square$

28.1.1 Un po' di storia

Nel 1817 il filosofo e matematico boemo Bernhard Bolzano diede alle stampe un opuscolo in cui presentava una dimostrazione puramente analitica di un teorema conosciuto e usato da tempo in matematica, che così era formulato da Bolzano nel titolo del suo scritto: «tra due valori qualunque che danno luogo a due risultati di segno opposto si trova almeno una radice reale dell'equazione». Allo scopo, dopo alcune osservazioni introduttive sul metodo, Bolzano introduceva in

maniera rigorosa alcuni concetti fondamentali, come quello della continuità delle funzioni, della convergenza delle serie e dell'estremo superiore, di cui si serviva in maniera essenziale nella sua dimostrazione.

Nel metodo di dimostrazione più corrente [del teorema] ci si basa su una verità ispirata alla geometria: e cioè che ogni linea continua a curvatura semplice le cui ordinate sono prima positive e poi negative (o vice versa) deve necessariamente tagliare l'asse delle ascisse in un punto situato tra queste coordinate. Non c'è assolutamente nulla da obiettare né contro la giustezza né contro l'evidenza di questo teorema geometrico. Ma è anche del tutto manifesto che c'è qui una mancanza intollerabile contro il buon metodo, che consiste nel voler dedurre le verità della matematica pura (o generale) (ossia dell'aritmetica, dell'algebra o dell'analisi) da considerazioni che appartengono a una parte applicata (o speciale) soltanto, ossia alla geometria.

... In maniera analoga bisogna rifiutare la dimostrazione che certi ne hanno dato a partire dal concetto di continuità di una funzione, facendovi intervenire i concetti di tempo e di movimento.

... I concetti di tempo e di movimento (e questo ancor di più) sono altrettanto estranei alla ma tematica generale del concetto di spazio, il che non può essere messo in dubbio da nessuno.

Si intende con l'espressione: una funzione $f(x)$ varia secondo la legge di continuità per tutti i valori di x situati all'interno o all'esterno di certi limiti nient'altro che questo: se x è uno qualunque di quei valori, la differenza $f(x + \omega) - f(x)$ può essere resa più piccola di ogni grandezza data, se si può prendere ω tanto piccolo quanto si vuole, ossia quando si ha $f(x + \omega) = f(x) + \Omega$

Se in una successione di grandezze

$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots, F_n(x), \dots, F_{n+r}(x)$ la differenza tra il termine n -esimo $F(x)$ e ogni termine successivo $F_{n+r}(x)$ lontano quanto si vuole dall' n -esimo, si mantiene più piccola di ogni grandezza data, prendendo n sufficientemente grande: allora esiste sempre una certa grandezza costante, ed una sola, a cui si avvicinano sempre più i termini di questa successione, e a cui si possono avvicinare tanto quanto si vuole, prolungando la serie sufficientemente lontano.

Nelle ricerche di matematica applicata, non è raro che una certa proprietà M appartenga a tutti i valori di una grandezza variabile x che sono minori di un certo u , senza che si sappia al tempo stesso che questa proprietà non appartiene più ai valori che sono maggiori di u . In tali casi può esistere ancora più di un u , che è $> u$ e del quale si può affermare allo stesso modo che tutti i valori di x più piccoli possiedono la proprietà M ; anzi, questa proprietà può appartenere a tutte le x senza eccezione. Al contrario, se non si sa che questo soltanto, e cioè che M non è una proprietà di tutte le x in generale, si sarà già autorizzati a concludere, riunendo queste due indicazioni, che esiste una certa grandezza U , che è la più grande fra quelle per le quali può essere vero che tutti i valori di x più piccoli possiedono la propria M . Il teorema seguente ne dà la prova.

Teorema 87 (dell'estremo di una grandezza). Se una proprietà M non appartiene a tutti i valori di una grandezza variabile x , ma appartiene a tutti quelli che sono minori di un certo u : allora esiste sempre una grandezza U che è la più grande di quelle per le quali si può affermare che tutti i valori più piccoli di x possiedono la proprietà M .

BERNHARD BOLZANO, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes

Corollario 2 (del teorema di Bolzano). Sia f una funzione continua su $[a, b]$, si scelgano due punti $x_1 < x_2$ in $[a, b]$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$ allora f assume nell'intervallo (x_1, x_2) tutti i valori

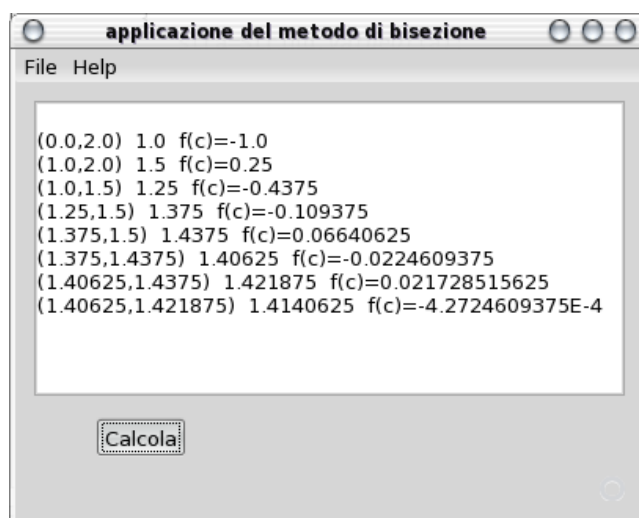
tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

Dimostrazione. Supponiamo $f(x_1) < f(x_2)$ e sia $f(x_1) < k < f(x_2)$, costruiamo $g(x) = f(x) - k$, continua su $[x_1, x_2]$, tale che $g(x_1)g(x_2) < 0$ perciò si può applicare il teorema di Bolzano, che per la generalità nella scelta di k ci conduce alla tesi. $\square$

28.1.2 Osservazione

Il teorema di Bolzano nella sua dimostrazione ci introduce un interessante metodo per il calcolo dello zero di una funzione continua.

Applichiamo tale metodo al calcolo dello zero positivo dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ con un semplice algoritmo, che chi legge dovrebbe riprodurre, si ottiene:



Si calcoli lo zero a meno di (10^{-2}) dell'equazione $e^x + x^2 = 4$ nell'intervallo $[0, 2]$

Teorema 88 (Limitatezza delle funzioni continue). Sia f una funzione continua su di un intervallo chiuso $[a, b]$. Allora f è limitata su $[a, b]$, cioè $\exists C \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq C$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponiamo f illimitata su $[a, b]$, sia $c = \frac{b+a}{2}$, si possono avere i seguenti casi:

- i) f è illimitata su $[a, c]$ allora ridefiniamo $a_1 = a$, $b_1 = c$
- ii) f è illimitata su $[c, b]$ allora ridefiniamo $a_1 = c$, $b_1 = b$
- iii) f è illimitata in entrambi i sub-intervalli allora ridefiniamo $a_1 = a$, $b_1 = c$

Possiamo ora procedere bisecando via via, si costruisce così una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ di ampiezza $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in cui f è illimitata. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, A è contenuto in $[a, b]$

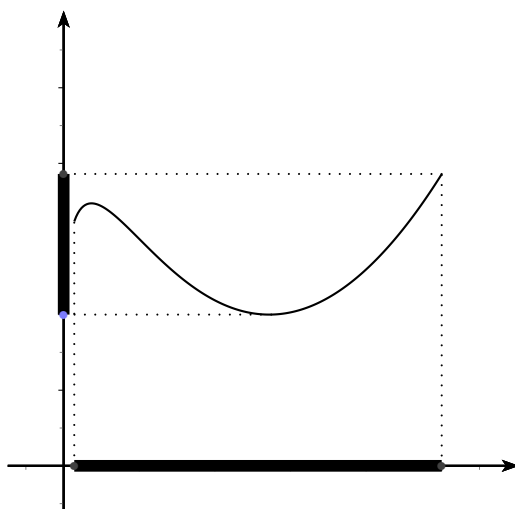
ed è non vuoto $a \in A$ sia $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ $\alpha \in [a, b]$. Applicando la definizione di continuità di f in α si ha, scegliendo ad $\varepsilon = 1$, che esiste un intorno di α $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ nel quale $|f(x) - f(\alpha)| < 1$ da cui si ricava $|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|$, questo comporta che f risulta limitata da $1 + |f(\alpha)|$ in $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, ma è sempre possibile scegliere un n tale che $[a_n, b_n] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ in quanto $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ che applicando l'ipotesi assurda ci porta a negare la continuità in α . $\square$

Teorema 89 (di Weierstraß). ¹ Sia f una funzione continua in $[a, b]$ allora f ammette in $[a, b]$ massimo e minimo.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che f raggiunge il suo estremo superiore in $[a, b]$. Ne segue allora il risultato per l'estremo inferiore, in quanto l'estremo inferiore di f è l'estremo superiore di $-f$.

Poniamo $M = \sup f$. Ragioniamo per assurdo, supponendo che non esista alcun $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = M$, sia $g(x) = M - f(x)$, $g(x)$ è definita positiva in $[a, b]$ e perciò la reciproca $\frac{1}{g}$ è continua su $[a, b]$ e quindi anche limitata, $\frac{1}{g(x)} < C$ con $C > 0$, quindi $M - f(x) > \frac{1}{C}$, e anche $f(x) < M - \frac{1}{C}$ per tutti gli $x \in [a, b]$, in evidente contraddizione col fatto che $M = \sup f$ $\square$

Con i teoremi ora dimostrati siamo giunti ad affermare che una funzione continua trasforma un insieme chiuso in un insieme chiuso.



¹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
nato il 31 ottobre 1815 a Ostenfelde attuale Germania morto il 19 febbraio 1897 a Berlino.

Capitolo 29

Funzioni derivabili su intervalli

29.1 Premessa

Quello che ci proponiamo ora è partendo dall'idea che $f'(x_0)$ ci dà informazione sulla rapidità del crescere della f in x_0 , così $f''(x_0)$ dà informazioni sul crescere di f' e così via. conoscendo i valori in x_0 di $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}, \dots$, e sapendo entro quali limiti si mantiene $f^{(n+1)}$ in un intorno di x_0 si può sperare di ottenere delle buone approssimazioni per la f in tutti i punti dell'intorno scelto.

Per arrivare ad un tale ordine di risultati occorrono alcune proposizioni fondamentali sulle funzioni derivabili su un intervallo.

« Si pensi, ad esempio, che pur avendo detto finora molto sulle derivate non siamo ancora in grado di rispondere alla seguente domanda: supposto che una funzione abbia, in ogni punto di un intervallo, derivata nulla, possiamo dedurne che la funzione è costante sull'intervallo stesso? Chi studia provi, se crede, a rispondere: non è facile che ci riesca, comunque, l'averlo tentato gli farà apprezzare meglio il teorema di Lagrange, e contribuirà anche a creargli quel minimo di "suspence" senza la quale la matematica spesso si presenta come una pappa insipida e poco digeribile. »

Teorema 90 (di Rolle). ¹ Sia f una funzione continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) tale che $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$

Dimostrazione. La funzione essendo continua su $[a, b]$ ammette massimo e minimo, se i punti di massimo e di minimo si trovano in (a, b) per quanto precedentemente dimostrato si ha la tesi, se si trovano sugli estremi allora la funzione è costante e quindi ogni punto è di massimo e minimo e quindi la tesi. $\square$

Teorema 91 (di Cauchy). ² Siano f e g due funzioni continue su $[a, b]$ derivabili su (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

¹Michel Rolle Nato: 21 aprile 1652 in Ambert, Basse-Auvergne, Francia Deceduto: Francia 8 Nov 1719 a Parigi, Rolle è ricordato soprattutto per il 'Teorema di Rolle' che è stato pubblicato in dimostrazione d'une Méthode pour les résoudre Egalitez de tous les degrez nel 1691. Questo lavoro è stato scritto per fornire le prove di alcuni metodi, che ha dato senza giustificazione nel Traité d'algèbre. Il nome 'Teorema di Rolle' stato dato a questo risultato di base da Giusto Bellavitis nel 1846.

²Augustin Louis Cauchy nato il 21 agosto 1789 a Parigi morto il 23 maggio 1857 a Sceaux (nei pressi di Parigi)

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema si basa sull'idea di costruire una funzione ausiliaria (combinando linearmente f e g ³) a cui possa essere applicato il teorema di Rolle.

Dimostriamo però prima che $g(a) \neq g(b)$ infatti se fosse $g(a) = g(b)$ dal teorema di Rolle si dovrebbe trovare un c in (a, b) per cui $g'(c) = 0$ contro ipotesi.

Sia quindi $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, h è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) , per poter applicare Rolle fissiamo i parametri λ, μ in modo tale che $h(a) = h(b)$, $h(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = h(b) = \lambda f(b) + \mu g(b)$ da cui si ricava: $\lambda(f(b) - f(a)) = -\mu(g(b) - g(a))$ che permette di ricavare, $\lambda = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$ e $\mu = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Appliciamo ora Rolle ad $h(x) = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$ si ha che $\exists c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$ cioè dato che $h'(x) = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) = 0$ che calcolata in c conduce alla tesi. L'uguaglianza ora dimostrata si scrive di solito nella forma

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (29.1)$$

ma per poterlo fare è necessario che i denominatori della 29.1 siano diversi da zero. Per poter ottenere questo si devono aggiungere al teorema una fra le seguenti ipotesi:

- a) sia $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dal teorema di Rolle, ragionando per assurdo segue $g(b) \neq g(a)$.
- b) sia $g(a) \neq g(b)$, e in nessun punto di (a, b) $f'(x)$ e $g'(x)$ si annullano simultaneamente. (Ne segue che nel punto c per il quale sussiste 29.1 è $g'(c) \neq 0$. Infatti se si annulla il primo membro di $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ allora si annulla il secondo membro, ed essendo per ipotesi $g(b) - g(a) \neq 0$ dovrebbe essere $f'(c) = 0$ contro ipotesi.)

□

Osservazione

In molti autorevoli testi si trova questo enunciato del teorema di Cauchy:

Teorema 92 (di Cauchy debole). Siano f, g due funzioni definite in un medesimo intervallo chiuso $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ derivabili in tutti i punti interni e continue anche negli estremi. Allora esiste un punto ξ interno ad I tale che

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) \quad (29.2)$$

L'enunciato sopra riportato è dovuto a Dolcher (Dolcher 1972), il quale poi aggiunge:

“L'uguaglianza ora dimostrata si scrive più volentieri nella forma:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (29.3)$$

ma per poterlo fare è necessario che ciò che appare al denominatore sia diverso da 0; si potrà all'uopo formulare, in aggiunta alle altre ipotesi dette nell'enunciato del teorema l'una o l'altra delle seguenti:

- (A) sia $g'(x) \neq 0$ per ogni x interno ad I ;

³l'idea di scegliere una combinazione lineare deriva dal fatto che scartate le traslazioni che non portano al risultato (valori uguali agli estremi) è la funzione più semplice

(B) sia $g(a) \neq g(b)$, e in nessun punto interno si annullino simultaneamente $f'(x)$ e $g'(x)$

Consigliamo di tenere presente per il seguito particolarmente l'ipotesi (A)”

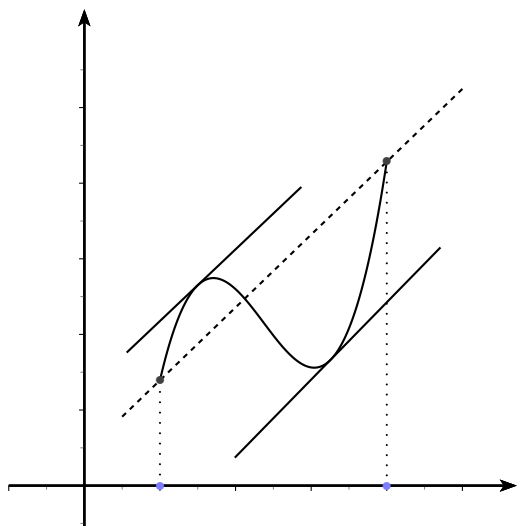
Nel testo originale di Cauchy (Lecons sur le calcul différentiel, M. Augustin-Louis Cauchy 1829) il teorema, a quanto io rilevo, è finalizzato all'approssimazione di funzioni con Taylor, nella cui dimostrazione si applica il teorema nella forma 29.1.

Teorema 93 (di Lagrange). ⁴ È il caso particolare del teorema di Cauchy nel quale g è la funzione identica.

Sia f una funzione derivabile in (a, b) e continua negli estremi a, b allora $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

È interessante il significato geometrico del teorema di Lagrange, nelle ipotesi del teorema esiste sempre almeno una tangente al grafico della funzione parallela alla secante gli estremi. Una



situazione in cui il teorema di Lagrange è applicato è la seguente: sia f continua in un intorno U di x_0 , derivabile in $U - \{x_0\}$ e continua in x_0 esiste $0 < h' < h$ tale che: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + h')$ posto $\frac{h'}{h} = \zeta$ con $0 < \zeta < 1$, si ha $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \zeta h)$ che è detta formula del valor medio. Questa formula è il primo passo verso la soluzione del problema dell'approssimazione delle funzioni mediante polinomi.

29.1.1 Esempio

Si vuole approssimare $\log 3$: poniamo $x_0 = e$ e $h = 3 - e$, la derivata $\frac{1}{x}$ del logaritmo è decrescente nell'intervallo $[e, 3]$, assume valori $\frac{1}{e} \simeq 0.3679$ e $\frac{1}{3} \simeq 0.3333$ dunque: $\log 3 = \log e + (3 - e)\frac{1}{\zeta}$ e quindi $1 + \frac{3 - e}{3} < \log 3 < 1 + \frac{3 - e}{e}$ da cui $1.093 < \log 3 < 1.104$

⁴Joseph-Louis Lagrange nato il 25 gennaio 1736 a Torino morto il 10 aprile 1813 a Parigi

29.1.2 Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema 94 (derivata nulla funzione costante). Una funzione f definita su di un intervallo la quale abbia in ogni punto derivata nulla, è necessariamente costante

Dimostrare con cura il teorema utilizzando Lagrange, attenzione verificare le ipotesi

Teorema 95 (derivata positiva funzione crescente). Una funzione f definita su di un intervallo la quale sia derivabile, con derivata positiva in ogni punto, è necessariamente crescente sull'intervallo. (analogo nel caso negativo)

Dimostrare con cura il teorema utilizzando Lagrange, attenzione verificare le ipotesi.

Per i due teoremi sopra enunciati costruire dei controesempi atti a dimostrare che le condizioni sono necessarie ma non sufficienti

Teorema 96 (del limite della derivata). Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 , derivabile in ogni punto diverso da x_0 , esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$

Dimostrazione. Ad ogni incremento h (tale che $x_0 + h \in U - \{x_0\}$) associamo un punto ζ di quelli la cui esistenza è garantita dal teorema di Lagrange; $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\zeta)$.

Essendo $\lim_{h \rightarrow 0} \zeta(h) = x_0$ inoltre $\forall h \ \zeta(h) \neq x_0$ si ha, applicando il teorema sul limite delle funzioni composte, $\lim_{h \rightarrow 0} f'(\zeta(h)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ $\square$

Capitolo 30

Confronto di infiniti ed infinitesimi mediante derivazione

30.1 Esame di stato 2017 sessione ordinaria

Quesito 6. Determinare il numero $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^\alpha}$ sia non nullo.

Proviamo ad affrontare il quesito utilizzando ciò che sappiamo, cerchiamo di usare i limiti notevoli noti, ad esempio:

$$\frac{x \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right)}{x^\alpha} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^{\alpha-1}}$$

ma ricadiamo in una forma indeterminata, che non ci permette, a prime vista, di giungere alla soluzione.

Proviamo ora ad applicare qualche idea più “ardita”.

Osserviamo che: detta $f(x) = \sin x - x$ è facile ricavare che f è continua in intorno di 0 (anche piuttosto ampi) e in questi intorno è sicuramente derivabile, così pure la funzione $g(x) = x^\alpha$ gode delle stesse proprietà in intorno di 0. In un opportuno intorno di 0 f, g sono continue e derivabili, pertanto si può applicare il teorema di Cauchy (91). In particolare nell'intervallo $[x, 0]$, ma dato che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$ si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ e pertanto se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ esiste allora sarà uguale al limite cercato.

Proviamo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\alpha x^{\alpha-1}}$ ma, anche in questo caso ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata, ma nessuno ci vieta di riapplicare la stessa procedura: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$ ma qui, se $\alpha - 2 = 1$ otteniamo che il limite cercato vale $-\frac{1}{6}$.

Formalizziamo ora quanto abbiamo fatto.

30.2 I teoremi de L'Hôpital

Teorema 97 (de L'Hôpital caso $\frac{0}{0}$). Siano f, g due funzioni definite in $U - \{x_0\}$, entrambe infinitesime per $x \rightarrow x_0$ sia $g'(x) \neq 0$ ed esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Dimostrazione. Prolunghiamo per continuità f e g in x_0 ponendo $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$. Così ad ogni intervallo $[x_0, x_0 + h]$ è applicabile il teorema di Cauchy: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Per l'ipotesi il limite del rapporto delle derivate esiste, supponiamo sia l quindi: $\forall \varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che per $0 < x - x_0 < \delta$ si ha $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$ ma per $|h| < \delta$ dato che $|\zeta - x_0| < \delta$ si ha $\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} - l \right| < \varepsilon$ ossia la tesi. $\square$

Teorema 98 (Limite della derivata prima). Sia f una funzione continua in un intorno $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ e derivabile in tutti i punti di U escluso x_0 . Se il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ allora esiste la derivata prima di f nel punto x_0 ed è $f'(x_0) = \ell$.

Dimostrazione. Il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è una forma indeterminata a cui si può applicare de L'Hôpital pertanto si ha:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} = \ell = f'(x_0)$ $\square$

Nella dimostrazione del teorema 98 si ricorda (con $\Leftarrow$) che l'esistenza del limite del rapporto delle derivate implica l'esistenza del limite del rapporto delle due funzioni ma, se il limite del rapporto delle derivate non esiste, venendo meno l'ipotesi non si può applicare il teorema. In questo caso possiamo trovare una funzione derivabile in un punto in cui il limite della derivata non esiste.

La funzione $\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è un esempio.

Teorema 99 (de L'Hôpital caso $\frac{\infty}{\infty}$). Siano f, g due funzioni definite in $U - \{x_0\}$, entrambe infinite per $x \rightarrow x_0$ sia $g'(x) \neq 0$ ed esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Dimostrazione. Basta osservare che per un fissato $\bar{x}$ si ha per il teorema (91) $\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ma $\frac{f(x) - f(\bar{x})}{g(x) - g(\bar{x})} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(\bar{x})}{f(x)}}{1 - \frac{f(\bar{x})}{g(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} \phi(x)$ dove $\phi(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow x_0$. $\square$

30.2.1 Osservazione

Si noti che i teoremi de L'Hôpital permettono di dedurre l'esistenza del limite del rapporto delle funzioni dall'esistenza del limite del rapporto delle derivate.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Non è escluso che $\frac{f}{g}$ abbia limite senza che avvenga lo stesso per $\frac{f'}{g'}$, ad esempio: siano $f(x) =$

$$x + \sin x \text{ e } g(x) = x - \sin x, \text{ si consideri il } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)} = 1 \text{ ma } \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \text{ non ammette limite per } x \rightarrow +\infty$$

30.2.2 Raccomandazioni

«...l'esperienza mostra che la regola de L'Hôpital riesce simpatica a molti, al punto che ci si affezionano sino a dimenticare ciò che sanno, per applicarla in casi nei quali ciò è inutile od insensato¹. Ricorrere alla detta regola per determinare limiti come:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt{x}} \quad \dots$$

è tendenza all'evasione: dimenticare ciò che si è conquistato con un certo sforzo per affidarsi ad una regola che non sempre facilita il problema

Altra raccomandazione: non si proceda all'applicazione della regola in maniera *rinocerontica*, ma si cerchi di rendere più semplici le espressioni separando fattori aventi limite finito non nullo, o cambiando variabili.

Ad esempio sarebbe *folle* chi per ricercare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - x - 1)(1 + \operatorname{arctg} x)}{\sin^2 x (1 + \cos^2 x)} \quad (30.1)$$

calcolasse brutalmente le derivate del numeratore e del denominatore ...»

facendo tesoro delle raccomandazioni calcolare il limite 30.1

¹Insensato sarebbe, ad esempio, applicarla per ricavare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ oppure $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$: per farlo deve supporre la conoscenza delle derivate di $\sin x$ e di e^x , che sono state calcolate proprio in base alla conoscenza di questi limiti

Esercizi in cui la soluzione si può calcolare non solo con l'uso rinocerontico delle regole de L'Hôpital:

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} |\log x|^{1-x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3 \sin x}{x^3 + 1} & \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \operatorname{tg} x} \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} x} - 1}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{x-1}{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\log x} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log \log x}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)} & \\
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x - \frac{1}{\pi - 2x} & &
 \end{array}$$

Capitolo 31

Approssimazione delle funzioni mediante polinomi

31.1 Sul significato delle approssimazioni

Tratto da Dolcher 1972 Nell'opinione comune, approssimativo è ciò che non è preciso; ed essendo che la Matematica è per sua natura ... precisa, ne verrebbe che l'approssimativo non è di sua pertinenza. Ma anche a prescindere da siffatti sillogismi della saggezza popolare, è piuttosto diffusa l'idea che quanto concerne approssimazioni è solo approssimativamente assoggettabile a trattazione matematica.

Poiché una tale idea sarebbe estremamente dannosa, soprattutto a chi studia in vista di applicazioni, vogliamo digredire brevemente dalla nostra esposizione del Calcolo differenziale per riflettere sul concetto di approssimazione ed esprimerlo in termini che gli meritino pieno diritto di cittadinanza nella Matematica.

Prendiamo in esame affermazioni come le seguenti:

- a) un certo muro è alto pressappoco 5 metri,
- b) in un grammo d'idrogeno vi sono circa $6.02 \cdot 10^{23}$ atomi,
- c) in un sacchetto vi sono circa 100 caramelle,
- d) l'angolo radiante è approssimativamente uguale a quello di $57^{\circ}17'45''$,
- e) un certo maiale pesa circa 2 quintali,
- f) Il numero 3,14 è un valore approssimativo di π .

Una prima osservazione: in certi casi, come negli esempi c), d), f) esiste un "vero valore", del quale o non si possiede o non s'intende dare informazione completa; in altri casi neppure è definibile un "vero valore" della quantità in discorso, come negli esempi a), b), e)¹. Questa distinzione non ha

¹a) non è definibile il numero reale che misura l'altezza di un muro. b): l'unità "grammo" non è definita con una precisione che apprezzi la massa di un atomo. e): come in a), inoltre, se il suino è supposto vivo, il suo peso anche nel giro di poche ore si accresce quando l'animale mangia e beve, e viceversa.

alcuna rilevanza per la trattazione matematica, nella quale si deve supporre, magari idealizzando il fatto applicativo, l'esistenza di un valore teorico da approssimare ².

Affermazioni come le precedenti, che pure hanno un valore informativo, non possono ricevere il significato di uguaglianze: ad esempio, la proposizione $\pi = 3,14$ è falsa. Se però vengono precisate, esse possono essere oggetto di trattazione matematica come disuguaglianze. Così nell'esempio a), può essere noto che l'errore non supera il decimetro, oppure che non supera il 2% del valore vero ³; la a) significa allora rispettivamente

$$|5 - x| < \frac{1}{10} \quad \left| \frac{5 - x}{x} \right| < \frac{2}{100}$$

la differenza $|5 - x|$ è detta errore assoluto, mentre il rapporto $\left| \frac{5 - x}{x} \right|$ è detto errore relativo. Noi nel seguito parleremo esclusivamente di errori assoluti, omettendo l'aggettivo. Dunque, le affermazioni di sopra, come ogni altra riguardante valutazioni approssimative, hanno diritto di cittadinanza nella Matematica soltanto a condizione che venga conosciuta una maggiorazione dell'errore.

Aggiungiamo però che in alcuni casi una maggiorazione dell'errore può convenzionalmente desumersi dal modo stesso della scrittura; così nell'esempio d) è sottointeso che è $|1\text{rad} - 57^\circ 17' 45''| \leq 0''5$. In particolare, si tenga ben presente che nella scrittura decimale, l'indicare n cifre dopo la virgola sottintende abitualmente che l'errore non supera $5 \cdot 10^{-(n+1)}$. Con tale convenzione che e quella adottata nelle tavole numeriche (p. es. dei logaritmi decimali), è accettabile, anche se abusivo, il segno $=$.

Ad esempio

$x = 1,617$ significa $1.6165 \leq x \leq 1.6175$ ⁴

...

Si noti che, in base alla detta convenzione, scrivere 1.270 non è lo stesso che scrivere 1.27. Talvolta, invece di scrivere abusivamente, p. es. $\pi = 3.1416$ si scrive $\pi \simeq 3.1416$.

31.2 Approssimazioni di una funzione.

Lo scopo al quale si mira è di approssimare una data funzione mediante funzioni più semplici, appartenenti a predeterminate classi (funzioni lineari, razionali intere, sinusoidali, ecc.). Due problemi diversi si presentano al riguardo: il primo, di carattere globale, consiste nella ricerca di approssimazioni uniformi su un prefissato intervallo, ossia si prefigge una maggiorazione dell'errore unica sull'intervallo; il secondo, di carattere locale, consiste nella ricerca di approssimazioni in vicinanza di un punto x , ossia di funzioni per le quali l'errore si possa rendere arbitrariamente piccolo pur di limitarsi ad un intorno di x_0 sufficientemente ristretto.

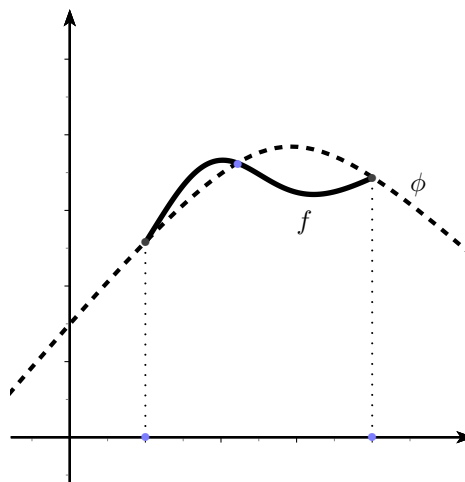
²a meno che si tratti di teorie matematiche raffinate, costruite ad hoc per questioni di carattere probabilistico o per questioni (com'è il caso nella Fisica teorica) dove l'indeterminazione ha rilevanza essenziale.

³qui siamo in contraddizione con quanto abbiamo detto poco fa, sull'inesistenza di un "valore vero" per l'esempio a). Chi legge ci scusi, ma per evitare la contraddizione dovremmo somministrargli un discorso troppo lungo e complicato.

⁴In queste disuguaglianze le indicazioni numeriche non sono usate nel significato convenzionale "abusivo".

Approssimazioni globali: procedimento d'interpolazione

Data f in $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ si ricerca, entro una prefissata classe di funzioni "semplici" una funzione la quale in alcuni punti di I abbia il valore della f oppure, se più conviene, un valore prossimo a f quello; migliorando lo scostamento (o "errore") $|f(x) - \phi(x)|$, ossia trovando un numero tale che

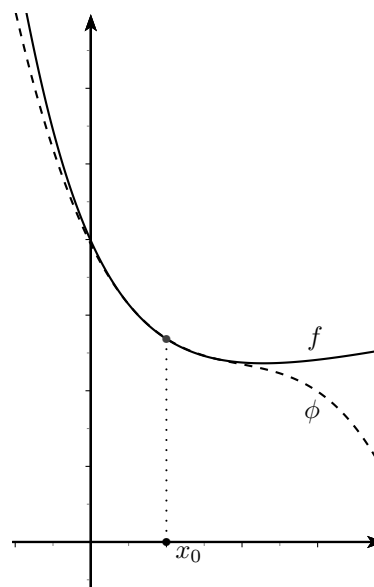


$\sup_{x \in I} |f(x) - \phi(x)| \leq \sigma$ la f risulta approssimata su I dalla ϕ , a meno di σ .

Di questo tipo di procedimenti non ci occuperemo sistematicamente

Approssimazioni locali

Data f in un intorno (od anche soltanto, in un intorno sinistro o destro) di un punto x , si ricerca, entro una prefissata classe di funzioni f "semplici" una funzione tale che la differenza $|f(x) - \phi(x)|$ sia, per $x \rightarrow x_0$ infinitesima di ordine superiore ad un intero n prefissato. In questo caso, com'è facile immaginare e come si vedrà più avanti, si avranno, in generale, approssimazioni tanto migliori quanto più sarà ristretto l'intorno di x e quanto più elevato si sceglierà l'intero n . Naturalmente, anche con questa impostazione saranno da ricercarsi maggiorazioni dell'errore valide entro un dato intervallo contenente x_0 come punto interno (o eventualmente come estremo).



Questo secondo tipo di procedimento di approssimazione è quello per il quale il Calcolo differenziale ha il maggiore successo e ce ne occuperemo in questo capitolo. Come classe di funzioni "semplici" sceglieremo la classe dei polinomi; sono infatti le funzioni delle quali i valori si calcolano nel modo teoricamente e praticamente più semplice, con sole operazioni di addizione, (sottrazione) e moltiplicazione.

Come si vedrà, e come sin d'ora è facile indovinare, quanto migliore si vuole che sia in un dato intorno l'approssimazione, oppure quanto più ampio si desidera che sia l'intorno nel quale l'errore ammette una prefissata maggiorazione, tanto più elevato si dovrà supporre, in generale, il grado del polinomio approssimante.

31.3 Approssimazione delle funzione con polinomi

31.3.1 Proprietà dei polinomi

Sia $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$ un polinomio di grado n in cui si evidenzia un punto "base" x_0 . Si può osservare che studiando il polinomio nei pressi di x_0 i suoi termini $a_k(x-x_0)^k$ sono infinitesimi per $x \rightarrow x_0$ di ordine k .

Le derivate successive di $p_n(x)$ sono:

$$p'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$p''_n(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-x_0) + \cdots + (n-1) \cdot na_n(x-x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

$$p_n^{(n-1)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)a_{n-1} + 2 \cdot 3 \cdots (n-1)na_n(x-x_0)$$

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

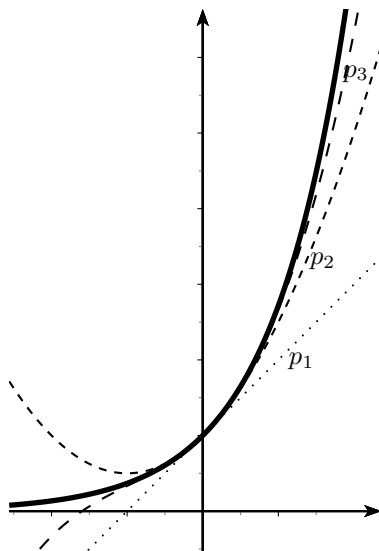
Quindi se si conoscono i valori del polinomio e delle sue derivate in un punto x_0 , rimangono

univocamente determinati i coefficienti $a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}$.

31.3.2 Esempio "guida"

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ è una funzione C^∞ , ci proponiamo di approssimare f in un intorno dello zero. Una prima approssimazione è quella lineare già vista:

costruiamo la retta tangente nello zero: $y = f(0) + f'(0)x$, nel caso specifico si ha $y = 1 + x$, proviamo ora ad approssimare con una parabola, imponiamo alla parabola di essere tangente alla f nel punto di ascissa 0 ed avere nello stesso punto derivata seconda uguale ad f .



$$\begin{cases} 2ax_0 + b = f'(x_0) \\ 2a = f''(x_0) \end{cases}$$

che ci permette di ottenere la parabola $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

calcolare l'equazione della cubica $p_3(x)$

Tenuto conto dell'esempio e delle osservazioni fatte sui polinomi, possiamo affermare che un polinomio approssimante la funzione in un intorno di un suo punto x_0 può essere così costruito:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Ci proponiamo ora di stimare l'errore che si commette utilizzando in un punto x $T_n(x)$ al posto di $f(x)$

Teorema 100 (di Taylor resto di Lagrange). Sia f una funzione definita in un intervallo $[x_0, x_0 + a]$ con $a > 0$, dotata in esso di derivate continue fino all'ordine $n - 1$ e dotata di derivata n -esima nell'intervallo $(x_0, x_0 + a)$.

Allora, $\forall x \in (x_0, x_0 + a) \quad \exists \xi \in (x_0, x)$ tale che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $E_{n-1}(x, x_0) = f(x) - T_{n-1}(x)$ si ha che $E_{n-1}(x_0, x_0) = 0 \quad \forall n$, il rapporto: $\frac{E_{n-1}(x, x_0)}{(x - x_0)^n}$, che ci permette di valutare l'ordine di infinitesimo di E_{n-1} , può essere scritto: $\frac{E_{n-1}(x, x_0) - E_{n-1}(x_0, x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n}$ e date le ipotesi è possibile applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo di estremi x e x_0 , ottenendo un punto ξ_1 tale che $\frac{E_{n-1}(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{E'_{n-1}(\xi_1, x_0)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}}$ e poi in modo analogo si ottiene $\frac{E_{n-1}(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{E'_{n-1}(\xi_1, x_0)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \dots = \frac{E_{n-1}^{n-1}(\xi_{n-1}, x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)}$ ma essendo $E_{n-1}^{(n-1)}(x, x_0) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + a)$ si ottiene: $\frac{E_{n-1}^{n-1}(\xi_{n-1}, x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ con $x_0 < \xi < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 < x$ Sviluppando l'uguaglianza trovata: $\frac{E_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ si ottiene la tesi. $\square$

Sia $f(x) = \log(x + 1)$, $x_0 = 0$ si ottiene:

$$\log(x + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + f^{(n)}(\xi) \frac{(x)^n}{n!}$$

il resto di Lagrange può essere scritto:

$$f^{(n)}(\xi) \frac{(x)^n}{n!} = \frac{x^n}{(1 + \xi)^n} \frac{1}{n}$$

Teorema 101 (di Taylor resto di Peano). Sia f una funzione definita in un intervallo $[x_0, x_0 + a]$ con $a > 0$, dotata in esso di derivate continue fino all'ordine $n - 1$ e dotata di derivata n -esima nell'intervallo $(x_0, x_0 + a)$.

Allora, $\forall x \in (x_0, x_0 + a)$ esiste una funzione $\sigma(x_0, x)$ infinitesima per $x \rightarrow x_0$ tale che:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + (f^{(n)}(x_0) - \sigma(x_0, x)) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Ricostruire la dimostrazione utilizzando la tecnica del teorema precedente applicando la regola de L'Hôpital anziché il teorema di Cauchy

31.3.3 Esempi

La funzione $\sin(x)$

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

...

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin(x) = T_{2n+1}(x) + \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\xi) \right|$$

La funzione $\cos(x)$

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

$$f'(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$

...

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos(x) = T_{2n}(x) + \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\xi) \right|$$

Dagli esempi precedenti emerge che una funzione dispari ($\sin(\cdot)$) ha come approssimante un polinomio formato da monomi di grado dispari, mentre la funzione $\cos(\cdot)$ pari ha solo addendi di grado pari. Verificare per le funzioni $\sinh(\cdot)$ e $\cosh(\cdot)$. Cercare una dimostrazione della precedente congettura

Costruire il polinomio di Taylor della funzione $\operatorname{tg}(x)$

31.3.4 Esercizio svolto

Problema 31. Si calcoli $\sqrt[10]{e}$ con quattro cifre decimali esatte

Soluzione. Per la $f(x) = e^x$ si ha che $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, utilizzando la formula di Taylor con resto di Lagrange possiamo scrivere: $e^x = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

Dato che $f^{(n+1)}(x) = e^x$ è monotona crescente, si ha, che nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{10}\right)$, un maggiorante per $f^{(n+1)}$ è sicuramente $\sqrt[10]{e}$ ma dato che: $\sqrt[10]{e} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < \frac{17}{10}$.

Quindi possiamo ottenere quattro cifre esatta di $\sqrt[10]{e}$ se: $\frac{7}{10} \frac{1}{m!} \frac{1}{10^m} < 10^{-5}$.

Si verifica facilmente che è necessario prendere $m = n + 1 = 4$ per ottenere:

$$\sqrt[10]{e} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} \pm 10^{-5} = 1.10517 \pm 10^{-5}$$

□

Lemma 2 (di Peano). Sia f una funzione definita in un intorno U di x_0 , abbia in U derivata fino all'ordine $n - 1$ ed esista $f^{(n)}(x_0)$.

Sia inoltre, $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora, se n è dispari, il punto x_0 non è né di massimo né di minimo, se n è pari ed è $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo, se $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo.

Dimostrazione. Applichiamo alla funzione f il teorema di Taylor-Peano, ottenendo: $f(x) = f(x_0) + (f^{(n)}(x_0) + \sigma(x, x_0)) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$, in quanto, per ipotesi, le $f^k(x_0) = 0 \forall k = 1, \dots, n - 1$.

Per il teorema di permanenza del segno si può determinare un intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ in cui $f^{(n)}(x_0) + \sigma(x, x_0)$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$.

I caso Sia n dispari; allora il fattore $(x - x_0)^n$ cambia segno in x_0 , quindi nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ci sono $f(x) > f(x_0)$ ma anche $f(x) < f(x_0)$, x_0 non è punto né di massimo né di minimo.

II caso Sia n pari allora; il fattore $(x - x_0)^n$ è positivo, se in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $f^{(n)}(x_0) > 0$ si ha che $f(x) > f(x_0)$ quindi x_0 è punto di minimo locale, se invece $f^{(n)}(x_0) < 0$ si ha che $f(x) < f(x_0)$ quindi x_0 è punto di massimo locale.

□

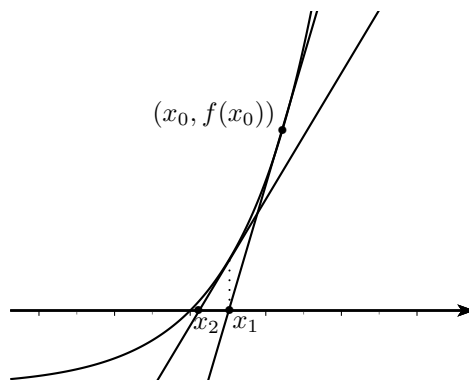
31.4 Calcolo degli zeri di una funzione

Sia f una funzione continua in $[a, x_0]$, assume valori opposti agli estremi ed è convessa in $[a, x_0]$.

Supponiamo $f(x_0) > 0$ calcoliamo la tangente t alla curva nel punto $(x_0, f(x_0))$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, calcoliamo, ponendo $y = 0$, x_1 l'ascissa del punto in cui t interseca l'asse delle ascisse; $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ si può poi proseguire in modo ricorsivo ottenendo

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (31.1)$$

Si può osservare che la successione è monotona, infatti $f(x_{n-1}) > 0$ per ipotesi, per la convessità



di f si ha che $f'(x_{n-1}) > 0$ se lo zero di f si trova a sinistra degli x_n mentre $f'(x_{n-1}) < 0$ se lo zero di f si trova a destra degli x_n .

Quindi essendo $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in [a, b]$ e x_n monotona segue che x_n ha limite x^* (converge a x^*), applicando alla (31.1) il limite parte per parte si ottiene: $x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$ da cui $f(x^*) = 0$

Velocità di convergenza

$$\begin{aligned} x_n - x^* &= x_{n-1} - x^* - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ x_n - x^* &= -\frac{f(x_{n-1}) + (x^* - x_{n-1})f'(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned}$$

Consideriamo lo sviluppo di Taylor di f con punto base x_{n-1} si ha:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + f''(\xi) \frac{(x^* - x_{n-1})^2}{2}$$

Calcoliamo lo sviluppo in $x = x^*$.

$$x_n - x^* = \frac{f''(\xi)}{f'(x_{n-1})} \frac{(x^* - x_{n-1})^2}{2}$$

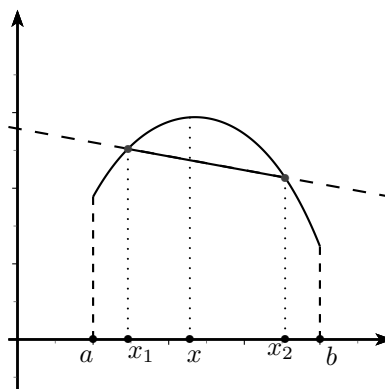
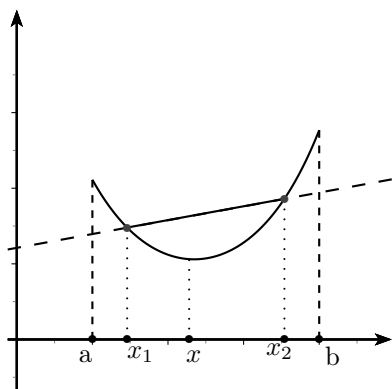
Capitolo 32

Convessità, concavità e punti di flesso

32.1 Prime definizioni

Definizione 101 (Funzione convessa). Una funzione f (continua in I)¹ è convessa in un intervallo $I = [a, b]$ se $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$f(x) < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1)$$



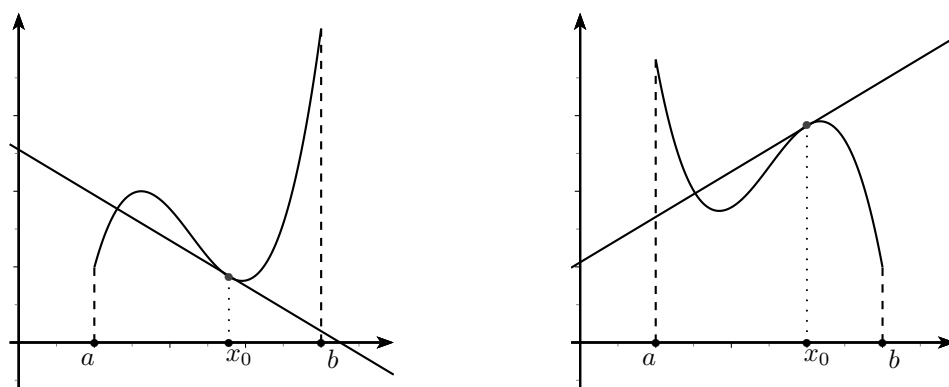
Definizione 102 (Funzione concava). Una funzione f (continua in I) è concava in un intervallo I se $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha:

$$f(x) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1)$$

Definizione 103 (Funzione convessa I). Una funzione f derivabile in x_0 è convessa in x_0 se esiste un intorno U di x_0 nel quale per ogni $x \neq x_0$ si ha:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

¹è meglio prendere f continua, in quanto è il caso che più ci interessa



Definizione 104 (Funzione concava I). Una funzione f derivabile in x_0 è concava in x_0 se esiste un intorno U di x_0 nel quale per ogni $x \neq x_0$ si ha:

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

In un punto x_0 di minimo (rispettivamente di massimo) relativo per una funzione f derivabile in x_0 si ha che la funzione è in x_0 necessariamente convessa (concava).

È sufficiente, per convincersi, tenere presente che $f'(x_0) = 0$ e quindi l'approssimante lineare ($y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$) è costante.

32.2 Convessità globale e locale

Teorema 102 (da convessità globale a locale). Una funzione f definita su un intervallo I , derivabile, convessa in I è convessa in ogni punto di I

Dimostrazione. Siano $x_0, x_1, x_2, x_3 \in I$ tali che $x_0 < x_3 < x_2 < x_1$, dall'ipotesi si ha: $f(x_2) < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + f(x_0)$ ossia $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
 $f(x_3) < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_3 - x_0) + f(x_0)$ ossia $\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$.
 Per $x_3 \rightarrow x_0$ è $\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \rightarrow f'(x_0)$ ma per quanto visto si ha: $f'(x_0) < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ che conduce alla tesi. $\square$

Teorema 103 (da convessità locale a globale). Una funzione f convessa in ogni punto di un intervallo I è convessa in I

Dimostrazione. $\forall x_1, x_2 \in I$ la funzione $g(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ è convessa in ogni punto di I , inoltre si ha che $g(x_1) = g(x_2) = f(x_1)$, proviamo che $g(x) < f(x_1)$ per ogni $x \in (x_1, x_2)$. Per assurdo se così non fosse, esisterebbe un punto di massimo relativo fra x_1 e x_2 , e in tale punto la g non potrebbe essere convessa.

Quindi $g(x) < f(x_1)$ $x \in (x_1, x_2)$ e pertanto per gli stessi x si ha: $f(x) < m_{1,2}(x - x_1) + f(x_1)$ e quindi la tesi. $\square$

Definizione 105 (Punto di flesso). Il punto x_0 , interno al dominio di definizione di una funzione f , è punto di flesso se la f è derivabile in x_0 ⁽²⁾ e in x_0 cambia la concavità.

32.2.1 Controesempi

« ... È una falsa credenza popolare assai diffusa ..., che se in x_0 una funzione non è né concava né convessa, allora quello sia un punto di flesso »

Si consideri la seguente funzione: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è derivabile nello 0, infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0^{(3)} \text{ quindi la derivata esiste per ogni } x \text{ e vale: } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

pur essendo derivabile nello zero non è nel punto stesso né concava né convessa e non ha nemmeno un flesso nello zero, infatti l'approssimante lineare nello 0 è l'asse delle ascisse ma la funzione cambia segno in ogni intorno di zero infinite volte.

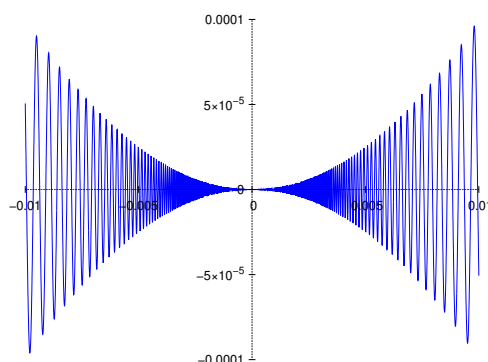


Figura 32.1: Grafico di $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

La funzione ⁽⁴⁾ il cui grafico è rappresentato in figura 32.2 è convessa nello 0 ma non lo è in alcun suo intorno.

32.3 Convessità e concavità legame con la derivata seconda

Teorema 104 (convessità e derivate). Se f , definita su I è derivabile ed è f' crescente su I allora f è convessa in I .

²Si può intendere la derivabilità come esistenza del limite del rapporto incrementale quando questo è finito o infinito si veda in particolare la definizione di flesso su C.D. Pagani 2010

³Si applica il teorema del confronto

⁴ $f(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 + x^4 + (x^2 - x^4) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

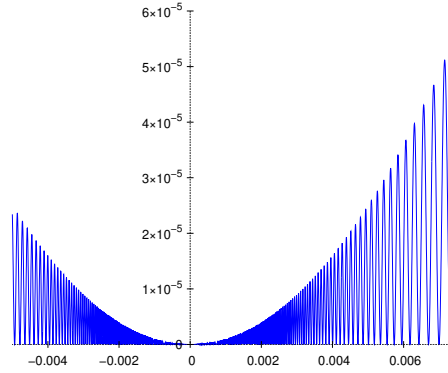


Figura 32.2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 + x^4 + (x^2 - x^4) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: sia dunque f non convessa in I , dunque esistono $x_1, x, x_2 \in I$ ($x_1 < x < x_2$) tali che: $f(x) \geq m_{1,2}(x - x_1) + f(x_1)$, applicando il teorema di Lagrange agli intervalli $[x_1, x]$ e $[x, x_2]$ si ricava l'esistenza di ξ_1 tale che: $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ ma applicando l'ipotesi assurda $f(x) \geq m_{1,2}(x - x_1) + f(x_1)$ che si può riscrivere $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq m_{1,2}$ per cui si ha $f'(\xi_1) \geq m_{1,2}$, e ξ_2 tale che: $f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$ ma applicando l'ipotesi assurda $f(x) \geq m_{1,2}(x - x_2) + f(x_2)$ che si può riscrivere $\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \leq m_{1,2}$ ⁽⁵⁾ si ha $f'(\xi_2) \leq m_{1,2}$ ma questo implica che $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$ ma dato che $\xi_1 < \xi_2$ viene meno l'ipotesi che f' è crescente su I . $\square$

Teorema 105 (convessità e derivate I). Se f , definita su I è convessa in ogni suo punto, la derivata f' è crescente in I .

Dimostrazione. Comunque scelti $x_1, x, x_2 \in I$ ($x_1 < x < x_2$), riscriviamo la definizione di convessità nei due seguenti modi:

$$f(x) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f(x) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) + f(x_2) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Dato che f è per ipotesi derivabile si ha: $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

e $f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ da cui $f'(x_2) > f'(x_1)$ che si può scrivere

$$\forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \square$$

⁵Cambio segno in quanto $x - x_2$ per costruzione è negativo

Ricercare punti di massimo o minimo relativo e i punti di flesso di:
 $f(x) = (x^2 - ax)e^{\frac{x}{a}}$

Studiare le funzioni: $g(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}$
 $h(x) = \log(1+x) - \operatorname{arctg} x$

Problema 32. Si dimostri che per la funzione:

$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 + \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ nel punto 0 c'è un flesso, pur non esistendo la derivata seconda

Soluzione. Si osserva che $f(0) = 0$, calcoliamo ora la derivata della funzione nel punto 0, si deve calcolare la derivata destra e poi quella sinistra usando il rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1 + \sqrt{1-h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2}{h(1 + \sqrt{1-h^2})} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1-h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h(1 + \sqrt{1-h^2})} = 0$$

Dato che la derivata destra coincide, nello zero, con la derivata sinistra si ha che f è derivabile in $(-1, 1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Dato che $f'(x) > 0$ nell'intervallo $(0, 1)$ mentre si ha che $f'(x) < 0$ nell'intervallo $(-1, 0)$ ed essendo f derivabile nello 0 applicando la definizione 105 si può affermare che 0 è punto di flesso. Però non esiste nello 0 la derivata seconda, infatti:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} - 0}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} - 0}{h} = 1$$

La derivata destra e sinistra non coincidono. □

32.3.1 Osservazione

Il problema 32 ci permette di sviluppare il seguente ragionamento:

Definizione 106 (Derivata simmetrica). Definiamo derivata simmetrica $f'_s(x_0)$ di una funzione f in un suo punto x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

se esiste finito.

Possiamo enunciare il seguente:

Teorema 106 (da derivata simmetrica a derivata). Sia f una funzione derivabile in x_0 allora $f'_s(x_0) = f'(x_0)$

Dimostrazione. Per l'esistenza di f' in x_0 possiamo scrivere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

ma anche:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

dato che i limiti esistono entrambi la somma dei limiti è uguale al limite della somma per cui:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0)$$

semplificando e dividendo parte per parte per 2 si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

□

Non vale il teorema inverso, infatti dall'esistenza della f'_s in x_0 non si può in generale ricavare l'esistenza di $f'(x_0)$. Un esempio è la derivata seconda della funzione del problema 32.

$$f''_s(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}}{2h} = 1$$

Capitolo 33

Strumenti Python per l'Analisi

33.1 Istruzioni per l'uso

In questo capitolo sono raccolti strumenti per poter correggere autonomamente quanto si è sviluppato, spesso con fatica, sul vecchio foglio a quadretti o sull'apposito applicativa del tablet.

Python ed in particolare Sympy sono molto potenti, ma è bene ricordarsi che i risultati vanno sempre pesati con il buon senso, utilizzando quanto appreso e consolidato con il proprio studio.

33.2 Analisi con Sympy

33.2.1 senza *

Tratto dal problema 1 dell'esame di stato 2024

```
[1]: from sympy import *  
init_printing()
```

33.2.2 Gli strumenti base

```
[5]: def f(x) :  
      return (x**3+4)/x**2
```

```
[6]: x = symbols('x', real = True)  
f(x)
```

```
[6]: 
$$\frac{x^3 + 4}{x^2}$$

```

```
[6]: zeri = solve(f(x),x,0)  
zeri
```

```
[6]: 
$$\left[ \left( -2^{\frac{2}{3}}, 0 \right) \right]$$

```

```
[8]: solve_univariate_inequality(f(x) >= 0, x, relational=False)
```

```
[8]:  $[-2^{\frac{2}{3}}, 0) \cup (0, \infty)$ 
```

```
[9]: solve_univariate_inequality(f(x) < 0, x, relational=False)
```

```
[9]:  $(-\infty, -2^{\frac{2}{3}})$ 
```

I limiti

```
[10]: limit(f(x), x, +oo), limit(f(x), x, -oo)
```

```
[10]:  $(\infty, -\infty)$ 
```

```
[11]: limit(f(x), x, 0, '+'), limit(f(x), x, 0, '-')
```

```
[11]:  $(\infty, \infty)$ 
```

```
[18]: limit(f(x)/x, x, +oo), limit(f(x)/x, x, -oo)
```

```
[18]:  $(1, 1)$ 
```

```
[19]: limit(f(x)-x, x, +oo), limit(f(x)-x, x, -oo)
```

```
[19]:  $(0, 0)$ 
```

Derivate

```
[12]: factor(diff(f(x), x, 1)), factor(diff(f(x), x, 2))
```

```
[12]:  $\left( \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}, \frac{24}{x^4} \right)$ 
```

```
[13]: solve_univariate_inequality(diff(f(x), x, 1) >= 0, x, relational=False)
```

```
[13]:  $(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ 
```

```
[14]: Mm = solve(Eq(diff(f(x), x, 1), 0), x)
      Mm
```

```
[14]: [2]
```

```
[15]: diff(f(x), x, 1).subs(x, Mm[0])
```

```
[15]: 0
```

```
[16]: solve_univariate_inequality(diff(f(x), x, 2) >= 0, x, relational=False)
```

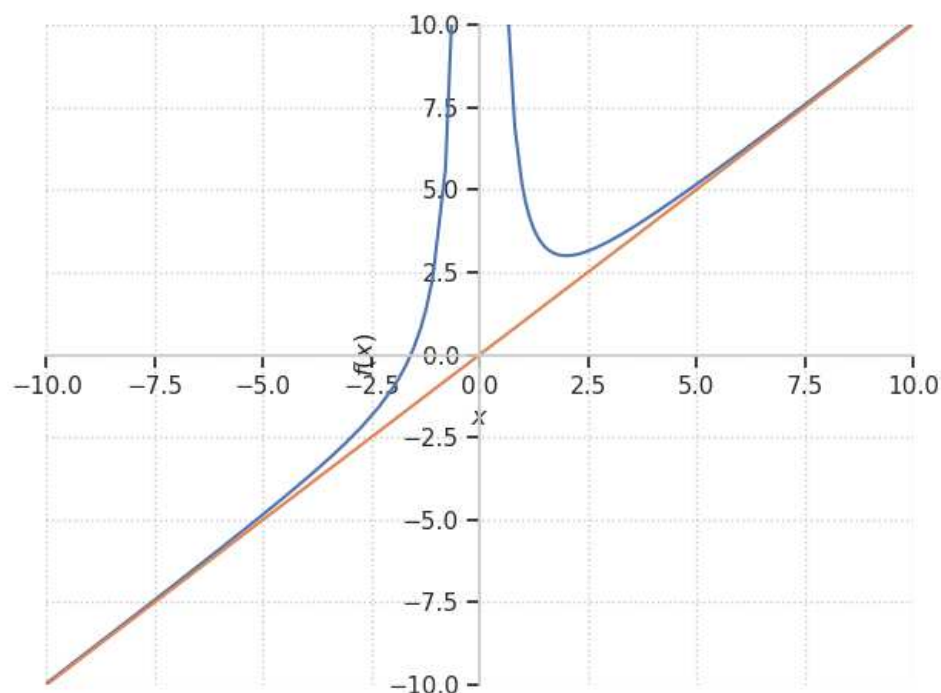
```
[16]:  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 
```

```
[21]: import seaborn as sns
      sns.set()
      sns.set_style('whitegrid', \
```

```
{'grid.linestyle': ':'})
```

Grafici di funzioni

```
[22]: Gf = plot(f(x),(x,-10,10), xlim = [-10,10], ylim = [-10,10], show = False)
      Gr = plot(x,(x,-10,10), xlim = [-10,10], ylim = [-10,10], show = False)
      Gf.append(Gr[0])
      Gf.show()
```



Taylor

```
[2]: def h(x) :
      return x**3+x-cos(x)
```

```
[9]: nsolve(Eq(h(x),0),x,0)
```

```
[9]: 0.603519630884512
```

```
[27]: Tg = series(h(x),x,0,4)
      Tg
```

```
[27]: 
$$-1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 + O(x^4)$$

```



```
[28]: eq = Eq(Tg.remove0(),0)
      sol = solve(eq,x)
      sol
```

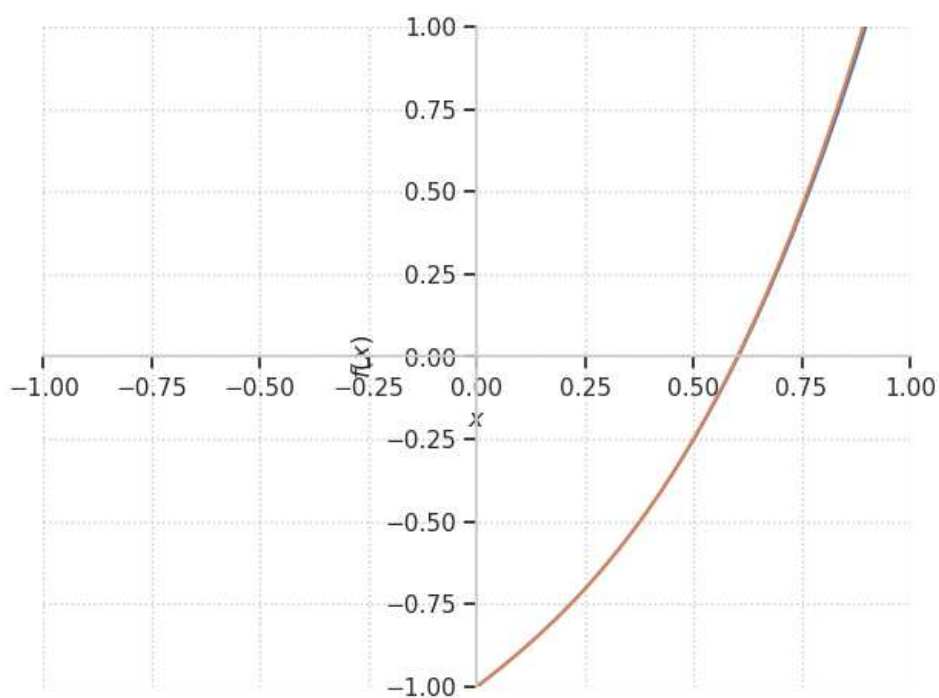
```
[28]: 
$$\left[ \dots, \dots, -\frac{11}{36\sqrt[3]{\frac{125}{216} + \frac{\sqrt{471}}{36}}} - \frac{1}{6} + \sqrt[3]{\frac{125}{216} + \frac{\sqrt{471}}{36}} \right]$$

```

```
[29]: N(sol[2],5)
```

```
[29]: 0.60149
```

```
[30]: Gg1 = plot(h(x),(x,-1,1), xlim = [-1,1], ylim = [-1,1], show = False)
      Gtg = plot(Tg.remove0(),(x,-1,1), xlim = [-1,1], ylim = [-1,1], show = False)
      Gg1.append(Gtg[0])
      Gg1.show()
```



33.2.3 Esercizi * ...per pensare

```
[1]: from sympy import *
      init_printing()
```

```
[2]: import numpy as np
      import matplotlib.pyplot as plt
```

Studia la funzione: $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x^3}$, con particolare attenzione allo studio degli asintoti e del comportamento nell'origine e nel punto $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

```
[3]: def g(x) :
      return real_root(x**2-4*x**3,3)
      def g1(x) :
      return root(x**2-4*x**3,3)
```

Tratto dal manuale di sympy

SymPy, come altri sistemi di algebra simbolica (CAS), restituisce la radice complessa dei numeri negativi. Questa è la radice principale e differisce dal risultato dei libri di testo che ci si potrebbe aspettare. Ad esempio, la radice cubica di -8 non restituisce -2

```
[4]: root(-8,3)
```

```
[4]: 23√-1
```

La funzione `real_root` restituire direttamente la radice reale:

```
[5]: real_root(-8,3)
```

```
[5]: -2
```

```
[6]: x = symbols('x', real = True)
      g(x), g1(x)
```

```
[6]: (√[3]{|4x3 - x2|} sign(-4x3 + x2), √[3]{-4x3 + x2})
```

```
[7]: reduce_inequalities(g(x) >= 0, x), reduce_inequalities(g1(x) >= 0, x)
```

```
[7]: (x ≤ 1/4, x ≤ 1/4)
```

```
[8]: limit(g(x), x, oo), limit(g1(x), x, oo)
```

```
[8]: (-∞, ∞3√-1)
```

```
[9]: limit(g(x), x, -oo), limit(g1(x), x, -oo)
```

```
[9]: (∞, ∞)
```

Ricerca dell'asintoto obliquo

```
[10]: limit(g(x)/x, x, oo), limit(g(x)/x, x, -oo), limit(g1(x)/x, x, oo), limit(g1(x)/
      ↪ x, x, -oo)
```

```
[10]: (-22/3, -22/3, √[3]{-1} · 22/3, -22/3)
```

```
[11]: m, m1 = symbols('m, m1', real = True)
      m = limit(g(x)/x, x, -oo)
      m1 = limit(g1(x)/x, x, -oo)
```

quindi $m = -\sqrt[3]{4}$

```
[12]: limit(g(x)-m*x,x,oo), limit(g(x)-m*x,x,-oo), limit(g1(x)-m1*x,x,oo),  
      ↪ limit(g1(x)-m1*x,x,-oo)
```

```
[12]:  $\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{12}, \frac{2^{\frac{2}{3}}}{12}, \infty \operatorname{sign}\left(2^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{-1} \cdot 2^{\frac{2}{3}}\right), \frac{2^{\frac{2}{3}}}{12}\right)$ 
```

Attenzione al calcolo di $q!!!$

```
[13]: q = symbols('q', real = True)  
      q = limit(g(x)-m*x,x,-oo)
```

```
[14]: diff(g(x),x,1), diff(g1(x),x,1)
```

```
[14]: 
$$\left(\frac{(-24x^2 + 4x) \sqrt[3]{|4x^3 - x^2|} \delta(-4x^3 + x^2) + \frac{(12x^2 - 2x) \operatorname{sign}(-4x^3 + x^2) \operatorname{sign}(4x^3 - x^2)}{3|4x^3 - x^2|^{\frac{2}{3}}}, \frac{-4x^2 + \frac{2x}{3}}{(-4x^3 + x^2)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

```

```
[15]: solve_univariate_inequality(diff(g(x),x,1) >= 0, x, relational=False),  
      ↪ solve_univariate_inequality(diff(g1(x),x,1) >= 0, x, relational=False)
```

```
[15]:  $\left(\left(0, \frac{1}{6}\right], \left(0, \frac{1}{6}\right]\right)$ 
```

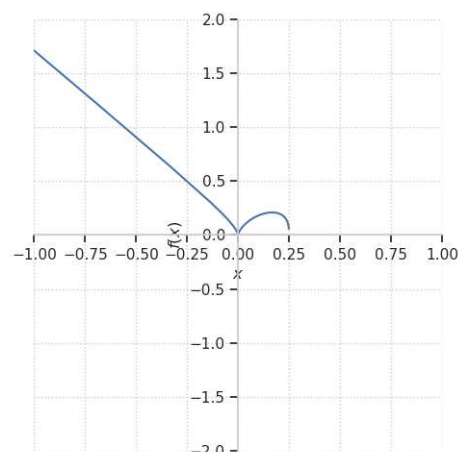
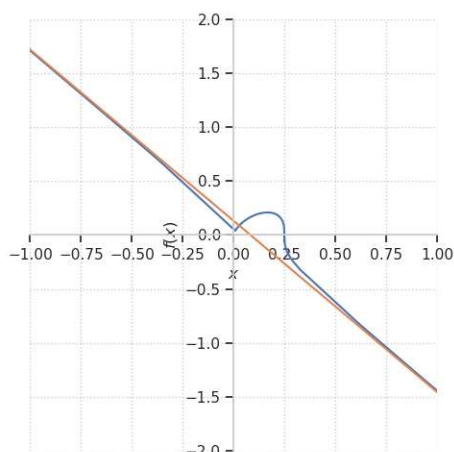
```
[16]: limit(diff(g(x),x,1),x,Rational(1,4),'+'),  
      ↪ limit(diff(g(x),x,1),x,Rational(1,4),'-'),  
      ↪ limit(diff(g1(x),x,1),x,Rational(1,4),'+'),  
      ↪ limit(diff(g1(x),x,1),x,Rational(1,4),'-')
```

```
[16]:  $(-\infty, -\infty, \infty \operatorname{sign}(\sqrt[3]{-2}), -\infty)$ 
```

```
[17]: import seaborn as sns  
      sns.set()  
      sns.set_style('whitegrid', \n  
                    {'grid.linestyle': ':'})
```

```
[18]: Fp = plot(g(x),xlim = [-1,1], ylim = [-2,2], show = False, size = (5,5))  
      Ga = plot(m*x+q,xlim = [-1,1], ylim = [-2,2], show = False)  
      Fp.append(Ga[0])  
      Fp.show()
```

```
[19]: Fp = plot(g1(x),xlim = [-1,1], ylim = [-2,2], show = False, size = (5,5))  
      Fp.show()
```



Esame di stato 2024 problema 2

Date le funzioni $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$, e $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Indicare con $\mathcal{G}_g$ e $\mathcal{G}_f$ i grafici rispettivamente di g ed f , tracciare la curva $\mathcal{G}_{ma} = \mathcal{G}_f \cup \mathcal{G}_g$.

```
[20]: def g24(x) :
      return abs(x)+real_root(1-x**2,2)
      def f24(x) :
      return abs(x)-real_root(1-x**2,2)
```

```
[21]: g24(x), f24(x)
```

```
[21]: (sqrt(1-x^2) + |x|, -sqrt(1-x^2) + |x|)
```

```
[22]: diff(g24(x),x,1), diff(f24(x),x,1)
```

```
[22]: (-x/sqrt(1-x^2) + sign(x), x/sqrt(1-x^2) + sign(x))
```

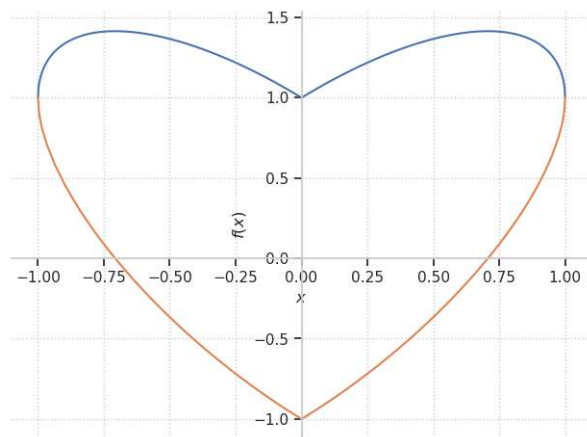
```
[23]: limit(diff(g24(x),x,1),x,-1,'+'), limit(diff(g24(x),x,1),x,0,'-'),
      ↪limit(diff(g24(x),x,1),x,0,'+'), limit(diff(g24(x),x,1),x,1,'-'))
```

```
[23]: (inf, -1, 1, -inf)
```

```
[24]: limit(diff(f24(x),x,1),x,-1,'+'), limit(diff(f24(x),x,1),x,0,'-'),
      ↪limit(diff(f24(x),x,1),x,0,'+'), limit(diff(f24(x),x,1),x,1,'-'))
```

```
[24]: (-inf, -1, 1, inf)
```

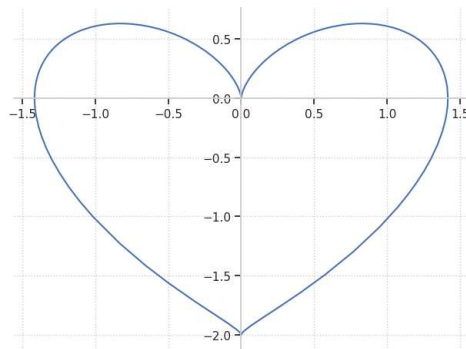
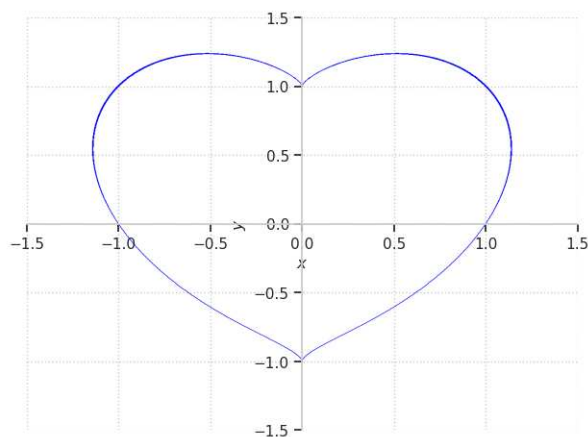
```
[25]: gf = plot(g24(x),(x,-1,1), show = False)
      gf1 = plot(f24(x),(x,-1,1), show = False)
      gf.append(gf1[0])
      gf.show()
```



Divagazioni sul tema ...

vedi Wolfram

```
[26]: y = symbols('y')
GHeart = plot_implicit((x**2+y**2-1)**3-x**2*y**3, (x, -1.5, 1.5), (y, -1.5, 1.5),
    show = False)
GHeart.show()
```



```
[27]: t = symbols('t')
X = sqrt(2)*(sin(t))**3
Y = -(cos(t))**3-(cos(t))**2+2*cos(t)
GHeart1 = plot_parametric(X,Y,(t,0,2*pi), show = False)
GHeart1.show()
```

Capitolo 34

Probabilità I

Thomas Bayes nacque a Londra nel 1702 e morì il 17 aprile 1761 a Tunbridge Wells, Kent. È stato un matematico e pastore presbiteriano.

Tratto da Prodi [1992](#)

34.1 Deduzione ed induzione

« ... Tra i processi per mezzo dei quali si accresce la nostra conoscenza, quelli logici sono i più facili da individuare e da precisare. Nei processi logici si tratta di rendere esplicita una conoscenza che è già contenuta implicitamente nelle premesse. La regola tipica che viene applicata in logica è quella del *modus ponens*, che si può così schematizzare:

Premesse: $A, A \Rightarrow B$

Conclusione: B Ad esempio, A può significare "C'è fuoco", e B "C'è calore". Accettando come vera l'implicazione $A \Rightarrow B$ ("Se c'è fuoco, c'è calore") e accettando la premessa A , cioè "C'è fuoco", necessariamente dobbiamo concludere che B è vera, cioè "C'è calore". Quello che abbiamo illustrato, è un tipico processo di **deduzione**. La freccia, nella notazione introdotta, è molto espressiva: dalla verità di A si passa alla verità di B , ma, in generale, non si può fare il viceversa. Ad esempio, è vero che "Ogni numero divisibile per 4 è pari", ma vi sono numeri (come il 6) che sono pari, ma non divisibili per 4.

Tuttavia, se usciamo dal campo della pura logica e cerchiamo di vedere come, nella vita di tutti i giorni o nella pratica sperimentale scientifica, impariamo dall'esperienza, ci accorgiamo che spesso, più o meno consapevolmente, ragioniamo in senso inverso, cioè: ammessa l'implicazione $A \Rightarrow B$, e constatata la verità di B , ammettiamo la verità di A . Ad esempio, constatato che "C'è calore", riteniamo *molto probabile* che ci sia fuoco. Lo schema di questo procedimento sarebbe il seguente:

Premesse: $A \Rightarrow B, B$

Conclusione: A Questo procedimento è stato chiamato di **reduzione** (da *reducere*, cioè ricondurre, o riportare indietro). Questo procedimento è privo di valore logico, tuttavia non se ne può disconoscere l'importanza pratica.

Esso si è fatto sempre più importante con il diffondersi del metodo sperimentale. Una situazione tipica è quella in cui A indichi un'ipotesi scientifica, B una necessaria conseguenza di essa. Che cosa può significare per l'attendibilità di A il verificarsi di B ? Tra i processi di riduzione ve

n'è uno particolarmente importante: quello di **induzione**. Premettiamo che fra le implicazioni logicamente valide ve n'è una particolarmente notevole: il passaggio dall'universale al particolare. Ad esempio: "Se tutti (gli uomini) sono mortali, allora Socrate è mortale". In simboli logici, si potrebbe scrivere così:

$\forall x M(x) \Rightarrow M(S)$, dunque, se per tutti gli x è vera la proprietà $M(x)$ (di essere mortali), essa è vera anche per l'individuo S (Socrate). Anche qui abbiamo una freccia che fissa la direzione lungo cui si può trasmettere la verità: dall'universale al particolare. Il passaggio inverso (che rientra nei processi di riduzione) non è logicamente ammissibile, tuttavia ha una grande importanza nella scienza, tanto che ha ricevuto un nome: si parla di induzione tutte le volte che, dalla verifica di un enunciato in un caso particolare, o in un certo numero (ovviamente finito) di casi particolari, si vuole risalire alla sua validità universale. Ad esempio per verificare che "Tutti i corvi sono neri", si può esaminare un certo numero di corvi (10, 50, 1000, ...) e verificare che sono tutti neri, ma ciò non autorizza ad enunciare la legge generale. L'induzione è stata un grosso rompicapo per i filosofi (da Bacone a Leibniz, a Hume, a St. Mill, fino a R. Carnap e K. Popper) proprio perché essa è una delle colonne della scienza moderna e, nello stesso tempo, non può essere giustificata nel quadro della logica.

Anche se non è in grado di giustificare i procedimenti di riduzione (e, in particolare, quelli di induzione), la logica ci fornisce un criterio importante, che è contenuto nella regola logica del *modus tollens*. Lo schema è il seguente (usando il simbolo $\bar{A}$ per indicare la negazione di A). Premesse: $A \Rightarrow \bar{B}$ Conclusione: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ Ritornando al primo esempio: se non vi è calore, si può escludere che vi sia fuoco, avendo ammesso che "Se vi è fuoco, vi è calore".

Il *modus tollens*, a differenza del procedimento di riduzione, è logicamente valido. Si può anche osservare che le implicazioni: $A \Rightarrow B$ $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ sono logicamente equivalenti. In un certo senso, la regola del *modus tollens* autorizza la riduzione solo per le negazioni. Se una certa teoria scientifica A prevede una conseguenza B , e questa non si verifica, A deve essere rigettata. Così, una legge generale deve essere respinta se essa non si verifica anche in un solo caso particolare: basta trovare un corvo bianco (o rosso) per respingere la tesi che tutti i corvi sono neri.

La logica, intesa in senso stretto, offre dunque alle scienze sperimentali solo la possibilità di una **falsificazione** cioè la possibilità di respingere un'ipotesi o una teoria quando esse siano in contrasto con un risultato sperimentale. Questa riflessione è stata portata alle estreme conseguenze da K. Popper, che ne ha fatto la base della sua epistemologia. Per K. Popper, ogni ipotesi o teoria scientifica, per essere veramente tale, deve essere **falsificabile**, cioè deve avere qualche conseguenza che possa trovarsi d'accordo oppure in contrasto con l'esito di un'opportuna esperienza. In altre parole, per K. Popper non può essere considerata scientifica una teoria che riesce sempre a giustificare l'esito di ogni esperienza, qualunque esso sia. Su questo punto non si può non concordare con Popper tuttavia, il solo strumento della falsificazione è troppo restrittivo per le esigenze della scienza: occorre ampliare il quadro della logica per trovare altri strumenti che consentano di imparare dall'esperienza con maggiore ampiezza.

34.2 Probabilità e conoscenza

Ritorniamo al primo esempio che abbiamo esposto. Ammettiamo la validità dell'implicazione: "Se c'è fuoco, c'è calore"; abbiamo già osservato che, in presenza di calore, non possiamo affermare che ci sia fuoco, tuttavia, basandoci sulla nostra comune esperienza, *riteniamo plausibile* che ci sia.

Ecco un altro esempio, ben noto: Cristoforo Colombo, dopo la lunga traversata oceanica, si accorse, ad un certo punto, che nel cielo si vedevano molti uccelli. Poiché in terra e nelle sue

immediate adiacenze vi sono molti uccelli, Colombo si rallegrò ritenendo probabile che la terra fosse ormai vicina.

Un primo avvio alla soluzione dei problemi dell'induzione consiste dunque nell'ampliare il quadro della logica assegnando agli enunciati, anziché un valore di verità (0 oppure 1), un valore di probabilità (compreso fra 0 ed 1).

Insistiamo sul fatto che la nozione di probabilità su cui ci fondiamo non riguarda direttamente la realtà empirica, ma si riferisce alla nostra conoscenza, cioè riguarda i giudizi che noi possiamo formulare.

L'altro punto importante in cui generalizziamo il quadro logico riguarda l'implicazione: vi sono molte situazioni in cui, di due eventi A e B considerati, non si può affermare " A implica B ", ma si può solo attribuire una certa probabilità a B , una volta che si sia ammesso il verificarsi di A . Evidentemente, il concetto che ci serve in questa situazione è quello della probabilità condizionale.

Per definizione, supponendo $p(A) > 0$ la probabilità condizionale di B noto che sia A , è espressa da $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. Dati due eventi A , B , consideriamo $p(A)$, $p(B)$. Supponendo entrambi questi valori non nulli, possiamo anche considerare $p(B|A)$ e $p(A|B)$ ebbene, fra questi quattro valori c'è un legame ovvio: $p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$ infatti, entrambi i membri coincidono con $p(A \cap B)$. Nell'interpretazione che più ci interessa, A potrà essere un'ipotesi, B un evento che si è verificato (ad es.: l'esito di un esperimento); $p(A)$ ha il significato di probabilità attribuita ad A "a priori" (cioè prima dell'esperimento o, comunque, a prescindere dal suo esito), mentre $p(A|B)$ ha il significato di probabilità di A "a posteriori", cioè, sapendo che l'evento B si è verificato. Se supponiamo di conoscere $p(B|A)$ (valore che misura, in un certo senso, il grado di dipendenza dell'evento B dall'evento A) ed anche $p(B)$, possiamo esprimere la probabilità "a posteriori" di A con la seguente formula:

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(B)}$$

Questa formula può già essere utile in un problema di tipo qualitativo: il problema della conferma, che parte dalla seguente definizione.

Si dice che l'evento B conferma l'ipotesi A se è $p(A|B) > p(A)$ (cioè se la probabilità di A viene accresciuta dal sapere che si è verificato il fatto B).

34.3 La formula di Bayes

Ora ci proponiamo di andare al di là delle valutazioni puramente qualitative svolte nel paragrafo precedente, per giungere a determinazioni quantitative della probabilità "a posteriori" $p(A|B)$. Anziché considerare una sola ipotesi A (o, più esattamente, l'ipotesi A e la sua negazione $\bar{A}$), consideriamo un sistema completo di ipotesi, a due a due esclusive: $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ (Con ciò intendiamo dire che di queste ipotesi se ne può verificare una e una sola).

A ciascuna di queste ipotesi è associata una probabilità "a priori": $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_m)$ dove $p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_m) = 1$.

Un altro dato essenziale è quello delle probabilità condizionali $p(B|A_i)$; in altre parole, si ritiene assegnato un modello probabilistico che permette di collegare ciascuna ipotesi con il risultato dell'esperienza B . È importante allora rilevare che $p(B)$ è nota; infatti, essendo $\{A_i\}$ un sistema completo di eventi disgiunti, si ha $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_m \cap B)$ da cui:

$p(B) = p(A_1)p(B|A_1) + p(A_2)p(B|A_2) + \dots + p(A_m)p(B|A_m)$ Unendo le formule precedenti si ricava:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i)p(B|A_i)}{\sum_{k=1}^m p(A_k)p(B|A_k)}$$

Questa. è la famosa formula di Bayes (che fu pubblicata in un saggio postumo del 1763).

Problema 33. Un medico visita un ammalato, che può essere affetto da una delle tre malattie A_1, A_2, A_3 . Tenendo conto dei primi sintomi e delle statistiche di cui dispone, assegna le seguenti probabilità a ciascuna delle tre malattie: $p(A_1) = 0.2$, $p(A_2) = 0.3$, $p(A_3) = 0.5$. A questo punto, il medico prescrive un esame clinico, che, secondo le statistiche, ha il seguente comportamento: dà. risultato positivo nel 15% dei casi se l'ammalato ha la malattia A_1 , nel 25% dei casi se l'ammalato ha la malattia A_2 , nel 98% dei casi se l'ammalato ha la malattia A_3 . Nel caso specifico, l'esito del test è positivo; che cosa si può concludere?

Indicando con B l'evento "esito positivo del test", i dati forniti si possono interpretare nel seguente modo: $p(B|A_1) = 0.15$, $p(B|A_2) = 0.25$, $p(B|A_3) = 0.98$. Applicando la formula di Bayes, si trova:

$$\begin{aligned} p(A_1|B) &= \frac{p(A_1)p(B|A_1)}{\sum_{k=1}^3 p(A_k)p(B|A_k)} = 0.15 \\ p(A_2|B) &= \frac{p(A_2)p(B|A_2)}{\sum_{k=1}^3 p(A_k)p(B|A_k)} = 0.25 \\ p(A_3|B) &= \frac{p(A_3)p(B|A_3)}{\sum_{k=1}^3 p(A_k)p(B|A_k)} = 0.82 \end{aligned}$$

Dunque il test ha nettamente rafforzato la probabilità della malattia A_3 .

34.4 Il progresso della conoscenza

La formula di Bayes si presta bene a rappresentare il modo con cui la nostra conoscenza si accresce mediante l'esperienza. Anzitutto, non deve fare meraviglia il fatto che nella formula compaiano le probabilità "a priori": di fatto, all'inizio di ogni esperienza, la nostra mente non è mai una "tabula rasa": c'è sempre una valutazione, un'opinione. In secondo luogo, la formula di Bayes fornisce un interessante modello di come la conoscenza possa accrescersi per successivi apporti. Precisamente: supponiamo di avere un insieme di ipotesi $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, con le relative probabilità "a priori", e supponiamo di "aggiornare" queste probabilità tenendo conto di due risultati sperimentali B e C , cioè dell'evento globale $B \cap C$: ebbene, il risultato è il medesimo che si ottiene aggiornando dapprima le probabilità iniziali con il risultato B , e poi aggiornando le probabilità così ottenute prendendo atto del verificarsi di C .

34.4.1 Esercizio svolto

Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse, e un numero variabile di palline bianche. Più precisamente l'urna i -esima contiene 4 palline rosse e i palline bianche. Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte due palline.

- Qual è la probabilità che le due palline siano una bianca e una rossa?
- Supponendo che l'estrazione abbia dato come risultato una pallina bianca e una rossa, qual è la probabilità che l'urna prescelta sia di tipo i ?

c) Qual è l'urna più probabile?

$A_i = \{\text{viene scelta l'urna } i\text{-esima}\}$

$$p(A_i) = \frac{1}{10}$$

$B = \{\text{vengono estratte due palline di diversi colori}\}$

$p(B|A_i)$ è la probabilità di B noto A_i , cioè la probabilità di estrarre palline di colore diverso da una fissata urna (i -esima)

$$p(B|A_i) = \frac{\binom{i}{1} \binom{4}{1}}{\binom{4+i}{2}}$$

$$\text{a) } p(B) = \sum_{i=1}^{10} p(A_i)p(B|A_i) = \frac{227933}{450450} \simeq 50\%$$

b) Utilizziamo la formula di Bayes si può $p(A_i|B)$ probabilità di aver scelto l'urna i -esima sapendo di aver estratto palline di colori diversi:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i)p(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{10} p(A_i)p(B|A_i)}$$

c) Per determinare quale urna è più probabile calcoliamo i valori di $p(A_i|B)$ per ogni i . Dal

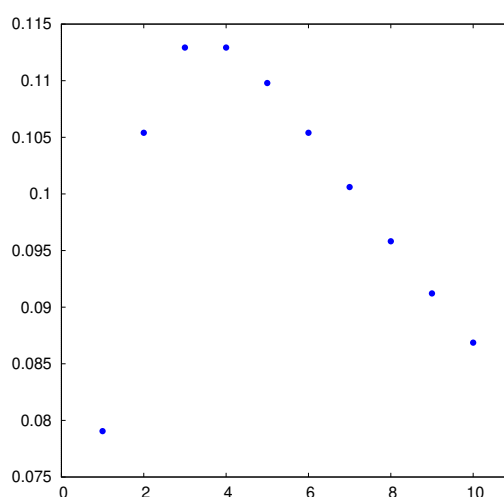


Figura 34.1: Probabilità delle i -urne

grafico (figura 34.1) si deduce che le urne più probabili sono la 3 e la 4.

34.4.2 Problemi ...risolti ...solo Bayes

Problema 34. Si hanno tre scatole che contengono: la prima, 2 banconote da 100 €; la seconda, 1 banconota da 100 € e 1 da 50 €; la terza, 2 banconote da 50 €. Si scelga a caso una delle tre scatole e si estragga una banconota. Risulta estratta una banconota da 100 €; quale è la probabilità che la scatola dalla quale è stata estratta sia la prima?

Soluzione. $S_1 = \{100 \text{ €}, 100 \text{ €}\}$

$S_2 = \{100 \text{ €}, 50 \text{ €}\}$

$S_3 = \{50 \text{ €}, 50 \text{ €}\}$

$$p(S_1) = p(S_2) = p(S_3) = \frac{1}{3}$$

$E = \{\text{estraggo una banconota da } 100 \text{ €}\}$

$$p(E|S_1) = 1$$

$$p(E|S_2) = \frac{1}{2}$$

$$p(E|S_3) = 0$$

$$p(S_1|E) = \frac{p(E|S_1)}{p(E|S_1) + p(E|S_2) + p(E|S_3)} = \frac{2}{3}$$

Osservazione: $p(S_i)$ non appare in quanto siamo in una situazione di equiprobabilità e quindi si semplifica. $\square$

Problema 35. In un palazzo vivono solo tre famiglie: A, B, C, di 4 componenti ciascuna. La famiglia A è composta da 4 maschi, la B da 3 maschi e 1 femmina, la C da 2 maschi e 2 femmine. Considerando equiprobabile l'uscita di un componente di una qualunque delle tre famiglie, si osserva che dal portone esce una persona di sesso maschile. Quale è la probabilità che egli appartenga alla famiglia B?

Soluzione. $E = \{\text{esce dal portone un maschio}\}$

$$p(E|A) = 1$$

$$p(E|B) = \frac{3}{4}$$

$$p(E|C) = \frac{1}{2}$$

$$p(B|E) = \frac{p(E|B)}{p(E|A) + p(E|B) + p(E|C)} = \frac{1}{3}$$

$\square$

Problema 36. Una commissione giudicatrice di un concorso è formata da 10 persone, di cui 4 sono donne. Quale è la probabilità che, estraendo dalla predetta commissione una sottocommissione di 5 individui, in quest'ultima non vi sia nemmeno una donna.

Problema 37. Si considerino 3 urne, numerate da 1 a 3; ogni urna contiene 5 palline. La generica urna i contiene i palline bianche e $(5-i)$ palline nere, con $i=1,2,3$ (cioè, ad esempio, l'urna numero 2 contiene 2 palline bianche e $5-2=3$ palline nere). Si estrae a caso un'urna, e da questa una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia bianca.

Problema 38. In una data popolazione, la malattia M si presenta con una frequenza di 1 persona ogni 1000 e la sua presenza può essere diagnosticata con un test che con una probabilità pari a 0.99 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia effettivamente malata, ma con una probabilità pari a 0.05 fornisce una risposta positiva qualora la persona sia invece sana. Valutare la probabilità che una persona che è risultata positiva al test sia effettivamente malata.

Soluzione. $p(M) = 0.001$ incidenza della malattia, $p(\overline{M}) = 0.999$.

$p(T|M) = 0.99$, $p(T|\overline{M}) = 0.05$.

$$p(M|t) = \frac{p(M) \cdot p(T|M)}{p(M) \cdot p(T|M) + p(\overline{M}) \cdot p(T|\overline{M})} = \frac{1}{3}$$

□

Problema 39. Si estraggono, senza reimmissione, due carte da un mazzo di 40 carte napoletane⁽¹⁾. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

- a) le due carte estratte sono un 5 e una figura;
- b) le due carte estratte sono un asso e una carta di bastoni.

Problema 40. In un paese scandinavo il 70% delle ragazze-i ha i capelli Biondi, il 20% li ha Rossi, il 10% Mori. Risulta poi che ha gli occhi Scuri il 10% delle/dei Bionde/i, il 25% delle/dei Rosse/i, il 50% delle/dei More/i. Se la/il ragazza/o con cui ho fatto amicizia tramite Internet mi fa sapere che ha gli occhi Scuri, che probabilità c'è che sia Bionda/o?

Soluzione. $p(B) = 0.7$, $p(R) = 0.2$ e $p(M) = 0.1$; $p(S|B) = 0.1$, $p(S|R) = 0.25$ E $p(S|M) = 0.5$

$$p(B|S) = \frac{p(B) \cdot p(S|B)}{p(B) \cdot p(S|B) + p(R) \cdot p(S|R) + p(M) \cdot p(S|M)} = 0.412 \quad \square$$

Problema 41. In un bar ci sono due macchinette mangiasoldi A e B. Effettuando una singola giocata su A si vince con probabilità $\frac{1}{2}$, mentre giocando su B si vince con probabilità $\frac{1}{4}$. Supponiamo di non sapere quale sia la macchinetta A e quale la B; se ne scegliamo una a caso, giochiamo una sola volta, e vinciamo, qual è la probabilità che la macchinetta scelta sia A?

Soluzione. $p(V|A) = 0.5$, $p(V|B) = 0.25$, $p(A) = p(B) = 0.5$

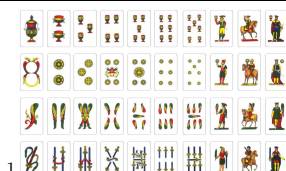
$$p(A|V) = \frac{p(V|A)}{p(V|A) + p(V|B)} = \frac{2}{3} \quad \square$$

34.5 Con Python

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import math
from IPython.display import display
```

34.5.1 Scommetti sulla composizione del contenitore

In un contenitore ci sono 15 palline di cui almeno 3 rosa e almeno 3 blu



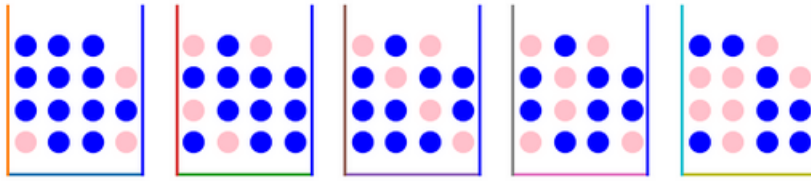


Figura 34.2: contenitori

Vengono estratte 3 palline senza reinserimento, noto l'esito dell'estrazione si chiede di indicare la composizione del contenitore.

Costruzione della composizione del contenitore

```
[2]: npalline = 15
C = []
r = random.randint(3, npalline-3)
for k in range(npalline):
    if k+1 <= r:
        C.append('rosa')
    else:
        C.append('azzurra')
```

Estrazione delle tre palline

```
[3]: def estrai(contenitore, N):
    esito = []
    for j in range(3):
        extr = random.randint(0, N - j)
        esito.append(contenitore[extr])
        appoggio = contenitore[extr]
        contenitore[extr] = contenitore[N - j]
        contenitore[N - j] = appoggio
    return esito
```

```
[4]: E = estrai(C, npalline-1)
print(E)
numerorosa = E.count('rosa')
```

```
['azzurra', 'rosa', 'azzurra']
```

Probabilità a priori

Siano: nr numero palline rosa estratte nell'evento E =
 {estrazione senza reinserimento di 3 palline}

$$p(E|C_r) = \frac{\binom{r}{nr} \cdot \binom{np-r}{3-nr}}{\binom{np}{3}}$$

$p(E|C_r)$ si legge probabilità dell'evento E nell'ipotesi che la configurazione del contenitore sia C_r

potremmo pensare di inserire ogni diversa configurazione in un diverso contenitore, si ottiene:

```
[5]: def scatola(px,py,nRosa):
    puntiX = []
    puntiY = []
    x = 0.25+px
    for i in range(4):
        y = 0.25+py
        for j in range(4):
            puntiX.append(x)
            puntiY.append(y)
            y += 0.25
        x += 0.5
    prosa = np.zeros(npalline)
    j = 1
    while j <= nRosa:
        extr = random.randint(0,14)
        if prosa[extr] == 0:
            prosa[extr] = 1
            j += 1
    X1 = [px,px+2]
    Y1 = [py,py]
    X2 = [px,px]
    Y2 = [py,py+1.3]
    X3 = [px+2,px+2]
    Y3 = [py,py+1.3]
    return X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, puntiX, puntiY, prosa

[6]: def disegna01() :
    plt.axis('off')
    lx = 0.5
    ly = 0.5
    contenitori = []
    tot = (npalline-3)-3+1
    for k in range(10):
        A1, A2, B1, B2, C1, C2, ipuntix, ipuntiy, RA = scatola(lx,ly,3+k)
        plt.plot(A1,A2,B1,B2,C1,C2,'b-')
        for h in range(npalline):
            if RA[h] == 1:
                plt.plot(ipuntix[h],ipuntiy[h],color='pink',
↪marker='o',linestyle='none',markersize=10)
            else:
                plt.plot(ipuntix[h],ipuntiy[h],color='blue',
↪marker='o',linestyle='none',markersize=10)
        a = k % 5
        lx += 2.5
```

```

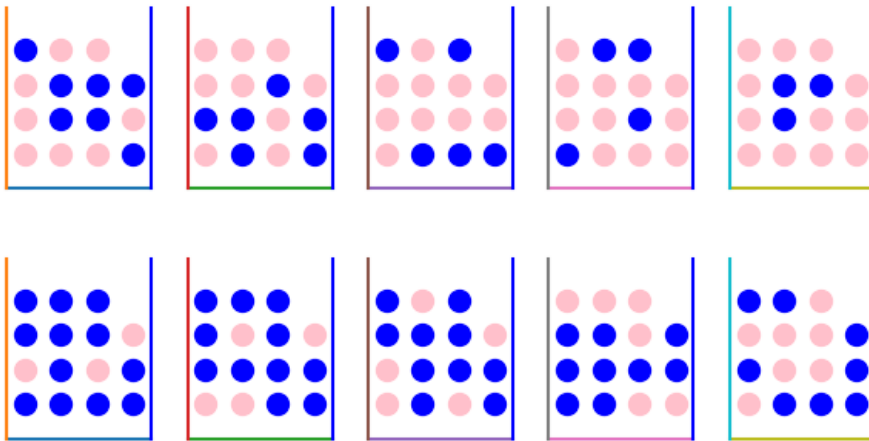
    if (a == 4):
        lx = 0.5
        ly += 1.8
    return tot

```

```

[7]: plt.figure(figsize=(8,4))
     tot = disegna01()
     plt.show()

```



```

[8]: def pP(nrosa,nrosaextr):
     prob = (math.comb(nrosa,nrosaextr)*math.comb(npalline-nrosa,3-nrosaextr))/
     ↪(math.comb(npalline,3))
     return prob

```

```

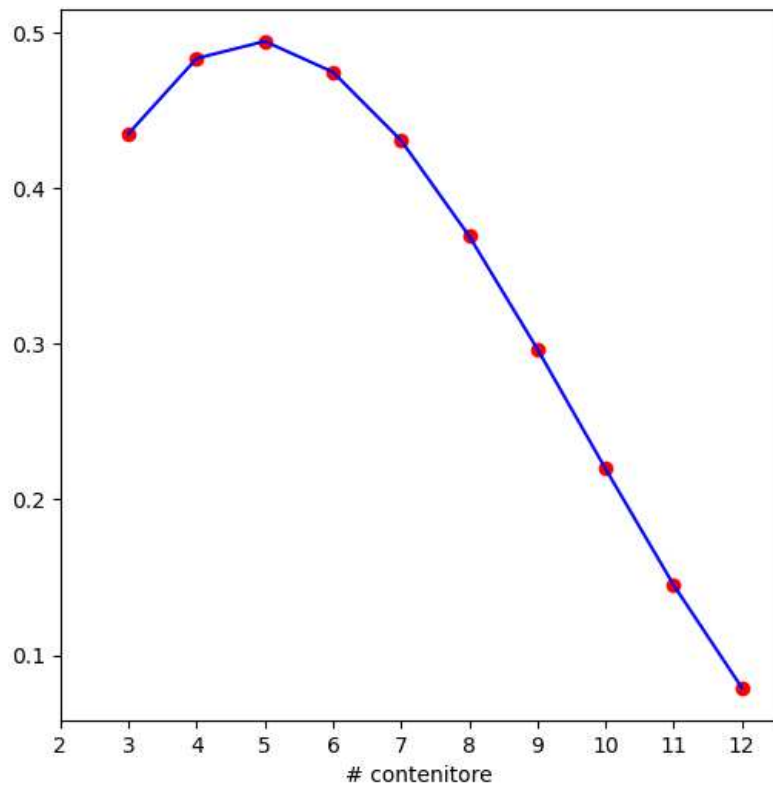
[9]: pTot = []
     nPal = [3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
     for j in range(tot):
         laprob = pP(3+j,numerorosa)
         #print(j+3," ", laprob)
         pTot.append(laprob)

```

```

[10]: fig= plt.figure(figsize=(6,6))
      plt.xlim(xmax = 12.5, xmin = 2.5)
      plt.xticks(np.arange(2, 13, 1))
      plt.plot(nPal,pTot, 'ro',nPal,pTot,'b-')
      plt.xlabel("# contenitore")
      plt.show()

```



La probabilità di E si ottiene moltiplicando la probabilità indicata con p_{Tot} per la probabilità di scegliere proprio quel contenitore, nel primo caso equiprobabilità $\frac{1}{\text{tot}}$

Detto C_r il contenitore con r palline rosa la probabilità di aver scelto C_r noto E è data da:

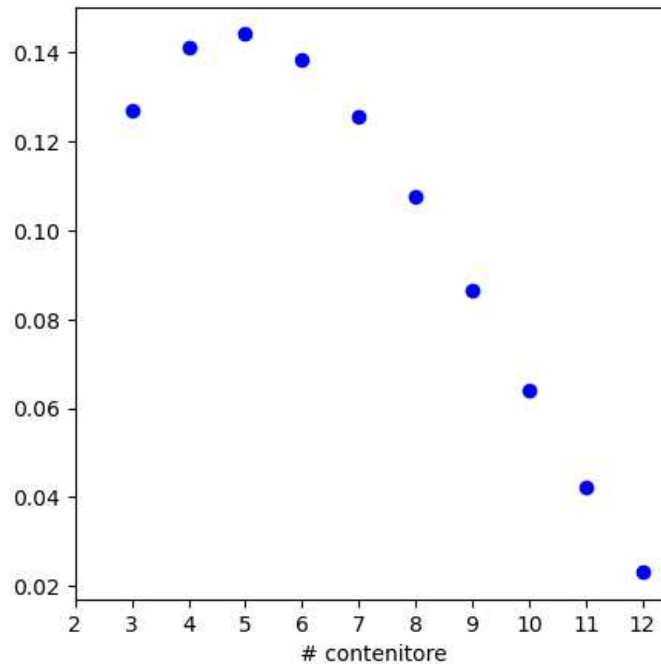
$$p(C_r | E) = \frac{p(E | C_r) \cdot p(C_r)}{\sum_{k=1}^{\text{tot}} p(E | C_k) \cdot p(C_k)}$$

fatti i conti si ha:

```
[11]: pC = []
      pCr = []
      pE = 0
      for k in range(tot):
          pCr.append(1/10)
      for k in range(tot):
          pE += pTot[k]*pCr[k]
      for k in range(tot):
          pC.append(pTot[k]*pCr[k]/pE)
      #print(pC)
```



```
[12]: fig= plt.figure(figsize=(5,5))
plt.xlim(xmax = 12.5, xmin = 2.5)
plt.xticks(np.arange(2, 13, 1))
plt.plot(nPal,pC, 'bo')
plt.xlabel("# contenitore")
plt.show()
```



```
[13]: pCr = []
pCprima = []
for k in range(tot):
    pCr.append(pC[k])
    pCprima.append(pC[k])
E = estrai(C,npalline-1)
print(E)
numerorosa = E.count('rosa')
```

```
['azzurra', 'rosa', 'azzurra']
```

```
[14]: pTot = []
for j in range(tot):
    laprob = pP(3+j,numerorosa)
    pTot.append(laprob)
pC = []
pE = 0
```

```

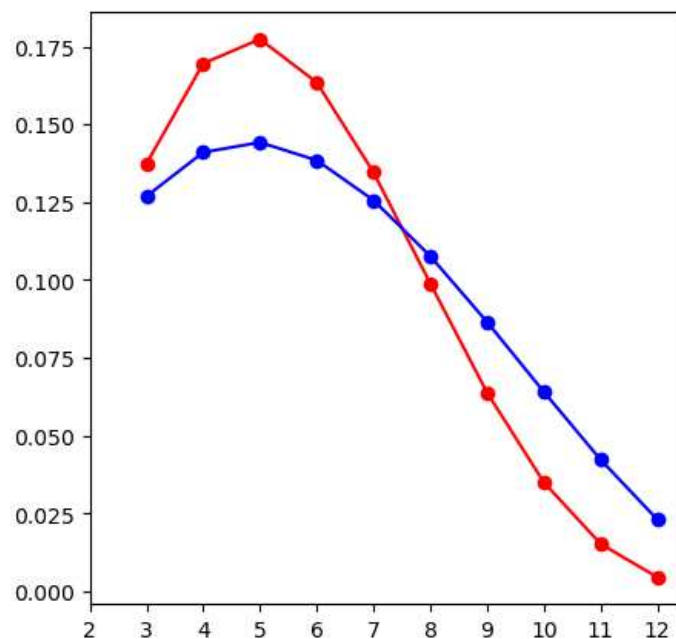
for k in range(tot):
    pCr.append(1/10)
for k in range(tot):
    pE += pTot[k]*pCr[k]
for k in range(tot):
    pC.append(pTot[k]*pCr[k]/pE)
#print(pC)

```

```

[15]: fig= plt.figure(figsize=(5,5))
plt.xlim(xmax = 12.5, xmin = 2.5)
plt.xticks(np.arange(2, 13, 1))
plt.plot(nPal,pC, 'ro-',nPal,pCprima,'bo-')
plt.show()

```



Capitolo 35

Variabili aleatorie discrete

35.1 Le variabile aleatorie

Definizione 107 (Variabile aleatoria discreta). Si dice variabile aleatoria discreta un'applicazione di uno spazio di probabilità (Ω, P) nella retta $\mathbb{R}$

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la v.a. (variabile aleatoria). La definizione ci dice che lo spazio di probabilità (Ω, P) può essere visto come un congegno aleatorio che, tramite X genera numeri reali. Dato che per ipotesi Ω è finito o al più numerabile, possiamo indicare i suoi elementi con $\omega_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$

Quale probabilità compete ad un punto $x \in \mathbb{R}$?

L'applicazione X non è suriettiva¹ e non è detto che sia iniettiva: quindi ad x si associa la somma delle probabilità dei punti di Ω che vengono mandati in x .

$$Q(x) = \sum_{X(\omega_i)=x} p_i = \sum_{\omega_i \in X^{-1}(x)=x} p_i$$

La retta reale grazie ad X viene trasformata in uno spazio di probabilità, detto **legge** della v.a. X .

35.1.1 V.a. vettoriali

Un applicazione $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ altro non è che una coppia (X, Y) di v.a. collegate dalla comune origine dello spazio di probabilità (Ω, P) .

Siano x_k i valori assunti da X , con q'_k le relative probabilità; con y_h i valori di Y , con q''_h le relative probabilità. Indichiamo con q_{kh} la probabilità che compete alla coppia (x_k, y_h) cioè:

$$q_{kh} = \sum_{\substack{X(\omega_i) = x_k \\ Y(\omega_i) = y_h}} p_i \quad (35.1)$$

É evidente che

$$q'_k = \sum_h q_{kh} \quad e \quad q''_h = \sum_k q_{kh} \quad (35.2)$$

¹infatti $\mathbb{R}$ non è numerabile

La 35.1 definisce una distribuzione di probabilità su $\mathbb{R}^2$ che viene detta legge congiunta della coppia $(X; Y)$, mentre le 35.2 vengono dette leggi marginali della X e della Y . Diremo che X ed Y sono indipendenti se $P(\{(x_k, y_h)\}) = P(\{x_k\}) P(\{y_h\})$ e quindi: $q_{kh} = q'_k q''_h$

Esempio

Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6, se ne estraggono 2. Indichiamo con X ed Y rispettivamente i risultati delle due estrazioni:

i) estrazione con reimbussolamento:

la legge congiunta q_{kh} della coppia (X, Y) può essere così scritta: $q_{kh} = \frac{1}{36} \forall h, k = 1, \dots, 6$
le leggi marginali valgono:

$$q'_k = \frac{1}{6} \forall k = 1, \dots, 6$$

e

$$q''_h = \frac{1}{6} \forall h = 1, \dots, 6$$

Dato che gli eventi sono indipendenti si ha: $q_{kh} = q'_k q''_h$

ii) estrazione senza reimbussolamento:

mentre le leggi marginali rimangono le stesse del caso precedente:

$$q'_k = \frac{1}{6} \forall k = 1, \dots, 6 \text{ e } q''_h = \frac{1}{6} \forall h = 1, \dots, 6.$$

la legge congiunta q_{kh} della coppia (X, Y) diventa:

$$q_{kh} = \frac{1}{6} \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \forall h, k = 1, \dots, 6 \text{ } h \neq k$$

In presenza di dipendenza si ha:

$$q_{kh} \neq q'_k q''_h \quad (35.3)$$

35.1.2 Valore medio

Definizione 108 (Media di una v.a. discreta). Sia X una v.a. discreta, definiamo media (valore medio, speranza matematica, valore atteso) il numero

$$E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} X(\omega_i) p_i$$

Sia X la v.a. "punteggio ottenuto lanciando un dado equo":

$$E(X) = 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6} = 3.5$$

Un tiratore spara al bersaglio ripetutamente finchè non lo colpisce. La sua precisione nel tiro fa sì che si possa stimare in p la probabilità di colpire il bersaglio.

Definiamo Y la v.a. "numero di tentativi", i valori di Y pertanto sono:

1	con probabilità	p	(successo al 1 tentativo)
2	con probabilità	qp	(successo al 2 tentativo)
3	con probabilità	$q^2 p$	(successo al 3 tentativo)
...			
k	con probabilità	$q^k p$	(successo al k-esimo tentativo)

Calcoliamo $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p$ questa somma si può scrivere, dopo aver raccolto p , nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & q & q^2 & q^3 & \dots & & \\ & q & q^2 & q^3 & \dots & & \\ & & q^2 & q^3 & \dots & & \\ & & & q^3 & \dots & & \end{array}$$

Sommando in diagonale e ricordando che $\sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, che per $n \rightarrow +\infty$ se $0 < x < 1$:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \text{ la "tabella infinita" ha come somma: } \frac{1}{1-q} + q \frac{1}{1-q} + q^2 \frac{1}{1-q} + \dots + q^k \frac{1}{1-q} +$$

$$\dots = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p^2} \text{ da cui, tenendo conto del } p \text{ raccolto a fattor comune ci porta a:}$$

$$E(Y) = \frac{1}{p}.$$

Il fatto che il numero di tentativi sia il reciproco della probabilità di successo è del tutto conforme all'intuizione.

35.1.3 Somme e prodotti di v.a.

Siano X, Y una coppia di variabili aleatorie ($\Omega \rightarrow \mathbb{R}$), definiamo $X + Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ così definita: $\omega_i \rightarrow X(\omega_i) + Y(\omega_i)$, la legge della v.a. (X, Y) è la legge che assegna alla coppia (x_k, y_h) la probabilità q_{kh} . Allora la v.a. $X + Y$ sarà quella che assume i valori $z = x_k + y_h$ con probabilità $\sum_{x_k+y_h=z} q_{kh}$.

dimostrare che $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Costruiamo la v.a. XY e ci proponiamo di valutare $E(XY) = \sum_{h,k} x_k y_h q_{kh}$ se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti si può scrivere:

$$E(XY) = \sum_{h,k} x_k y_h q_{kh} = \sum_{h,k} x_k q'_k y_h q''_h = E(X)E(Y)$$

35.2 La varianza

Definizione 109 (Varianza di una v.a. discreta). Si dice varianza della v.a. X il numero $V(X) = E((X - E(X))^2)$

35.2.1 Esempio

$$\text{sia } X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } p \\ 0 & \text{con probabilità } q \end{cases} \quad (p + q) = 1$$

X , ad esempio può registrare il successo in un gioco:

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

$$V(X) = E((X - p)^2) = E(X^2) - 2pE(X) + p^2 = E(X^2) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Definizione 110 (deviazione standard σ). Si dice scarto quadratico medio o deviazione standard di una variabile aleatoria X il numero: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Dimostriamo ora che se due v.a. X e Y sono fra loro indipendenti allora

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

.

Utilizziamo l'usuale notazione: $E(X) = \bar{X}$

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y - \bar{X} - \bar{Y})^2) = \\ &= E((X - \bar{X})^2) + E((Y - \bar{Y})^2) + 2E((X - \bar{X})(Y - \bar{Y})) = \\ &= V(X) + V(Y) + 2E((X - \bar{X})(Y - \bar{Y})) \end{aligned} \quad (35.4)$$

il termine detto covarianza di X ed Y , vale zero nel caso di indipendenza. Infatti:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E((X - \bar{X})(Y - \bar{Y})) = \\ &= E(XY - X\bar{Y} - Y\bar{X} + \bar{X}\bar{Y}) = \\ &= E(XY) - \bar{X}\bar{Y} = 0 \end{aligned} \quad (35.5)$$

35.2.2 Esempio

Un'urna contiene b palline bianche ed r rosse. Da essa se ne estraggono 2 senza reinserimento.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la prima pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la seconda pallina estratta è rossa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo calcolare $Cov(X, Y)$, utilizziamo la formula 35.5, si ha: $E(X) = \frac{r}{b+r}$ $E(Y) = \frac{r}{b+r}$ ⁽²⁾

Calcoliamo ora $E(XY)$ il prodotto delle due v.a. è diverso da zero solo nel caso entrambe assumano valore uno, valutiamo pertanto $P(X = 1, Y = 1) = \frac{r}{b+r} \frac{r-1}{b+r-1} = p$, quindi $E(XY) = p$.

$$Cov(X, Y) = \frac{r(r-1)}{(b+r)(b+r-1)} - \frac{r^2}{(b+r)^2} = \frac{-br}{(b+r)^2(b+r-1)}$$

Spesso è utile calcolare:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$\rho_{X,Y}$ è detto coefficiente di correlazione.

$$V(X) = V(Y) = \frac{r}{b+r} \left(1 - \frac{r}{b+r}\right)$$

$$\rho_{X,Y} = -\frac{1}{b+r-1}$$

Qsserviamo che il $|\rho_{X,Y}|$ è tanto più piccolo quanto il numero totale di palline è grande. Le due variabili non sono mai indipendenti, ma la dipendenza diviene sempre più debole al crescere del numero delle palline.

²la probabilità di estrarre la seconda rossa è data da: $\frac{r}{b+r} \frac{r-1}{b+r-1} + \frac{b}{b+r} \frac{r}{b+r-1}$

dimostrare che $\rho_{X,Y}^2 < 1$

Un'urna contiene 112 dadi di cui 56 equi, gli altri sono stati manipolati, in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 è $\frac{1}{2}$ mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità $\frac{1}{10}$.

- i) un dado viene estratto a caso e lanciato, indicata con X la v.a. "risultato del lancio", calcolare $E(X)$*
- ii) un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Si ottiene 2 e 3. Qual è la probabilità che il dado sia truccato?*
- iii) un dado viene estratto a caso e lanciato 2 volte, siano X e Y le v.a. "esito del lancio". X e Y sono indipendenti?*

La soluzione in dettaglio Appendice B

35.3 La legge di Poisson

35.3.1 Per iniziare un esempio

In un liquido di coltura ci sono m batteri. Il liquido può essere suddiviso in n gocce. Ci poniamo il problema di calcolare la probabilità di trovare su una determinata goccia k batteri con $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Si può risolvere il problema utilizzando un modello probabilistico: fissata una goccia, il batterio ha probabilità $\frac{1}{n}$ di "finirci sopra", quindi la probabilità p_k di trovare k batteri sulla goccia segue lo schema di Bernoulli (binomiale):

$$p_k = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k} \quad (35.6)$$

La 35.6 è però poco "maneggevole", infatti supponiamo: $m = 10^6$ e $n = 10^4$ (numeri ragionevoli nel esempio riportato), proviamo a calcolare $p_{1000} \dots$ usiamo Maxima, per la risposta dobbiamo armarci di una discreta pazienza.

Cerchiamo di costruire un modello più "agile" da applicare quando i numeri sono grandi.

Supponiamo che m, n siano fra loro legati dalla relazione $\frac{m}{n} = a$, che si traduce imponendo che il numero medio di batteri per ogni gocciolina sia un fissato valore a . Per costruire il nostro modello facciamo tendere m ed n ad infinito:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{m}{n} - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{m}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na-k} = \end{aligned}$$

calcoliamo il limite dei diversi fattori:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a \left(a - \frac{1}{n}\right) \left(a - \frac{2}{n}\right) \dots \left(a - \frac{k-1}{n}\right) = a^k$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{na} = e^{-a}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} = 1$$

Perciò si può scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_k = P_k(a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$P_k(a)$ si dice legge di Poisson di parametro a . Detta X_a una variabile aleatoria avente come legge $P_k(a)$ ha media data da: $E(x_a) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a$

Sviluppare i calcoli con cura

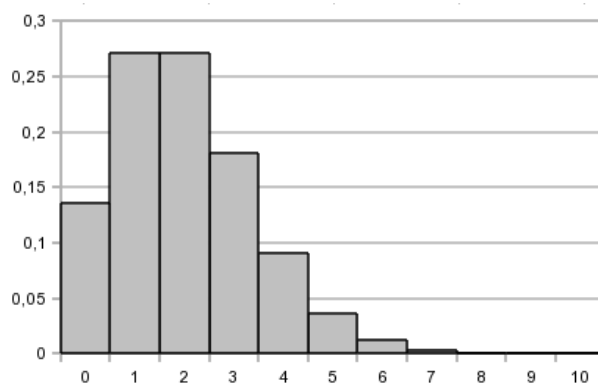
Alcuni esempi esplicativi

- a) In un ospedale, nascono in media 3 bambini al giorno, è ragionevole affermare che in un anno ci sono giorni in cui ne possono nascere 8?

È ragionevole pensare al numero di nati in un giorno come una variabile aleatoria poissoniana, quindi la probabilità del valore 8 è $P_8(3) = \frac{3^8}{8!} e^{-3} \cong 0.0081$, calcolando il reciproco della probabilità si ottiene il "tempo medio di attesa" $\frac{1}{P_8(3)} \cong 123$. L'affermazione è ragionevole.

- b) In un libro di 200 pagine ci son 400 errori di stampa. È più probabile che ve ne siano uno o due per pagina?

La variabile aleatoria «numero di errori per pagina» può essere descritta da una legge di Poisson $P_k(2)$ ³ la legge può essere rappresentata dal seguente grafico:



Come si può osservare la maggiore probabilità si ha per i valori 1 e 2.

³ $a = \frac{400}{200}$ media di errori per pagina

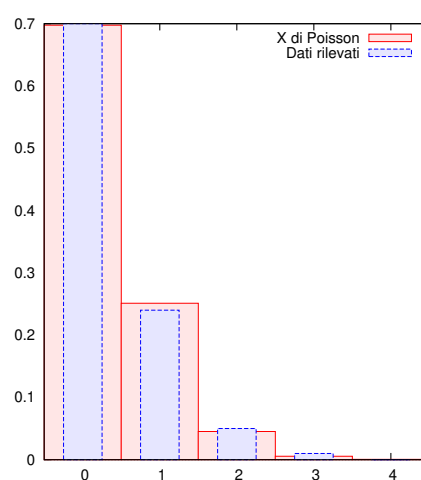
c) Studiando una popolazione di bruchi, si è ricavato, analizzando 200 foglie, la seguente tabella:

# bruchi	0	1	2	3	≥ 4
# foglie	140	48	10	2	0

È ragionevole assumere che la distribuzione dei bruchi sia descritta da una legge di Poisson?

Innanzitutto calcoliamo la media della variabile aleatoria X « # bruchi per foglia » $E(X) = \frac{48 + 20 + 6}{200} = 0.37$, quindi costruiamo $P_k(0.37)$

Il seguente grafico risponde alla domanda dell'esercizio:



35.4 Media e Varianza di una v.a. poissoniana

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-a} \frac{a^k}{k!} = \\
 &= e^{-a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} = \\
 &= e^{-a} a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}
 \end{aligned} \tag{35.7}$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Maclaurin⁴ della funzione $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ si ha $E(X) = a$

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k-a)^2 e^{-a} \frac{a^k}{k!} = \\
 &= e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} - a^2 = \\
 &= e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} ((k^2 - k) + k) \frac{a^k}{k!} - a^2 = \\
 &= e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \frac{a^k}{k!} + a - a^2 = \\
 &= e^{-a} a^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} + a - a^2 = \\
 &= a
 \end{aligned} \tag{35.8}$$

35.5 Esercizi

Risolvere i seguenti esercizi:

Ad un centralino arrivano delle chiamate con una densità media k ogni ora. Supponendo che il numero di chiamate in un qualsiasi intervallo di tempo sia distribuito secondo la legge di Poisson, calcolare la probabilità con la quale arrivano esattamente 3 chiamate in 2 minuti.

I clienti di una banca arrivano in modo casuale e si mettono in coda, mediamente, in ragione di 4 persone al minuto. Assumendo che l'ingresso in coda davanti allo sportello della banca in un dato intervallo di tempo segua una distribuzione di Poisson, determinare la probabilità che almeno un cliente entri in coda in mezzo minuto.

In un pronto soccorso di montagna nei mesi invernali si presentano in media 10 sciatori ogni settimana per qualche trauma dovuto a una caduta. Se le cadute si distribuiscono secondo una distribuzione di Poisson, qual è la probabilità che durante un periodo di 2 settimane in gennaio si presentino al pronto soccorso 12 sciatori?

⁴Colin Maclaurin (1698 - 1746) matematico scozzese che pubblicò la prima esposizione sistematica dei metodi calcolo di Newton.

35.6 Con Python

35.6.1 La porta degli zombie

```
[1]: from sympy import *
      init_printing()
      import random
      import numpy as np
      import matplotlib.pyplot as plt
```

La porta degli zombie è una fessura di larghezza ℓ in un muro impenetrabile. Incessantemente migliaia di zombie camminano in modo disordinato verso questo muro e a ogni secondo uno di essi lo raggiunge in un punto aleatorio. Solo gli zombie fortunati si trovano di fronte alla porta e possono superarla, gli altri invece urtano contro il muro.

Sia ℓ la larghezza della porta e d la larghezza del muro.

```
[2]: def pois(a,k):
      val=((a**k)/factorial(k))*exp(-a)
      return val
```

```
[3]: def passaZombie():
      passa = False
      posizione = d/2-random.random()*d
      if posizione>=-elle/2 and posizione <=elle/2:
          passa = True
      return passa
```

```
[4]: d = 10
      elle = 1
      a,k = symbols('a,k')
      pois(a,k)
```

```
[4]: 
$$\frac{a^k e^{-a}}{k!}$$

```

La probabilità che uno zombi si trovi davanti alla porta, sapendo che si sveglia in un generico punto del segmento di lunghezza d , è data da: $p = \frac{\ell}{d}$ se osserviamo gli zombie per un tempo di t secondi, se i risvegli avvengono ogni secondo, avremo che in media $\mu = p \cdot t$ zombie attraverseranno la porta ogni t secondi.

```
[5]: x = symbols('x')
      t = 50
      mu = elle/d*t
      mu
```

```
[5]: 5.0
```

```
[6]: def simula(n) :
      X = []
      Y = []
```

```

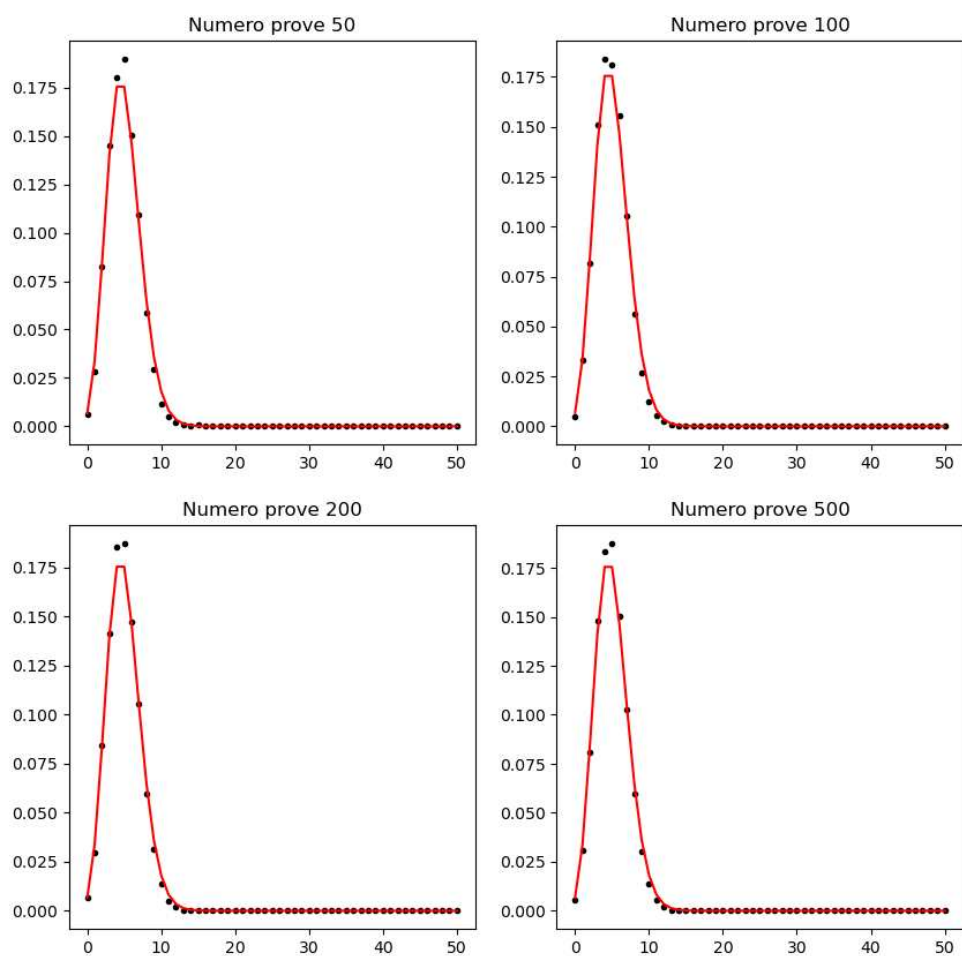
poisp = []
prove = n
toss = t
zombie = np.zeros(toss+1)
for k in range(1,prove):
    conta = 0
    for n in range(1,toss):
        if passaZombie():
            conta += 1
    zombie[conta] += 1
zombie = np.array(zombie,dtype=np.float64)
for h in range(0,toss+1):
    X.append(h)
    p = zombie[h]/prove
    Y.append(p)
Y = np.array(Y, dtype=np.float64)
m = (elle/d)*toss
for j in range(0,toss+1):
    poisp.append(pois(m,j))
poisp = np.array(poisp, dtype=np.float64)
return X,Y,poisp

```

```

[7]: figura, riquadro = plt.subplots(2,2, figsize=(10, 10))
riquadro[0,0].title.set_text('Numero prove 50')
riquadro[0,1].title.set_text('Numero prove 100')
riquadro[1,0].title.set_text('Numero prove 200')
riquadro[1,1].title.set_text('Numero prove 500')
X1, Y1, poisp1 = simula(5000)
riquadro[0,0].plot(X1,Y1, 'k.',poisp1,'r-')
X2, Y2, poisp2 = simula(10000)
riquadro[0,1].plot(X2,Y2, 'k.',poisp2,'r-')
X3, Y3, poisp3 = simula(20000)
riquadro[1,0].plot(X3,Y3, 'k.',poisp3,'r-')
X4, Y4, poisp4 = simula(50000)
riquadro[1,1].plot(X4,Y4, 'k.',poisp4,'r-')
plt.show()

```



Capitolo 36

Teoria della misura

36.1 Definizioni iniziali

36.1.1 Figura geometrica

Le figure geometriche sono insiemi di punti. Tra queste vi sono le linee (aperte o chiuse, limitate o illimitate), le superfici (aperte o chiuse, limitate o illimitate) ed i solidi (limitati o illimitati), che assumiamo come concetti primitivi.

Le rette sono particolari linee ed i piani sono particolari superfici, entrambe aperte ed illimitate.

Definizione 111 (Figure coincidenti). Due figure si dicono coincidenti quando ogni punto dell'una è anche punto dell'altra e viceversa.

Definizione 112 (Figure congruenti). Due figure si dicono **congruenti** quando si può portare, senza deformazione, una di esse a coincidere con l'altra.

Definizione 113 (Intersezione di figure). Si dice intersezione di due o più figure l'insieme dei punti ad esse comuni.

Una figura geometrica è detta piana quando tutti i suoi punti stanno su uno stesso piano.

36.2 Costruzione di una funzione misura

Sia π l'usuale piano geometrico, sia $\mathfrak{F}$ il sottoinsieme dell'insieme di tutte le figure geometriche del piano, per cui:

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathfrak{F} \\ \pi &\in \mathfrak{F} \\ A, B \in \mathfrak{F} &\Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F} \\ &\Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F} \\ &\Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}\end{aligned}$$

Ogni insieme $A \in \mathfrak{F}$ si dice misurabile.

Definizione 114 (Funzione additiva d'insieme). Si dice funzione additiva d'insieme (o **misura**) definita in $\mathfrak{F}$ un'applicazione

$$m : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

che soddisfa alle seguenti proprietà:

- i) **additività** $A, B \in \mathfrak{F}$ e $A \cap B = \emptyset$ allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$
- ii) **isotonia** $A, B \in \mathfrak{F}$ e $A \subset B$ allora $m(A) \leq m(B)$

La misura m sarà definita area se soddisfa anche alle seguenti proprietà:

- iii) **invarianza rispetto alle isometrie** se $A \in \mathfrak{F}$ cioè A è misurabile, sia A' ogni insieme isometrico ad A allora A' è misurabile ed ha la stessa misura.
- iv) **normalizzazione** Un quadrato di lato 1 è misurabile ed ha misura 1.

36.2.1 Conseguenze

$m(\emptyset) = 0$ infatti, se si prendono $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$ applicando le proprietà introdotte per la misura, si ha $m(\emptyset \cup \emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$.

Dimostrare che se A e B sono misurabili allora

$$m(A \cup B) - m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

36.3 L'area

Nel capitolo precedente si è visto che è possibile utilizzando l'equiscomposizione associare un'area a figure geometriche il cui contorno è una spezzata. Il procedimento di equiestensione in generale non può essere applicato a figure il cui contorno è curvilineo.

Per associare un'area all'insieme di figura 36.1, procediamo utilizzando la misura (m) introdotta: inseriamo una quadrettaura sopra la figura:

Sia $\overline{Q}$ l'insieme di tutti i quadrati che contengono almeno un punto della figura A , e $\underline{Q}$ l'insieme dei quadrati interamente contenuti in A , per rispettare le proprietà della misura, costruiamo i quadrati in modo che una volta giustapposti la loro intersezione risulti vuota, pertanto il generico quadrato $Q_{n,k}$ sarà costruito come in figura 36.3.

36.3.1 Insiemi misurabili

Sia C una generica figura piana (in generale non appartenente ad $\mathfrak{F}$) tale che $\forall \epsilon > 0$ è possibile trovare due elementi di $\mathfrak{F}$, siano ad esempio A e B tali che $A \subset C \subset B$ ed inoltre $m(B) - m(A) < \epsilon$, allora C è misurabile secondo la misura m .

È chiaro che gli insiemi A, B possono essere scelti fra i pluriquadrati introdotti in precedenza.

Il cerchio è misurabile

Consideriamo il cerchio unitario,¹ possiamo rappresentarlo nel piano cartesiano con centro nell'origine. Utilizziamo come insiemi di $\mathfrak{F}$ dei plurirettangoli così costruiti: suddividiamo il diametro

¹con una omotetia è possibile estendere il risultato a qualsiasi cerchio di raggio r

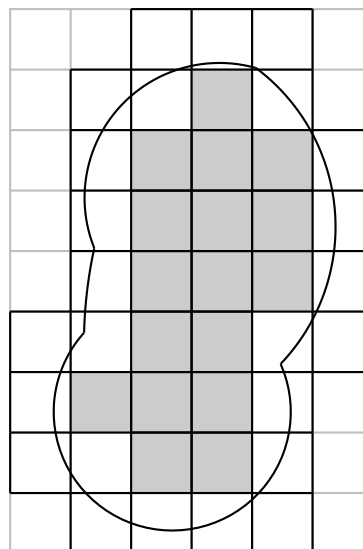
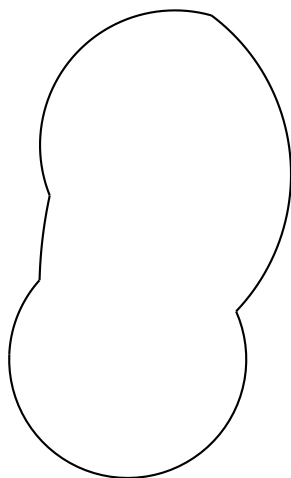


Figura 36.1: Una figura geometrica dal contorno curvilineo

Figura 36.2: Quadrettaura interna ed esterna della figura geometrica in figura 36.1

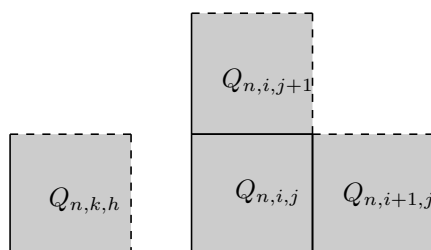


Figura 36.3: $Q_{n,k,h}$ quadrato "base", tre quadrati giustapposti. Notare che l'intersezione è vuota

in $2n$ parti (ciascuna di ampiezza $\frac{1}{n}$, costruiamo ora i plurirettangoli $\overline{R_n}$ e $\underline{R_n}$ come in figura 36.4 Per costruzione $\underline{R_n} \subset \text{Cerchio} \subset \overline{R_n}$ inoltre si ha che

$$m(\overline{R_n}) - m(\underline{R_n}) = \frac{4}{n}$$

Ne deriva che il cerchio è misurabile.

Dimostrare con cura le affermazioni precedenti

36.3.2 Osservazione

Nella definizione di misura ora introdotta è evidente la presenza del concetto di limite.

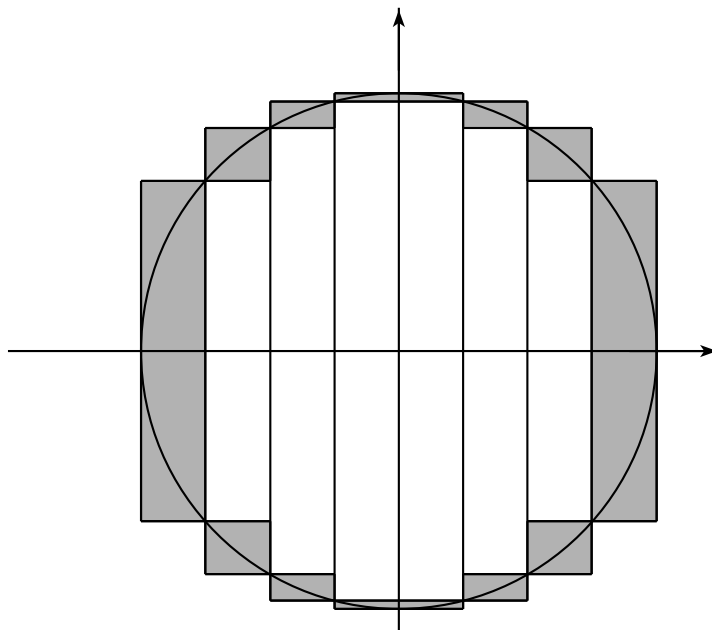


Figura 36.4: Plurirettangoli inscritti e circoscritti, evidenziata la differenza

36.3.3 Un insieme non misurabile

Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x < 1 \text{ e } 0 \leq y < 1\}$. Costruiamo la $\overline{Q}$ che coincide con il quadrato $[0, 1) \times [0, 1)$, mentre $\underline{Q}$ si riduce a singoli punti², quindi si ha che $m(\overline{Q}) = 1$ mentre $m(\underline{Q}) = 0$ e quindi l'insieme non è misurabile.

²Ricordo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè: Come visto in 66, un sottoinsieme G di $\mathbb{R}$ si dice denso in $\mathbb{R}$ se, qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $\exists g \in G$; $a < g < b$.

Teorema 107 ($\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$). L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Dimostrare il teorema per esercizio

Capitolo 37

Integrale definito

37.1 Integrale secondo Riemann-Stieltjes

Dopo aver costruito la misura (m) ci proponiamo ora di calcolare le aree di regioni di piano, in particolare sottografici di funzioni.

37.1.1 L'integrale di funzioni definite positive

Definizione 115 (Sottografico di una funzione). Si definisce sottografico di una data funzione f definita positiva in un intervallo $[a, b]$ l'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

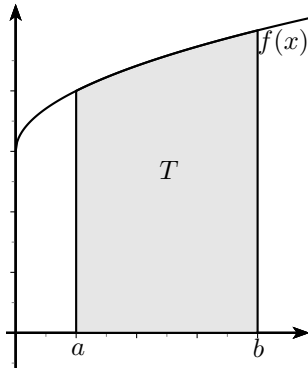
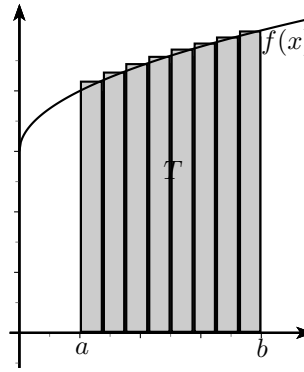
Definizione 116 (Integrale di funzioni definite positive). Se $f(x)$ è una funzione definita non negativa e limitata nell'intervallo $[a, b]$, si dice che essa è integrabile in $[a, b]$, se il suo sottografico T è misurabile. La misura di T è detta integrale di f in $[a, b]$ e si indica:

$$m(T) = \int_a^b f(x)dx$$

37.1.2 Le funzioni integrabili

Le funzioni monotone sono integrabili

Sia $f(x)$ definita positiva e monotona (supponiamo crescente)


 Figura 37.1: Funzione monotona $f(x)$

 Figura 37.2: $f(x)$ con i plurirettangoli

Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di ampiezza $\frac{b-a}{n}$, e costruiamo i plurirettangoli $\overline{R}_n$ in cui l' i -esimo rettangolo ha base l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ed altezza $f(x_i)$ e $\underline{R}_n$ in cui l' i -esimo rettangolo ha base l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ed altezza $f(x_{i-1})$, la misura di $m(\overline{R}_n) = \frac{b-a}{n} f(x_i)$ mentre quella di $m(\underline{R}_n) = \frac{b-a}{n} f(x_{i-1})$, dato che f è crescente si ha $\forall i \quad \underline{R}_n \subset \overline{R}_n$, calcoliamo ora la misura dei plurirettangoli:

$$m(\overline{R}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$m(\underline{R}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

dato che per costruzione si ha $\overline{R}_n \subset T \subset \underline{R}_n$ consideriamo la differenza:

$$m(\overline{R}_n) - m(\underline{R}_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

Essendo $\frac{b-a}{n}$ infinitesimo con n e $f(b) - f(a)$ una costante si ha che tutte le funzioni monotone sono integrabili.

37.1.3 Esempi di funzioni integrabili

a) La funzione e^x essendo crescente è integrabile in ogni intervallo limitato. Proviamo a calcolare $\int_0^a e^x dx$ (con $a > 0$). Suddividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n parti di ampiezza $\frac{a}{n}$, costruiamo il plurirettangolo inferiore $\underline{R}_n$ e il plurirettangolo superiore $\overline{R}_n$, le loro misure sono:

$$\underline{R}_n = \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k \frac{a}{n}}$$

¹ $f(x_0) = f(a)$ e $f(x_n) = f(b)$

e

$$\overline{R}_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n e^{k \frac{a}{n}} = \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}} \sum_{h=0}^{n-1} e^{h \frac{a}{n}}$$

ora

$$\underline{R}_n = \frac{a}{n} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} \quad (2)$$

e

$$\overline{R}_n = e^{\frac{a}{n}} \frac{a}{n} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1}$$

Poiché il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{a}{n}} = 1$ segue che $\underline{R}_n$ e $\overline{R}_n$ tendono allo stesso limite $e^a - 1$ cioè: $\int_0^a e^x dx$

premessa $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, il risultato si ricava partendo dalla relazione $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

b) Si vuole calcolare $\int_0^a x^2 dx$, dato che x^2 è monotona crescente è misurabile quindi come rimarcato nell'esempio precedente $\underline{R}_n$ e $\overline{R}_n$ convergono allo stesso limite. Pertanto calcoliamo $m(\underline{R}_n)$.

$$m(\underline{R}_n) = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6} \right)$$

Dove il limite della successione è $\frac{a^3}{3}$, si osservi che che il segmento parabolico di figura 37.3 ha area pari a $\frac{2}{3}$ del rettangolo circoscritto (si veda l'appendice C).

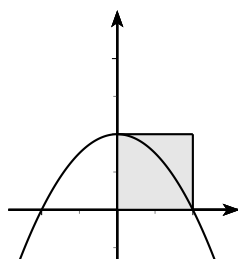


Figura 37.3: Il segmento parabolico

Utilizzando gli esempi calcola $\int_0^a x^3 dx$

37.2 Il teorema delle piccole oscillazioni

Definizione 117 (Oscillazione di f). Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ e siano $\min(f)$ e $\max(f)$ rispettivamente il minimo e il massimo di f su $[a, b]$, la differenza

$$\max(f) - \min(f)$$

²Somma di una progressione geometrica!

è definita oscillazione di f in $[a, b]$.

Teorema 108 (Piccole oscillazioni). Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione di $[a, b]$ in un numero finito di subintervalli tale che l'oscillazione di f su ogni subintervallo sia minore di ε .

Dimostrazione. Si ragiona per assurdo (cioè si nega la tesi):

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che comunque si costruisca una partizione finita di $[a, b]$ esiste un subintervallo in cui l'oscillazione di f è maggiore di ε_0 .

Usiamo la tecnica di bisezione, sia c il punto medio di $[a, b]$, consideriamo i due subintervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ chiamiamo $[a_1, b_1]$ quello in cui l'oscillazione di f è maggiore di ε_0 , se ciò accade in entrambi gli intervalli scegliamo quello di sinistra (convenzione).

Procedendo con questa tecnica si costruisce una successione di subintervalli $[a_n, b_n]$ di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$. Sia $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, essendo $\{a_n\} \subset [a, b]$ e $a \in \{a_n\}$ si ha che α esiste ed appartiene ad $[a, b]$.

Ora f è continua in α pertanto esiste un δ tale che $\forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ si ha che $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon_0$, ma è sempre possibile scegliere un $\bar{n}$ per cui $\frac{b-a}{2^{\bar{n}}} < \delta$, ma in $[a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}]$ l'oscillazione di f è maggiore di ε_0 , contro l'ipotesi di continuità. $\square$

37.3 Le funzioni uniformemente continue sono integrabili

Il teorema delle piccole oscillazioni ora dimostrato ci permette di ricavare che tutte le funzioni uniformemente continue sono integrabili secondo Riemann-Stieltjes.

Enunciare e dimostrare il teorema di integrabilità delle funzioni continue

37.4 L'integrale generalizzato

Fino ad ora si è considerato soltanto l'integrale di funzioni definite non negative, vogliamo ora generalizzare la definizione di integrale anche alle funzioni che assumono valori negativi. Per fare questo partiamo da proprietà vere per l'integrale di funzioni non negative e mantenendo le proprietà costruiamo una nuova definizione di integrale nell'insieme più ampio.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (37.1)$$

Questa proprietà deriva dall'additività della misura. Sia ora $f(x)$ non positiva ed in particolare risulti l'opposta di g , non negativa ed integrabile, cioè $f(x) = -g(x)$ con $g(x) \geq 0$.

Allora, dato che $f(x) + g(x) = -g(x) + g(x) = 0$ si deve avere:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = 0$$

Se vogliamo mantenere la proprietà 37.1 deve valere:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = 0$$

ma dato che $f(x) = -g(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b -f(x)dx = 0 \quad (37.2)$$

Siamo così portati a dire che una funzione f non positiva è integrabile se lo è la sua opposta $g = -f$ e il suo integrale è l'opposto dell'integrale di g .

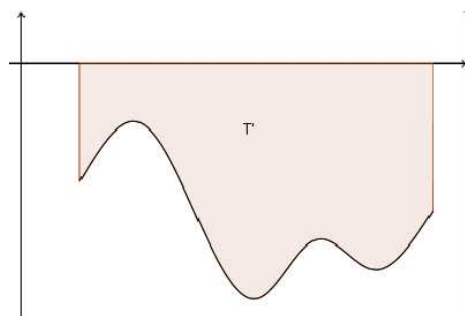


Figura 37.4: $y = f(x) = -g(x)$

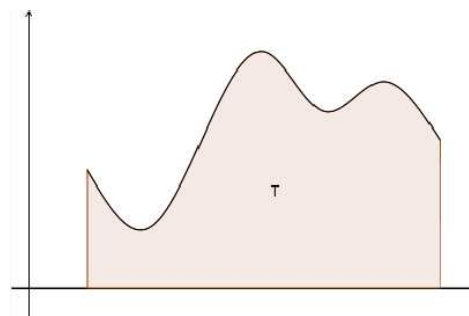


Figura 37.5: $y = -f(x) = g(x)$

Sia ora f una funzione differenza di due funzioni g ed h entrambe non negative e integrabili: $f(x) = g(x) - h(x)$.

Volendo far valere la 37.1 si deve porre:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) + \int_a^b -h(x) = \int_a^b g(x) - \int_a^b h(x)$$

Definizione 118 (Funzione integrabile). Una funzione $f(x)$ definita continua nell'intervallo $[a, b]$, si dice integrabile se è la differenza di due funzioni integrabili non negative g ed h , l'integrale definito di f in $[a, b]$ è per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x) - \int_a^b h(x)$$

Naturalmente il valore dell'integrale non dipende da come viene scomposta la funzione f , infatti: supponiamo che $f(x) = g(x) - h(x) = g_1(x) - h_1(x)$, con g, h, g_1, h_1 non negative e integrabili. Dato che $g(x) + h_1(x) = g_1(x) + h(x)$ per quanto ricavato in precedenza si ha che:

$$\int_a^b g(x) + \int_a^b h_1(x) = \int_a^b g_1(x) + \int_a^b h(x)$$

da cui

$$\int_a^b g(x) - \int_a^b h(x) = \int_a^b g_1(x) - \int_a^b h_1(x)$$

Una funzione f sarà integrabile se lo sono le due funzioni f^+ ed f^- così definite:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

E pertanto si ottiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

L'integrale ora definito è un operatore nuovo, con le seguenti caratteristiche:

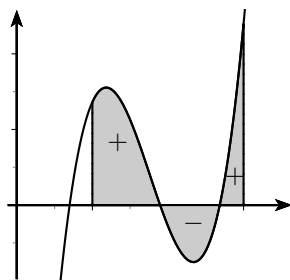


Figura 37.6: Il "segno" dell'integrale di f

- I) Se f è continua in $[a, b]$ f è integrabile.
- II) Se f è monotona in $[a, b]$ f è integrabile
- III) Se f è integrabile in $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ anche kf è integrabile e si ha:

f^+ ed f^-
sono
misurabili

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

- IV) Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ anche $f + g$ lo è e si ha:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- V) dalle due precedenti proprietà segue che l'operatore integrale così introdotto è lineare.

- VI) Se f è integrabile in $[a, b]$ e $c \in (a, b)$, allora si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- VII) Se f e g sono integrabili in $[a, b]$ e $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$ allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

giustificare le proprietà utilizzando l'integrale delle funzioni definite non negative

Capitolo 38

Integrale indefinito

38.1 Le funzioni primitive

Nel corso degli studi, in particolare in fisica, abbiamo affrontato il problema della ricerca di una funzione la cui derivata è una funzione nota.

*soluzione
dei circuiti
CR, LR,
LCR, il
problema
del moto del
sistema
massa
molla, il
calcolo del-
l'interesse
composto
...*

Definizione 119 (Primitiva di una funzione). Una funzione F è detta primitiva di una funzione f in (a, b) se:

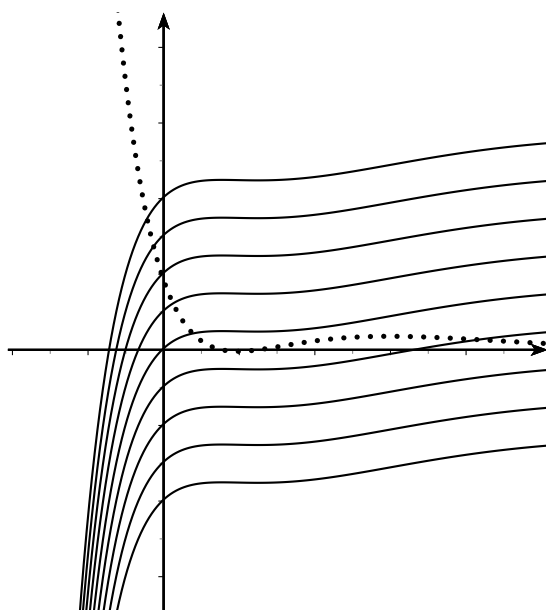
$$\forall x \in (a, b) \quad F'(x) = f(x)$$

L'insieme delle primitive di f è formato dalle funzioni $F(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrare l'affermazione precedente

Definizione 120 (Integrale indefinito). Si chiama integrale indefinito della funzione $f(x)$ e si indica con $\int f(x)dx$ ogni espressione $F(x) + c$ dove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

È possibile costruire una tabella delle primitive di alcune funzioni "leggendo al contrario" una tabella di derivazione:


 Figura 38.1: Alcune primitive della funzione f in figura tratto a puntini

$f(x)$	$F(x) \ c = 0$
0	k
$x^n \ \forall n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\log(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tg(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

38.2 Proprietà dell'integrale indefinito

Teorema 109 (l'operatore integrale è lineare). L'integrale indefinito è un operatore lineare

dimostrare per esercizio utilizzando la definizione

38.2.1 Esercizi

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1)

$$\int (2x^3 - 4 \sin(x) + 5\sqrt{x}) dx$$

2)

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx$$

38.2.2 Regola di integrazione per sostituzione

Si vuole calcolare :

$$\int f(x) dx$$

se non si può ricavare direttamente la primitiva della funzione $f(x)$ pur sapendo che questa esiste, si può procedere sostituendo a x una funzione $g(t)$. La funzione $g(t)$ deve essere C^1 ed ammettere funzione inversa. Allora per la definizione di differenziale di una funzione si ha che $dx = g'(t)dt$, e dimostriamo che:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt \quad (38.1)$$

Per dimostrare che l'uguaglianza 38.1 è vera è sufficiente ricavare che le derivate rispetto ad x dei due membri coincidono.

La derivata del primo membro è:

$$\frac{d \left(\int f(x) dx \right)}{dx} = f(x)$$

Derivando rispetto ad x il secondo membro si deve tener conto che t è funzione di x e quindi: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ e, in base alla regola di derivazione delle funzioni inverse si ha: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g'(t)}$ pertanto:

$$\frac{d \left(\int f(g(t)) g'(t) dt \right)}{dx} = \frac{d \left(\int f(g(t)) g'(t) dt \right)}{dt} \frac{dt}{dx} = f(g(t)) g'(t) \frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x)$$

q.e.d.

Un paio di esempi

$$\int \sqrt{\sin(x)} \cos(x) dx \quad (38.2)$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $\sin(x) = t$ allora $dt = \cos(x)dx$ e pertanto:

$$\int \sqrt{\sin(x)} \cos(x) dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3(x)} + c$$

□

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (38.3)$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $\frac{x}{a} = t$ allora $dt = \frac{dx}{a}$ e pertanto:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + t^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(t) + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

□

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (38.4)$$

Soluzione.

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x - a)(x + a)}$$

La frazione $\frac{dx}{(x - a)(x + a)}$ può essere scritta nella forma $\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$ determinando A, B con il sistema: $\begin{cases} A + B = 0 \\ a(A - B) = 1 \end{cases}$ che permette di ottenere:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$$

□

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (38.5)$$

Soluzione. Applichiamo la sostituzione $\frac{x}{a} = t$ allora $dt = \frac{dx}{a}$ e pertanto:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \arcsin(t) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

□

scrivere per esteso tutti i passaggi, indicando le proprietà applicate

38.2.3 Integrali ... importanti

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \quad (38.6)$$

Prima di risolvere l'integrale trasformiamo in modo opportuno il trinomio al denominatore:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + h \right)$$

dove

$$h = \begin{cases} k^2 & \text{se } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \\ -k^2 & \text{se } \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} < 0 \end{cases}$$

Primo caso: $a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right)$

applichiamo la sostituzione $t = x + \frac{b}{2a}$ $dt = dx$ ottenendo:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + k^2}$$

l'integrale si svolge come nell'esempio 38.3

Secondo caso: $a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - k^2 \right)$

applichiamo la sostituzione $t = x + \frac{b}{2a}$ $dt = dx$ ottenendo:

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - k^2}$$

l'integrale si svolge come nell'esempio 38.4

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \quad (38.7)$$

Questo integrale ammette come soluzione: $\log \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$.

verificare il risultato applicando la derivata

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (38.8)$$

Si scompone, come nel caso 38.6, il trinomio di secondo grado contenuto nella radice e poi con opportune sostituzioni si ottengono i due seguenti casi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} dt$$

che si risolve applicando 38.5; oppure a:

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - t^2}} dt$$

che si risolve applicando 38.7

38.2.4 Regola di integrazione per parti

È nota, dallo studio delle derivate, la seguente formula per la funzione $h(x) = f(x)g(x)$, prodotto di due funzioni derivabili:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Applicando ad h' l'integrale indefinito ed utilizzando la linearità dell'operatore integrale si ottiene:

$$\int h'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

da cui:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \quad (38.9)$$

la 38.9 è nota come formula di integrazione per parti.

Alcuni esempi

$$\int \log(x)dx \quad (38.10)$$

Soluzione. Per applicare la 38.9, è necessario che la funzione integranda si presenti come il prodotto di una funzione di cui è nota la primitiva per una funzione che una volta derivata risulti più "trattabile". Nel nostro caso la funzione integranda può essere scritta come: $1 \cdot \log(x)$ dove $f'(x) = 1$ e quindi $f(x) = x$ e $g(x) = \log(x)$ con $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int \log(x)dx = x \log(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x(\log(x) - 1) + c$$

□

calcolare $\int x^n \log(x)dx$ con $n \in \mathbb{N}$

$$\int e^x \sin(x)dx \quad (38.11)$$

Soluzione. In questo caso di le funzioni è immediato il calcolo della primitiva, ed inoltre le due funzioni derivando cambiano ben poco (e^x per niente!). Si procede quindi in questo modo:

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx \right)$$

posso osservare che i due integrali $\int e^x \sin(x) dx$ presenti a primo e secondo membro hanno segni opposti, e pertanto possono essere sommati:

$$2 \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + c$$

o meglio:

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + c_1$$

□

$$\int \operatorname{arctg}(x) dx \quad (38.12)$$

Soluzione. come in 38.10 "aggiungiamo una funzione 1":

$$\int 1 \operatorname{arctg}(x) dx = x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

ora $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ si risolve per sostituzione ($x^2 + 1 = t$) e si ricava:

$$\int \operatorname{arctg}(x) dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c$$

□

38.2.5 Proprietà delle funzioni iperboliche

Definizioni:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (38.13)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (38.14)$$

Le derivate delle funzioni iperboliche:

$$D(\sinh(x)) = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad (38.15)$$

$$D(\cosh(x)) = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \quad (38.16)$$

Alcune formule:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2} = 1 \quad (38.17)$$

$$\sinh(2x) = 2 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \sinh(x) \cosh(x) \quad (38.18)$$

$$\begin{aligned} \cosh(2x) &= 2 \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} + 1 = 2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 + 1 = 2 \sinh^2(x) + 1 \\ &= \sinh^2(x) + \cosh^2(x) \\ &= 2 \cosh^2(x) - 1 \end{aligned} \quad (38.19)$$

$$\int x \sqrt{x^2 + x + 1} dx \quad (38.20)$$

Soluzione. Si ha: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, poniamo $\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sinh(t)$ e pertanto $dx =$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(t)dt$, sostituendo nella 38.20 si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(t) - \frac{1}{2} \right) \frac{3}{4} \cosh^2(t) dt = \\ &= \sqrt{3} \frac{3}{8} \int \sinh(t) \cosh^2(t) dt - \frac{3}{8} \int \cosh^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{3}{16} \log \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) \end{aligned}$$

□

sviluppare nell'esempio 38.20 tutti i calcoli

Capitolo 39

*Teorema di Caccioppoli Banach



Renato Caccioppoli nato a Napoli, 20 gennaio 1904 morto a Napoli, 8 maggio 1959. Renato Caccioppoli è certamente una delle figure più interessanti e affascinanti della matematica del ventesimo secolo. Nipote di Michail Bakunin, visse in un ambiente culturale originale e raffinato. Seguendo i desideri del padre, si iscrisse inizialmente ad Ingegneria, per poi passare a Matematica. Nel 1925 si laureò all'Università di Napoli, sotto la guida di Ernesto Pascal, ma riconoscendo quale suo maestro soprattutto Mario Picone.

Nello stesso anno divenne assistente di Picone, nel 1928 ottenne la libera docenza e nel 1931 fu a Padova, dove aveva vinto il concorso per la cattedra di Analisi Algebrica. Nel 1934 tornò a Napoli per insegnare Teoria dei Gruppi, Analisi Superiore, e dal 1943, Analisi Matematica.

La sua prima pubblicazione è del 1926. In questa Caccioppoli prese a ricercare una generalizzazione del teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali lineari tramite il prolungamento dell'insieme di definizione iniziale. Nello stesso anno Caccioppoli si occupò dell'estensione dei funzionali lineari dall'insieme delle funzioni continue a quello delle funzioni di Baire, anticipando così un caso particolare del teorema di Hahn-Banach. Questo metodo "del prolungamento" fu ripreso successivamente da Caccioppoli, ed è uno dei fili conduttori rintracciabili nella sua opera.

Nel 1927 Caccioppoli pubblicò un fondamentale articolo sull'integrazione in spazi k -dimensionali di $\mathbb{R}^n$, dove intendeva stabilire:

«...i principi di una teoria della misura delle superficie piane e curve, e più generalmente delle varietà a due o più dimensioni immerse in uno spazio lineare.»

Di nuovo Caccioppoli utilizza il suo metodo "classico", cioè il prolungamento di un funzionale oltre il suo insieme iniziale di definizione. Secondo Caccioppoli, tale funzionale avrebbe dovuto comunque conservare la sua proprietà di semicontinuità inferiore,

«...imperiosamente suggerita dall'intuizione geometrica.»

La teoria più accreditata, in materia di misura, era in quel momento quella proposta da Lebesgue. Il matematico napoletano prese le mosse dal metodo di Lebesgue. considerando dapprima il caso piano: una superficie poliedrica descritta parametricamente da una coppia di funzioni $X = f(x, y)$ e $Y = g(x, y)$ su un dominio D . La proiezione della superficie su D è una "rete di triangoli" e considerando il minimo limite della variazione totale della coppia (f, g) si può definire una misura di S . Caccioppoli non seguì Lebesgue oltre questo punto, cioè nel passaggio al caso in cui S fosse una superficie curva, ponendosi il problema

«...di costruire, per la superficie più generale, una successione di superficie poliedriche di approssimazione, le cui aree ne tendano all'area (finita o infinita).»

Caccioppoli definì allora l'area di una superficie curva come l'integrale di Stieltjes dell'elemento d'area costruito con gli elementi d'area della proiezione della superficie S sui piani coordinati. Non dimostrò immediatamente, comunque, l'equivalenza della sua definizione a quella di Lebesgue, e questo portò negli anni successivi a qualche polemica con altri matematici. Lavori di Young di qualche anno posteriori tendevano a negare la generalità di questa equivalenza.

Dal 1930 Caccioppoli si era dedicato allo studio delle equazioni differenziali, fornendo teoremi di esistenza per problemi lineari e non lineari. L'idea originale di Caccioppoli fu quella di utilizzare un approccio topologico-funzionale allo studio delle equazioni differenziali. Nel caso lineare, egli considera una trasformazione lineare definita sui vettori di uno spazio lineare (nel quale la soluzione va ricercata) che li trasformi in vettori di un secondo spazio lineare, nel quale sono assegnati i dati.

Se l'insieme immagine ricopre tutto il secondo spazio lineare, allora le soluzioni esistono in ogni caso, indipendentemente dai dati assegnati. Altrimenti (cioè se l'insieme immagine è un sottospazio lineare chiuso del secondo spazio lineare), si rende necessaria l'imposizione di condizioni necessarie e sufficienti sui dati affinché il problema ammetta soluzioni.

Proseguendo su questa strada, nel 1931, Caccioppoli estese ad alcuni casi il teorema del punto fisso di Brouwer, ed applicò i suoi risultati allo studio di problemi di esistenza sia per le equazioni differenziali ordinarie che per quelle alle derivate parziali.

Per decidere sull'esistenza e l'unicità (e non solo sull'esistenza, come accade per il teorema di Brouwer) introdusse il concetto generale dell'inversione della corrispondenza funzionale, stabilendo nel 1932 che una trasformazione tra due spazi di Banach è invertibile solo se è localmente invertibile e se le successioni compatte sono le sole ad essere trasformate in successioni convergenti.

Nel periodo tra il 1933 e il 1938 Caccioppoli applicò il suo metodo alle equazioni ellittiche, fornendo le maggiorazioni a priori per le loro soluzioni, in modo più generale di quanto fece Bernstein per il caso bidimensionale. Nello stesso periodo si dedicò con successo agli insiemi di funzioni definiti in $\mathbb{C}^n$, e nel 1933 trovò il teorema fondamentale sulle famiglie normali di variabili complesse: se una famiglia è normale rispetto ad ogni variabile complessa lo è anche rispetto all'insieme delle variabili.

Tornando al suo interesse principale per l'Analisi Funzionale, dimostrò il teorema sull'armonicità delle funzioni ortogonali ad ogni Laplaciano, meglio (e ingiustamente!) noto come "lemma di Weyl". Di nuovo, nel 1938, Caccioppoli ritornò allo studio dei teoremi di esistenza di Riemann, occupandosi dell'esistenza di integrali abeliani su una superficie di Riemann chiusa.

Nel 1935 si occupò del problema posto da Hilbert nel 1900, al Congresso Internazionale dei Matematici, vale a dire se le soluzioni delle equazioni ellittiche analitiche siano o meno analitiche. Caccioppoli dimostrò l'analiticità per le soluzioni di classe C^2 .

Nel maggio del 1938 Hitler è in visita a Napoli con Mussolini: Caccioppoli, che aveva già mostrato le sue opposizioni al fascismo con tagliente sarcasmo, riesce a convincere un'orchestra di un ristorante napoletano (discordi le versioni sull'esatta sede dell'episodio), ad eseguire, in presenza di gerarchi e agenti dell'OVRA, la Marsigliese, facendo seguire un esplicito discorso contro i dittatori tedesco e italiano.

Fu immediatamente arrestato, e sarebbe stato giudicato dal Tribunale Speciale, se l'intervento della zia Maria Bakunin, allora docente di chimica all'Università di Napoli, non avesse convinto la polizia a dichiararlo pazzo e ad inviarlo presso un manicomio.

Lì lavorò con Carlo Miranda sul problema dell'esistenza di superfici convesse chiuse (ovaloidi) in una data metrica Riemanniana, utilizzando il suo principio generale di inversione. Gianfranco Cimmino, ricorda:

«... Andavo a trovarlo tutti i giorni. Dimostrava di accettare serenamente la convivenza con i matti, considerandola una particolare esperienza di vita. Ma i suoi parenti ed amici ne erano profondamente rattristati e preoccupati. Riuscirono ad ottenere una sorveglianza meno stretta, e gli fu concesso di uscire con me. Lo portavo via da quella casa di cura con la mia macchina, per fargli prendere un po' d'aria.»

Per evitare qualsiasi contatto con le istituzioni accademiche ufficiali, che erano strettamente controllate dal regime fascista, pubblicò (1940) i suoi risultati della ricerca con Miranda sulle "Commentationes Pontificiae Academiae Scientiarum", la pubblicazione scientifica della Città del Vaticano. Nel 1943 fu tra gli organizzatori di uno sciopero, poi fallito, degli autoferrottramvieri di Napoli.

Dopo la seconda guerra mondiale Renato Caccioppoli riprese la sua attività scientifica. Fu membro corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, per divenirne membro nazionale nel 1958. Fu inoltre socio nazionale della Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli e della Accademia Pontaniana, socio corrispondente dell'Accademia Patavina di Lettere ed Arti. Sono questi gli anni dell'adesione al Partito Comunista, senza mai prenderne la tessera, per una naturale indipendenza e forse per uno scetticismo di fondo. In effetti Caccioppoli non condivideva la politica del PCI su alcune questioni internazionali (rimase profondamente turbato dall'invasione dell'Ungheria nel 1956) e la dottrina scientifica ufficiale sovietica. Non di meno si impegnò a fondo in politica, spesso tenendo comizi e intervenendo con autorevolezza a convegni e manifestazioni indetti dal Partito. Fu tra i principali animatori dei "Partigiani per la Pace" un'organizzazione unitaria di democratici, socialisti, comunisti, ma anche cattolici, che si batteva per il disarmo e contro lo schiacciamento dell'Europa occidentale nella logica del Patto Atlantico. Caccioppoli partecipò anche all'organizzazione del napoletano "Circolo del Cinema" uno dei primi cineforum del dopoguerra italiano.

Nel 1952 Caccioppoli stese una versione più completa, e nelle sue intenzioni definitiva, dei suoi precedenti lavori sull'area di una superficie e sulla teoria della misura, con l'articolo Misura e integrazione degli insiemi dimensionalmente orientati. Qui Caccioppoli puntò la sua attenzione sulla teoria degli insiemi dimensionalmente orientati, ossia superfici assegnate non tramite parametri, ma pensate come frontiere orientate di insiemi spaziali. Gli insiemi approssimanti in media tramite domini poligonali a perimetro limitato introdotti in questa nota lineare, sono oggi noti come Insiemi di Caccioppoli.

I suoi ultimi lavori risalgono al 1952 e 1953 e trattano delle funzioni pseudoanalitiche -un concetto originale introdotto da Caccioppoli- estendendo ad esse alcune proprietà delle funzioni analitiche.

Gli ultimi anni della sua vita furono i più tristi: Caccioppoli probabilmente vide molte delle sue aspirazioni politiche disilluse, sentì forse venir meno la sua vena matematica, soffrì l'abbandono della moglie, Sara Mancuso, cui era profondamente legato. Prese a bere sempre più e si isolò progressivamente. Si uccise nella sua casa di Palazzo Cellammare l'8 maggio 1959.

Giuseppe Scorza Dragoni, scrive

«... seppi che il giorno prima egli era stato visto per Via Chiaia fra il mezzogiorno e l'una (l'ora in cui di solito arrivo); e che si era dato la morte nel pomeriggio inoltrato (quando ormai non sarei certamente arrivato più). E da allora mi domando se ero atteso; e depreco il contrattanto che mi aveva trattenuto a Roma e mi aveva impedito di recarmi dal più bravo e buono e caro, dal più intelligente dei miei amici, indimenticabile per tutti quelli che lo hanno conosciuto.

39.0.1 Successioni di Cauchy

Definizione 121 (Successione di Cauchy). Sia x_n una successione a valori in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n, m > \bar{n} \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$ allora x_n è una successione di Cauchy.

Definizione 122 (Insieme completo). Uno insieme A si dice completo se ogni successione di Cauchy a valori in A converge ad un punto di A .

Osservazione: non tutte le successioni di Cauchy ammettono limite esempio:

sia $F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ la successione dei numeri di Fibonacci, si costruisca la successione $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ x_n è formata da numeri razionali ma converge al numero $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ⁽¹⁾

Teorema 110 (Caccioppoli-Banach per funzioni di $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Sia $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$, tale che $\forall x, y \in [a, b]$ si ha che $|T(x) - T(y)| < k|x - y| \quad 0 < k < 1$ allora $\exists! x^* \in [a, b] : T(x^*) = x^*$

Dimostrazione. T è **continua** se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ per cui $\forall x$ che verifica $|x - x_0| < \delta$ si ha $|T(x) - T(x_0)| < \varepsilon$, ma essendo $|T(x) - T(y)| < k|x - y|$ è sufficiente scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ per ottenere la continuità. Data l'arbitrarietà di x_0 segue che T è continua su $[a, b]$. T **ammette punto fisso**: cominciamo con il costruire una successione

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a, b] \\ x_1 &= T(x_0) \\ x_2 &= T(x_1) = T(T(x_0)) \triangleq T^2(x_0) \\ &\dots \\ x_n &= T(x_{n-1}) = T^n(x_0) \end{aligned}$$

la successione così costruita è di Cauchy infatti:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |T(x_n) - T(x_{n-1})| < k|x_n - x_{n-1}| = \\ &= k|T(x_{n-1}) - T(x_{n-2})| < k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &= \dots < k^n|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$|x_{n+1} - x_n| < k^n|x_1 - x_0|$ presi $m, n \in \mathbb{N}$ (facciamo l'ipotesi che $m > n$) si ha:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_{n+p} - x_n| = \\ &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} - \dots - x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| < \\ &< k^{n+p-1}|x_1 - x_0| + k^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \dots + k^n|x_1 - x_0| = \\ &= k^n|x_1 - x_0| \sum_{j=0}^{p-1} k^j = \\ &= k^n|x_1 - x_0| \frac{1 - k^p}{1 - k} \end{aligned}$$

¹per dettagli vedi appendice L

la differenza $|x_m - x_n|$ è infinitesima come k^n .

Dato che $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ed essendo $\mathbb{R}$ completo si ha: $x_n \rightarrow x^*$, ma dato che T è continua si ha che: $T(x_n) \rightarrow T(x^*)$, ma essendo $x_n = T(x_{n-1})$ si conclude che $T(x^*) = x^*$.

Unicità del punto fisso: ragioniamo per assurdo, $\exists x, y \in [a, b] : x \neq y$ e $T(x) = x$ $T(y) = y$. Consideriamo la differenza $|x - y|$ diversa da 0 per ipotesi, si ha: $|x - y| = |T(x) - T(y)| < k|x - y|$ da cui $|x - y| < |x - y|$ assurdo. $\square$

Tratto da: Hardy 2002 « Il matematico, come il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee. »

« La sola difesa della mia vita, allora, o di chiunque sia stato matematico nello stesso mio senso, è dunque questa: ho aggiunto qualcosa al sapere, ed ho aiutato altri ad aumentarlo ancora; il valore dei miei contributi si differenzia soltanto in grado, e non in natura, dalle creazioni dei grandi matematici, o di tutti gli altri artisti, grandi e piccoli, che hanno lasciato qualche traccia dietro di loro »

Capitolo 40

Integrale . . . uno sguardo d'insieme

40.1 L'integrazione come operazione indipendente dalla derivazione: l'integrale di Cauchy

Fin dagli inizi del calcolo infinitesimale, l'integrazione era stata definita come l'operazione inversa della derivazione, un'impostazione codificata nelle *Lectiones de calculo integralium* che Johann Bernoulli aveva tenuto al marchese de l'Hôpital, e che furono pubblicate nelle *Opera omnia* di Johann nel 1742. Per tutto il Settecento la definizione di Bernoulli era stata accettata come pacifica. Essa però cominciò a mostrare le sue lacune quando Fourier, nei suoi studi sulle serie trigonometriche, si trovò a dover integrare funzioni discontinue, come ad esempio la funzione che vale 1 nell'intervallo tra 0 e 1 e 0 altrove, funzioni che manifestamente non potevano essere scritte come derivate; in breve, che non ammettevano una primitiva. Per definire l'integrale di simili funzioni, Fourier non trovò di meglio che tornare al vecchio concetto di area, dando come intuitiva questa nozione.

Probabilmente stimolato dai risultati di Fourier, Cauchy fu condotto a rivedere la definizione di integrale in termini di primitive e a sostituirla, stavolta rigorosamente, con una definizione di integrale indipendente dalla derivata.

Le idee di Cauchy vennero pubblicate nel secondo dei trattati da lui redatti per gli studenti dei suoi corsi, il *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*, nel quale egli affrontava il calcolo differenziale - in particolare le operazioni di derivazione e integrazione - con gli stessi criteri di rigore con i quali aveva trattato la dottrina dei limiti e delle serie nel *Cours d'Analyse*.

Il volume è idealmente diviso in due parti uguali: nella prima (lezioni I-XX) si tratta della derivazione, nella seconda (lezioni XXI-XL) dell'integrazione. Rovesciando l'impostazione fin allora seguita, nella quale la precedenza era data alla ricerca delle funzioni primitive, quelle cioè che avevano come derivata la funzione data, e che vedeva il calcolo delle aree come una semplice applicazione del metodo generale, Cauchy inizia la sua trattazione proprio dall'integrale definito

« Nel calcolo integrale - scrive nell'introduzione - mi è sembrato necessario dimostrare generalmente l'esistenza degli integrali o funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. Allo scopo, è stato anzitutto necessario stabilire la nozione di integrale preso entro limiti dati o integrale definito » .

L'integrale è dunque introdotto in maniera indipendente dalla derivata, salvo poi confrontare le due operazioni, riprendendo con ciò un punto di vista in un certo senso più simile alle idee sulla misura delle figure che si erano sviluppate con Cavalieri e i suoi continuatori e che, accantonate con l'affermarsi del calcolo infinitesimale, erano state riprese da Fourier. Per definire l'integrale di una funzione continua $f(x)$ nell'intervallo $[x_0, X]$, Cauchy divide l'intervallo $[x_0, X]$ in un numero finito di intervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, X]$ (che per semplicità si possono supporre tutti di uguale lunghezza), e calcola la somma, oggi detta « di Cauchy »,

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

che non è altro che la somma delle aree dei rettangoli in figura, di altezze $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$.

Ciò premesso egli prova che quando, infittendo la partizione, gli intervalli diventano « molto piccoli », il valore di S finirà per essere sensibilmente costante o in altri termini finirà per raggiungere un certo limite che dipenderà unicamente dalla forma della funzione $f(x)$ e dai valori estremi attribuiti alla variabile x . Questo limite è ciò che si chiama integrale definito.

La nuova definizione di Cauchy presentava ancora vari aspetti non completi o non soddisfacenti, sui quali si svilupperanno riflessioni successive. Tra questi, la mancanza di una chiara distinzione fra continuità e uniforme continuità, oggetto in seguito di studi da parte di Weierstrass e della sua scuola; come pure la mancanza di una sistemazione dei numeri reali, senza la quale l'esistenza del limite delle somme non può essere dimostrata rigorosamente.

Un inconveniente particolarmente grave era poi il fatto che la definizione valesse per le sole funzioni continue o al più - con un'opportuna generalizzazione - con un numero finito di discontinuità, una limitazione che ne limitava l'uso nella trattazione della serie di Fourier.

40.1.1 A. L. Cauchy *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal*

Supponiamo che, essendo $f(x)$ una funzione continua rispetto alla variabile x tra due limiti finiti $x = x_0$ e $x = X$, si denotino con $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ dei nuovi valori di x interposti tra questi limiti, e che vadano sempre crescendo o decrescendo dal primo limite al secondo. Ci si potrà servire di questi valori per dividere la differenza $X - x_0$ in elementi $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ che saranno tutti dello stesso segno. Ciò posto immaginiamo che si moltiplichino ogni elemento per il valore di $f(x)$ corrispondente all'origine di questo stesso elemento, ossia l'elemento $x_1 - x_0$ per $f(x_0)$ l'elemento $x_2 - x_1$ per $f(x_1)$ infine l'elemento $X - x_{n-1}$ per $f(x_{n-1})$ sia $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ la somma dei prodotti così ottenuti. La quantità S dipenderà evidentemente: dal numero n degli elementi nei quali sarà divisa la differenza $X - x_0$; dai valori stessi di questi elementi e, di conseguenza, dal modo di suddivisione adottato. Ora importa osservare che se i valori numerici degli elementi diventano molto piccoli e il numero n assai considerevole, il modo di suddivisione non avrà più sul valore S che un'influenza insensibile.

40.2 L'integrale di Riemann

L'intreccio tra il calcolo integrale e le serie di Fourier è uno dei caratteri dominanti dell'evoluzione del concetto di integrale: il tentativo di sviluppare in serie trigonometriche funzioni sempre più generali portava immediatamente con sé la necessità di estendere l'integrale a queste funzioni (i coefficienti della serie di Fourier di una funzione data si ottengono infatti calcolando gli integrali del prodotto di questa funzione per seni e coseni), mentre simmetricamente ogni estensione dell'integrale che aumentasse il numero delle funzioni integrabili poneva immediatamente

il problema della sviluppabilità di queste ultime in serie di Fourier. I progressi che si verificarono durante l'ottocento nella teoria dell'integrazione furono per la maggior parte legati allo studio delle serie di Fourier.

Nella ultima parte della memoria del 1829 sulle serie di Fourier, *Sur la convergence des séries trigonométriques*, Lejeune-Dirichlet si pone il problema dell'integrabilità delle funzioni con un numero infinito di punti di discontinuità. Dopo aver dato una dimostrazione rigorosa dell'integrabilità delle funzioni continue, Dirichlet afferma che l'integrabilità di una funzione con infinite discontinuità dipende dalla « topologia » dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. In particolare - egli dice - l'insieme delle discontinuità ammissibili deve essere tale che, tradotto in termini moderni, la sua chiusura non abbia punti interni. A sostegno della sua affermazione - che più tardi si rivelerà errata, la sua condizione non essendo né necessaria né sufficiente - egli portò il celebre esempio della funzione che porta il suo nome, cioè la funzione $f(x)$ che vale 1 se x è razionale e 0 se x è irrazionale, dicendo che si trattava di una funzione non integrabile. Il merito principale di questo esempio non sta però tanto nell'effettiva non integrabilità della « funzione di Dirichlet », quanto nel fatto che con questo esempio ci si è sbarazzati del tutto dell'idea di funzione come espressione analitica, introdotta da Bernoulli e ripresa da Eulero, per approdare al concetto moderno di funzione come corrispondenza - o se si vuole come applicazione - tra due insiemi.

Una nuova definizione di integrale che si adatta a tutte le funzioni, indipendentemente dall'esistenza o meno di punti di discontinuità, fu data da Bernhard Riemann nella sua tesi di abilitazione alla libera docenza intitolata *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* scritta nel 1854, ma che rimase praticamente sconosciuta fino al 1867, quanto venne pubblicata da Dedekind.

Nella sua tesi Riemann introduce una generalizzazione delle somme di Cauchy (peraltro considerata anche da Cauchy stesso) prendendo in ogni intervallo il valore della funzione $f(x)$ non nel primo estremo, come aveva fatto Cauchy; ma in un punto qualsiasi dell'intervallo. Questa non sarebbe una grande innovazione, anzi è piuttosto una complicazione inessenziale. Quello che invece è importante è il cambiamento del punto di vista. Mentre Cauchy si era limitato alle funzioni continue in modo da poter dimostrare la convergenza delle somme, Riemann prende questa convergenza come definizione dell'integrabilità di una funzione: la funzione $f(x)$, non importa se continua o meno, è integrabile se quando l'ampiezza degli intervalli della divisione tende a zero le somme di Cauchy hanno un limite finito.

Con questo nuovo punto di vista, il problema diventa non di dimostrare la convergenza delle somme sotto opportune ipotesi, ma di trovare delle condizioni - possibilmente necessarie e sufficienti - che assicurino l'integrabilità di una funzione, in modo da caratterizzare le funzioni integrabili.

Nella ricerca di queste condizioni, lo stesso Riemann osserva che la somma S è compresa tra i valori $S_1 = \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2 + \dots + \delta_n M_n$ e $S_2 = \delta_1 m_1 + \delta_2 m_2 + \dots + \delta_n m_n$, dove M_i ed m_i sono i valori massimo e minimo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. La differenza tra questi valori è

$$S_1 - S_2 = \delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2 + \dots + \delta_n \omega_n$$

dove ω_i è l'oscillazione della funzione f nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Dall'esame dei vari termini, Riemann trova allora che condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata $f(x)$ sia integrabile è che per ogni $\sigma > 0$ e $\delta > 0$ esista una partizione dell'intervallo di definizione in un numero finito di intervalli tali che la somma delle lunghezze di quelli nei quali l'oscillazione della funzione supera σ risulti minore di δ .

La generalità di tale condizione è mostrata costruendo un esempio di funzione che la soddisfa, ed è dunque integrabile, ma che possiede un insieme denso di punti di discontinuità, in contrasto con la condizione ritenuta necessaria da Dirichlet. Si tratta della funzione $f(x)$ che vale 0 se x è irrazionale, mentre se x è razionale vale $\frac{1}{n}$.

La pubblicazione della memoria di Riemann diede origine a una serie di studi che portarono a sviluppi in varie direzioni: da una parte la precisazione di concetti topologici e delle proprietà della retta, che condussero Cantor a fondare la teoria degli insiemi, dall'altra la costruzione di una teoria della misura che portò fino alla teoria di Lebesgue.

40.2.1 B.Riemann *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*

L'incertezza che regna su alcuni punti fondamentali della teoria degli integrali indefiniti ci costringe a premettere qualcosa sul concetto di integrale definito e sull'ambito della sua validità. Dunque, anzitutto: che cosa si deve intendere per $\int_a^b f(x)dx$? Per stabilirlo, prendiamo tra a e b una serie di valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ che si susseguono l'un l'altro secondo grandezza e denotiamo per brevità $x_1 - a$ con δ_1 , $x_2 - x_1$ con δ_2 , ..., $b - x_{n-1}$ con δ_n e con ε_i dei numeri Positivi minori di 1. Il valore della somma

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

dipenderà allora dalla scelta degli intervalli δ e delle grandezze ε . Se esso ha la proprietà, comunque siano scelti δ e gli ε , di avvicinarsi infinitamente a un limite fissato A , quando i δ tendono tutti verso 0, allora tale limite si dice il valore dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$.

Capitolo 41

Integrale . . . la sintesi

Prima di affrontare il teorema che permette di sintetizzare i due percorsi sviluppati (la teoria della misura con l'integrale definito e il problema delle primitive), applichiamo le proprietà enunciate nel capitolo 37 a pagina 409 per dimostrare il seguente

Teorema 111 (della media integrale). Se f è una funzione integrabile secondo Riemann-Stieltjes nell'intervallo $[a, b]$ allora la sua media integrale:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

è compresa fra l'estremo inferiore $l = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ e l'estremo superiore $L = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Dimostrazione. Dato che $l \leq f(x) \leq L$ basta applicare l'isotonia dell'integrale definito si giunge alla tesi. $\square$

Osservazione

Se f è continua in $[a, b]$ allora:

$$\exists c \in [a, b] : \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

motivare l'affermazione precedente

41.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 112 (fondamentale del calcolo integrale). Sia f una funzione uniformemente continua su $[a, b]$, preso $c \in [a, b]$ si consideri la funzione (detta funzione integrale di f)

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Sia x_0 un fissato punto di $[a, b]$, scriviamo il rapporto incrementale della funzione F in x_0 , $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt}{x - x_0}$, utilizzando le proprietà dell'integrale si può scrivere: $\int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt$, come $\int_c^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$, quindi il rapporto incrementale di F è: $\frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0}$.

Ora dato che f continua in x_0 , $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, nello stesso intervallo f è integrabile in quanto uniformemente continua, dal teorema della media integrale si ha: $m \leq \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x - x_0} \leq M$ essendo m, M rispettivamente il massimo ed il minimo di f in nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, da cui: $\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \epsilon$ $\square$

41.2 Applicazioni

Il teorema 112 ci assicura l'esistenza di una primitiva e quindi di infinite altre) per ogni funzione f uniformemente continua. Nella pratica si procede in senso inverso, cioè si utilizza la conoscenza di una primitiva di f per calcolare un integrale definito. Per esempio se si vuole calcolare $\int_a^b f(x)dx$, essendo f continua in $[a, b]$, se F è una primitiva di f si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

L'integrale definito di f su $[a, b]$ è dato dall'incremento di una qualsiasi primitiva F di f . Indicheremo l'incremento $F(b) - F(a)$ con $F(x)|_a^b$

41.2.1 Esempi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log|x||_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2)$$

Osservazione

Attenzione a non commettere il seguente **ERRORE**:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = \log|x||_{-1}^2 = \log|2| - \log|-1| = \log(2)$$

nell'intervallo $[-1, 2]$ la funzione $\frac{1}{x}$ non è continua.

n.b.: $\mathbb{D}$ indica il dominio della funzione.

Dimostrare che se f e g sono continue in $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora l'insieme $A = \{(x, y) : x \in [a, b] f(x) \leq y \leq g(x)\}$ è misurabile e la sua area è data da

$$m(A) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Sia f una funzione dispari dimostrare che

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

per ogni $a \in \mathbb{D}$. Quanto vale l'area della parte di piano compresa fra la curva e l'asse delle ascisse nella striscia di piano delimitata dalle rette $x = -a$ e $x = a$?

Sia f una funzione pari dimostrare che

$$\int_a^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

per ogni $a \in \mathbb{D}$. Quanto vale l'area della parte di piano compresa fra la curva e l'asse delle ascisse nella striscia di piano delimitata dalle rette $x = -a$ e $x = a$?

41.3 Ricerca del resto nella formula di Taylor con l'uso degli integrali

41.3.1 Un primo passo

Consideriamo la seguente identità algebrica:

$$1 - u^n = (1 - u) (1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})$$

nell'ipotesi $u \neq 1$, con semplici passaggi, si può scrivere:

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1 - u}$$

integrando da 0 a x , entrambi i membri, si ottiene

$$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{u^n}{1 - u} du$$

cioè:

$$-\log(1 - x) = T_n(x) + \underbrace{\int_0^x \frac{u^n}{1 - u} du}_{E_n(x)}$$

Dove $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n ed $E_n(x)$ l'errore.

41.3.2 Formula generale

Sia $f(x)$ una funzione che ammette derivata seconda in un opportuno intorno $U \in \mathcal{I}_a$. Possiamo approssimare la funzione in un $x \in U$ utilizzando la tangente in a , la cui equazione è:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Pertanto possiamo dire che esiste un $E_1(x)$ tale che:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E_1(x)$$

$E_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$, si può osservare, con un po' di furbizia, che il secondo membro può essere scritto:

$$E_1(x) = \int_a^x f(u)du - f'(a) \int_a^x du = \int_a^x (f'(u) - f'(a)) du$$

Eseguiamo i seguenti cambi di variabile: $z = f'(u) - f'(a)$ e $y = u - x$, che comportano: $\frac{dz}{du} = f''(u)$ e $dy = du$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \int_{u=a}^{u=x} z dy = \text{parti} = \underbrace{zy}_{=0} \Big|_{u=a}^{u=x} - \int_{u=a}^{u=x} y z' dy \\ &= \int_a^x (x - u) f''(u) du \end{aligned} \quad (41.1)$$

Teorema 113 (Formula di Taylor con resto integrale). Sia f una funzione derivabile con continuità $n + 1$ volte in un opportuno intorno $U \in \mathcal{I}_a$. Allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{E_n(x)} \quad (41.2)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione, $n = 1$ verificato (41.1). Supponiamo vera per n (ipotesi induttiva) e dimostriamo il caso $n + 1$.

Scriviamo la formula di Taylor nel caso n e nel caso $n + 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{E_n(x)} \\ f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1} + E_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Sottraiamo membro a membro, la seconda equazione dalla prima:

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

applicando l'ipotesi induttiva si ha:

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

si può osservare che $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ può essere scritto come: $\int_a^x (x-t)^n dt$ e quindi:

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)) dt \end{aligned} \quad (41.3)$$

utilizzando la tecnica sviluppata nel caso $n=1$ (41.1) si procede ai seguenti cambi di variabile:

$z = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)$ e $y = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ da cui si ricava, $\frac{dz}{dt} = f^{(n+2)}(t)$ e $dy = (x-t)^n dt$

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_{t=a}^{t=x} z dy = \text{parti} = \frac{1}{n!} \underbrace{zy}_{=0} \Big|_{t=a}^{t=x} - \frac{1}{n!} \int_{t=a}^{t=x} y z' dy \\ &= -\frac{1}{n!} \int_a^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right) f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

che è la tesi. □

41.3.3 Stima di $E_n(x)$

Sia $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \forall t \in [a, x]$ moltiplichiamo tutto per $\frac{(x-t)^n}{n!}$ che è, per la scelta fatta $t \in [a, x]$, positivo $m \frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq \frac{(x-t)^n}{n!} M$

Integrando da a ad x si ha:

$$\frac{m}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \leq \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{E_n(x)} \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt$$

Ora possiamo con un po' di astuzia calcolare

$$\int_a^x (x-t)^n dt \stackrel{u=x-t \quad du=-dt}{=} - \int_{x-a}^0 u^n du = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

e quindi:

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Applicazione

Problema 42. Cerchiamo di stimare $\sqrt[10]{e}$, sia $a = 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

nel caso in esame diventa:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

dato che $f^{(n+1)}(x) = e^x$ che è una funzione monotona si ha che $m = 1$ e $M = \sqrt[10]{e} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < \frac{17}{10}$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \leq E_n\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{17}{10(n+1)!} \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$$

con opportuni calcoli, restituisce:

n	stima di $\sqrt[10]{e}$	massimo E_n
1	1.10	0.01
2	1.1050	$3 \cdot 10^{-4}$
3	1.10516	$7 \cdot 10^{-6}$
4	1.1051708	$1 \cdot 10^{-7}$
5	1.105109166	$2 \cdot 10^{-9}$

Come si può osservare la stima calcolata è la medesima di 31.

41.4 Con Python

```
[1]: from sympy import *
init_printing()
```

41.4.1 Integrali

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{5x-8}{x^2-8\sqrt{x}} dx \quad \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$$

Soluzione con sympy

```
[2]: x,y,A,B,C = symbols('x,y,A,B,C')
```

```
[3]: I1 = integrate((5*x-8)/(x**2-8*sqrt(x)),x)
I2 = integrate(x/(cos(x))**2,x)
simplify(I1)
```

[3]:

$$2 \log(\sqrt{x} - 2) + 4 \log(2\sqrt{x} + x + 4) + \frac{4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{x}+1)}{3}\right)}{3}$$

[4]: `simplify(I2)`

[4]:

$$\frac{-2x \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \log\left(\frac{2}{\cos(x)+1}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{\cos(x)+1}\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} +$$

$$- \frac{\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$$

E se non ho sympy?

Quando è presente una $\sqrt{x}$ non facilmente integrabile è meglio applicare sostituzione: $y = \sqrt{x}$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad dx = 2y dy$$

$$\int \frac{5x - 8}{x^2 - 8\sqrt{x}} dx = \int \frac{5y^2 - 8}{y^4 - 8y} 2y dy = \int \frac{5y^2 - 8}{y^3 - 8} 2dy$$

Ricordiamoci che: $y^3 - 2^3 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

[5]: `factor(y**3-8)`

[5]:

$$(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$$

Usiamo, con buon senso, A, B

$$\frac{5y^2 - 8}{y^3 - 8} = \frac{Ay + B}{y^2 + 2y + 4} + \frac{C}{y - 2}$$

[6]: `Eq1 = Eq((A*y+B)*(y-2)+C*(y**2+2*y+4), 5*y**2-8)`
`solve(Eq1, (A,B,C))`

[6]:

$$\{A : 4, B : 6, C : 1\}$$

Otteniamo quindi:

$$2 \left(\int \frac{4y + 6}{y^2 + 2y + 4} dy + \int \frac{1}{y - 2} dy \right)$$

$$2 \int \frac{1}{y - 2} dy = 2 \log |y - 2|$$

$$4 \int \frac{2y + 2 + 4}{y^2 + 2y + 4} dy = 4 \left(\int \frac{2y + 2}{y^2 + 2y + 4} dy + \int \frac{4}{y^2 + 2y + 4} dy \right)$$

$$\int \frac{4}{y^2 + 2y + 4} dy = \int \frac{4}{y^2 + 2y + 1 + 3} dy = \int \frac{4}{\left(\frac{y+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy$$

Che ci permette di ricavare la soluzione proposta da sympy:

```
[7]: t = symbols('t')
I3 = 2*(integrate(1/(t-2),t) + integrate((4*t+6)/(t**2+2*t+4),t))
simplify(I3.subs(t,sqrt(x)))
```

[7]:

$$2 \log(\sqrt{x} - 2) + 4 \log(2\sqrt{x} + x + 4) + \frac{4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{x}+1)}{3}\right)}{3}$$

Il secondo integrale, vista la soluzione sembra proprio brutto, ma ...

se applichiamo parti, ricordando che: $D(\operatorname{tg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx &= x \operatorname{tg}(x) - \int \operatorname{tg}(x) dx \\ &= x \operatorname{tg}(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= x \operatorname{tg}(x) + \int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} \\ &= x \operatorname{tg}(x) + \log |\cos(x)| \end{aligned}$$

Questa soluzione ci pare troppo facile rispetto a questa

```
[8]: simplify(I2)
```

[8]:

$$\begin{aligned} &\frac{-2x \tan\left(\frac{x}{2}\right) - \log\left(\frac{2}{\cos(x)+1}\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{\cos(x)+1}\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} + \\ &- \frac{\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} \end{aligned}$$

ma è corretta, infatti:

```
[9]: simplify(diff(x*tan(x)+log(cos(x)),x,1))
```

[9]: $\frac{x}{\cos^2(x)}$

Come ha ricavato sympy la soluzione "bruttina"?

Capitolo 42

*Lunghezza di un arco di curva

42.1 Un po' di teoria ... alla mano

Sia f una funzione continua e derivabile su di un intervallo $[a, b]$, consideriamo in un punto x un incremento dx e il corrispondente incremento $d(f(x)) = dy$. Come si può osservare dalle figure

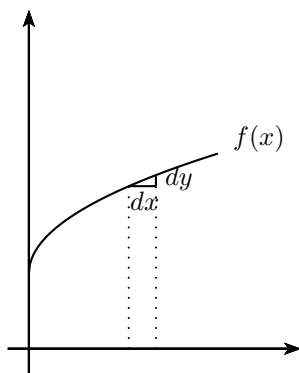


Figura 42.1: Gli incrementi dx e dy

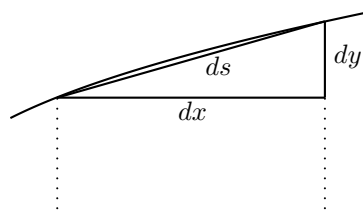


Figura 42.2: Gli incrementi dx e dy in dettaglio

42.1 e 42.2 è possibile applicando il teorema di Pitagora scrivere $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, pertanto la lunghezza della curva si ottiene "sommando" i ds , cioè $\int_a^b ds = s$, utilizzando quanto scritto in precedenza si può, con qualche raccoglimento, giungere alla:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (42.1)$$

42.2 Esempi

42.2.1 Lunghezza della circonferenza di raggio R

$$4 \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = 2\pi$$

Svolgere i calcoli

42.2.2 Lunghezza dell'asteroide

L'asteroide è una curva di equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
 Esplicitiamo l'equazione nella forma: $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

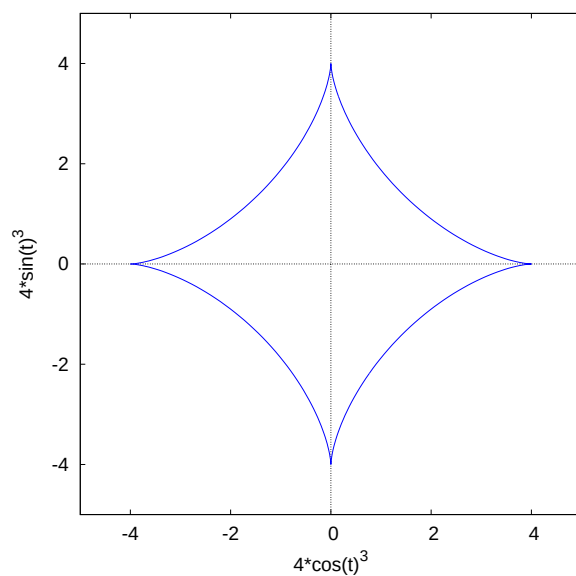


Figura 42.3: L'asteroide

Deriviamo: $y' = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$ semplificando si ottiene:

$$y' = -\frac{\left(\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

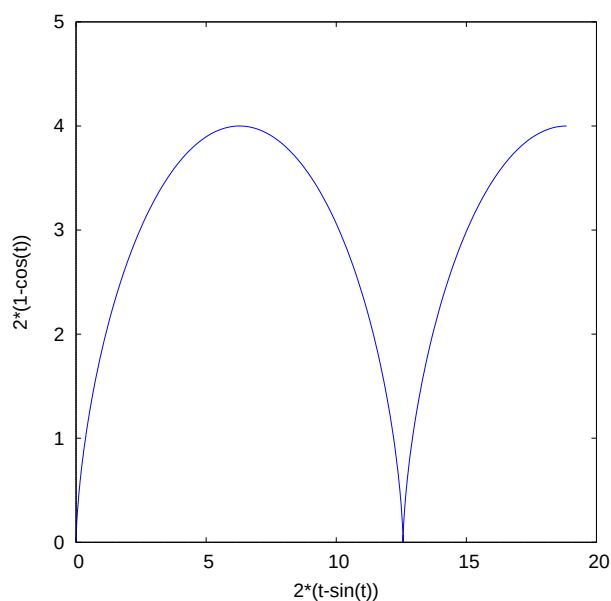
pertanto la lunghezza della curva è data da:

$$4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 6a$$

42.2.3 Lunghezza di un arco di cicloide

La cicloide ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$


 Figura 42.4: La cicloide $R = 2 \omega = 1$

L'espressione $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ che ci ha permesso di arrivare alla formula 42.1 può essere così modificata: $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ ottenendo:

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (42.2)$$

che applicata alla cicloide ci permette di calcolarne la lunghezza:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos(t))^2 + R^2 \sin^2(t)} dt = 8R$$

sviluppare i calcoli

- a) calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = \log(x)$ fra $\sqrt{3}$ e 8
- b) calcolare la lunghezza della curva di equazione $9ay^2 = x(x - 3a)^2$
- c) calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x = R(2 \cos(t) - \cos(2t)) \\ y = R(2 \sin(t) - \sin(2t)) \end{cases}$$

42.2.4 Lunghezza di una curva data in coordinate polari

Se la curva è data dall'equazione $r = f(\phi)$ in coordinate polari r e ϕ allora ricordando che:

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \end{cases}$$

calcolando dx e dy , si ricava che la lunghezza dell'arco è:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\phi \quad (42.3)$$

Lunghezza della cardiode

La curva ha equazione: $r = a \sin^3\left(\frac{\phi}{3}\right)$ Calcoliamo $r' = a \sin^2\left(\frac{\phi}{3}\right) \cos\left(\frac{\phi}{3}\right)$ applicando la

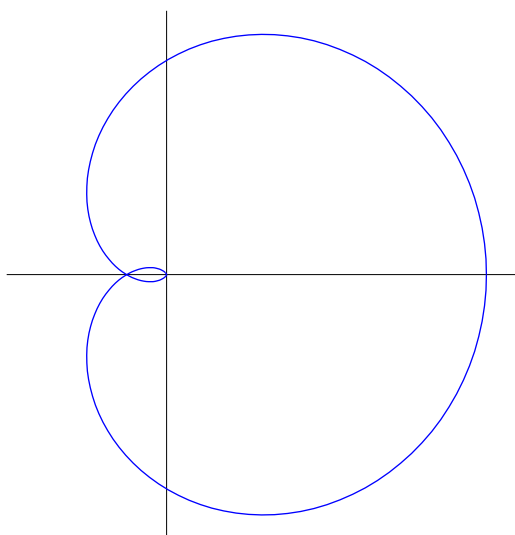


Figura 42.5: La cardiode

formula 42.3 si ottiene $\frac{3}{2}\pi a$

svolgere con cura i calcoli

Calcolare la lunghezza dell'arco di spirale logaritmica di equazione:

$$r = ae^{m\phi}$$

Capitolo 43

Il volume dei solidi

Nello spazio è sempre possibile fissare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) in modo che ogni suo punto P può essere individuato da una terna ordinata di numeri reali (x, y, z) . Si costruisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio e l'insieme $\mathbb{R}^3$.

Come analizzato per l'area, negli insiemi piani, così anche il volume dei solidi non può essere caratterizzato dal solo fatto di essere una misura, cioè essere una funzione additiva di insieme, ma occorre aggiungere le seguenti proprietà:

- a) invarianza rispetto alle isometrie dello spazio
- b) normalizzazione (il cubetto di lato 1 ha volume 1).

Per stabilire se un sottoinsieme T dello spazio è misurabile (*cubabile*) deve essere possibile determinare $\forall \varepsilon > 0$ due cubettature $\overline{C}_k$ e $\underline{C}_k$ tali che se $\underline{C}_k \subseteq T \subseteq \overline{C}_k$ allora $m(\overline{C}_k) - m(\underline{C}_k) < \varepsilon$.

I C_k possono essere scelti, ad esempio di lato $\frac{1}{10^k}$

43.1 Ricordando il principio di Bonaventura Cavalieri

Teorema 114 (di Bonaventura Cavalieri). Sia T un solido cubabile, che supporremo contenuto fra i piani $z = 0$ e $z = h$. Ogni sezione di T con un piano parallelo al piano xy sia quadrabile.

Allora, detta $g(z)$ l'area della sezione in funzione della quota z , la funzione $g(z)$ risulta quadrabile e si ha:

$$V(T) = \int_0^h g(z) dz$$

Dimostrazione. Siano $\overline{C}_k$ e $\underline{C}_k$ le cubettature circoscritte e inscritte a T di lato 10^{-k} . Mediante i piani di quota $m10^{-k}$ tanto $\overline{C}_k$ che $\underline{C}_k$ possono essere scomposti in strati di spessore 10^{-k} . I piani di quota z tale che:

$$z_m = m10^{-k} \leq z < (m+1)10^{-k} = z_{m+1}$$

tagliano $\underline{C}_k$ secondo uno stesso quadrato, detta $\underline{c}_k$ l'area della sezione di $\underline{C}_k$, questo comporta che $\underline{c}_k$ è costante in ciascun intervallo $[z_m, z_{m+1})$.

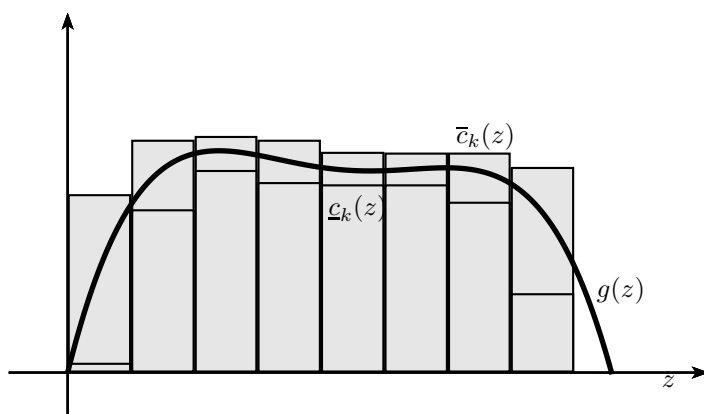


Figura 43.1: La funzione area della sezione $g(z)$ e le funzioni area delle cubettature interna $\underline{c}_k$ ed esterna $\bar{c}_k$

Analogo ragionamento per $\bar{C}_k$. Risulta, pertanto, che $\underline{c}_k \leq g(z) \leq \bar{c}_k$, perciò la funzione g è quadrabile. $\square$

Il principio di Bonaventura Cavalieri diventa quindi un corollario del precedente teorema.

43.1.1 Esempio ... interessante

Calcolare il volume del solido individuato dalla seguente disequazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Le sezioni fatte con piani paralleli al piano xy hanno come contorno ellissi di equazione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$ che possono essere scritte nella forma:

$$\frac{\frac{x^2}{a^2(c^2 - z^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^2(c^2 - z^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} = 1$$

Ricordando che l'area racchiusa da un'ellisse è πab (dove l'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), si ottiene che l'area in funzione della quota z è $g(z) = \pi \frac{ab}{c^2} (c^2 - z^2)$ per cui applicando il teorema precedente si ha che il volume dell'ellissoide è:

$$\pi \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^c (c^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi abc$$

43.2 Volume dei solidi di rotazione

Definizione 123 (Solido di rotazione). data una funzione f continua, non negativa, definita su di un intervallo $[x_0, x_1]$ e considerato il suo grafico nel piano xy , definiamo solido di rotazione di

asse x generato dal grafico di f l'insieme T dei punti dello spazio:

$$T = \{(x, y, z) : x_0 \leq x \leq x_1, y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$$

Teorema 115 (del volume di un solido di rotazione). Ogni solido di rotazione T è cubabile e si ha:

$$v(T) = \int_{x_0}^{x_1} \pi (f(x))^2 dx$$

Dimostrare per esercizio

43.3 Con Python

```
[1]: from sympy import *
      from sympy.plotting.plot import plot3d_parametric_surface
      init_printing()
      %matplotlib widget
```

43.3.1 Solidi di rotazione: una semplice parabola

```
[2]: def f(x) :
      return 1-x**2
```

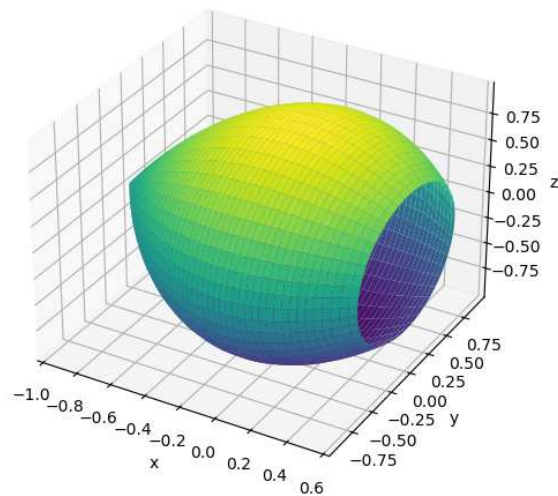
```
[3]: x = symbols('x')
      f(x)
```

```
[3]: 1 - x2
```

$$\begin{cases} asse_x = x \\ asse_y = f(x) \cos(t) \\ asse_z = f(x) \sin(t) \end{cases}$$

Per ogni valore di x viene disegnata una circonferenza di centro $(x, 0, 0)$ e raggio $f(x)$ che in questo caso è $1 - x^2$.

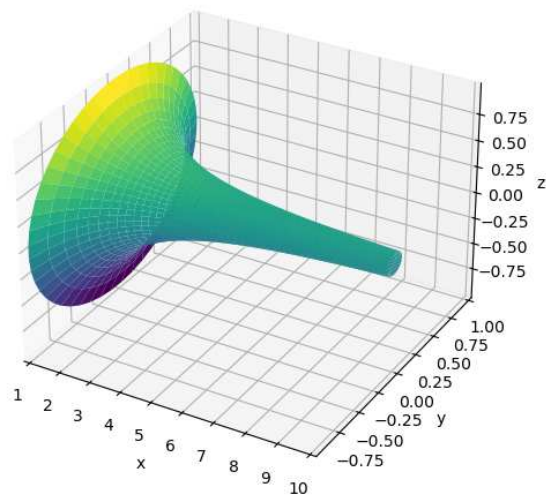
```
[4]: t = symbols('t')
      Rpar = plot3d_parametric_surface(x, f(x)*cos(t), f(x)*sin(t), (x, -1, 0.6),
      ↪ (t, 0, 2*pi), show = False)
      Rpar.show()
```



43.3.2 Solidi di rotazione: solido iperbolico acuto (E. Torricelli)

```
[5]: def f1(x) :  
      return 1/x
```

```
[6]: Rpar = plot3d_parametric_surface(x, f1(x)*cos(t), f1(x)*sin(t), (x,1,10),  
      ↪(t,0,2*pi), show = False)  
Rpar.show()
```



```
[7]: Area = integrate(f1(x),(x,1,+oo))
     Volume = integrate(pi*(f1(x)**2),(x,1,+oo))
     Area, Volume
```

```
[7]: (∞, π)
```

43.3.3 Solidi di rotazione: il toro

Consideriamo la circonferenza di equazione $x^2 + (y-a)^2 = R^2$, esplicitando rispetto a y si ottiene:

```
[8]: x,y = symbols('x,y', real = True)
     a,R = symbols('a,R', positive = True)
     solve(Eq(x**2+(y-a)**2, R**2),y)
```

```
[8]: [a - sqrt((R - x) (R + x)), a + sqrt((R - x) (R + x))]
```

facciamo ruotare, prima una (figura 43.2) e poi l'altra (figura 43.3), le due semicirconferenze attorno all'asse delle ascisse:

```
[12]: a1 = 3
     R1 = 1
     SemiC = plot3d_parametric_surface(x,
     ↪ (a1-sqrt(R1**2-x**2))*cos(t), (a1-sqrt(R1**2-x**2))*sin(t), (x,-R1,R1),
     ↪ (t,0,2*pi), \
                                     show = False, xlim = (-4,4), ylim = (-4,4))
     SemiC.show()
```

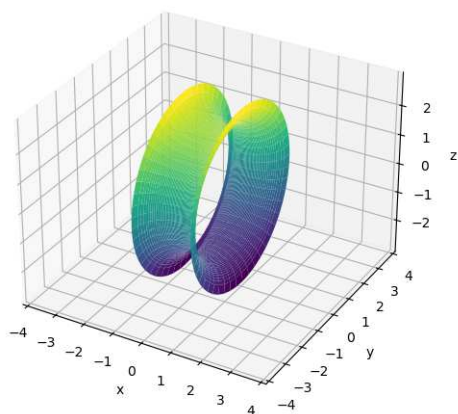


Figura 43.2: semicirconferenza con "+"

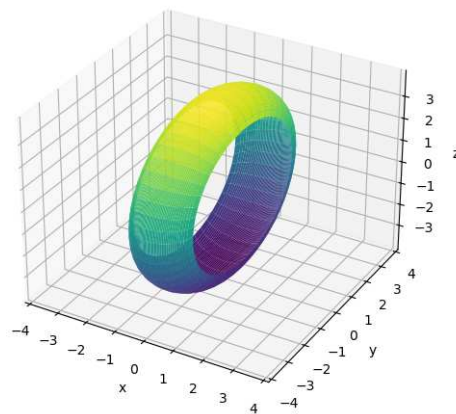
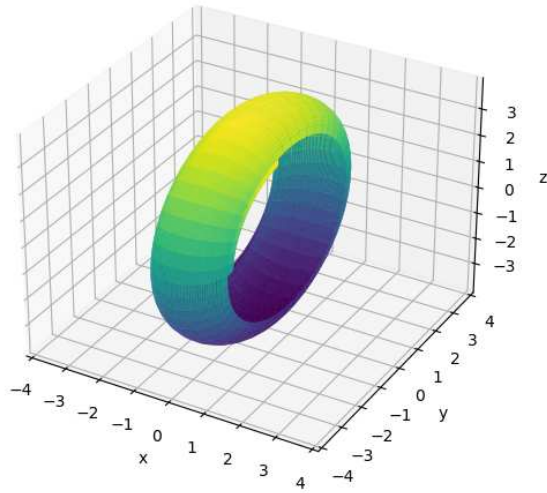


Figura 43.3: semicirconferenza con "-"

```
[10]: SemiC1 = plot3d_parametric_surface(x,
     ↪ (a1+sqrt(R1**2-x**2))*cos(t), (a1+sqrt(R1**2-x**2))*sin(t), (x,-R1,R1),
     ↪ (t,0,2*pi), \
                                     show = False, xlim = (-4,4), ylim = (-4,4))
     SemiC1.show()
```

e infine le “appiccichiamo”


```
[13]: SemiC.append(SemiC1[0])  
SemiC.show()
```



Capitolo 44

Integrale improprio

La teoria dell'integrazione sviluppata nei precedenti capitoli richiede che la funzione integranda sia continua quasi ovunque in un intervallo chiuso.

Con l'integrale di Lebesgue si ottiene una teoria pienamente soddisfacente che supera queste restrizioni. Ma, questa teoria non è parte del programma di studio del liceo, pertanto cerchiamo di superare alcune delle restrizioni introducendo la teoria degli integrali impropri.

Definizione 124 (Integrale improprio in un intervallo). Sia f una funzione continua in $[a, b)$, sia $c : a < c < b$ se esiste finito il $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx$, viene detto integrale improprio della f nell'intervallo di estremi a e b e si indica con: $\int_a^b f(x)dx$

Definizione 125 (Integrale improprio in una semiretta). Sia f una funzione continua in $[a, +\infty)$, sia $c > a$ se esiste finito il $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$, viene detto integrale improprio della f nella semiretta di estremo a e si indica con: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

44.1 Alcuni esempi

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^2} dx \Leftarrow \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c \frac{1}{(b-x)^2} dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \frac{1}{(b-x)} \Big|_a^c = \frac{1}{b-a}$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \Leftarrow \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \arctg(x) \Big|_0^c = \frac{\pi}{2}$$

44.1.1 Osservazione

Sia f la funzione definita su $[1, +\infty)$ tale che $f(x) = \frac{1}{x}$ figura 44.1 Il suo integrale improprio non esiste infatti:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \log(x) \Big|_1^c = +\infty$$

però il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno l'asse delle ascisse della parte di piano contenuta fra f e l'asse delle ascisse (parte colorata in figura 44.1) ammette integrale improprio.

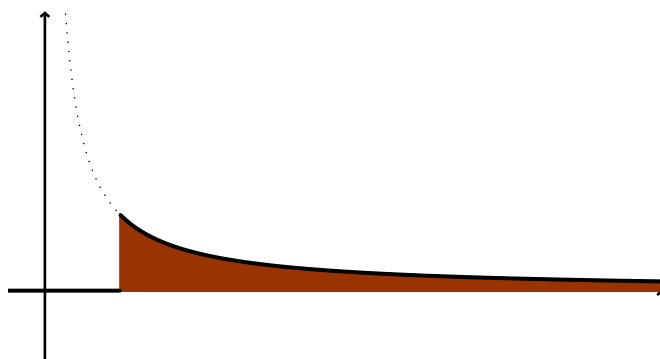


Figura 44.1: La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$

verificare con cura

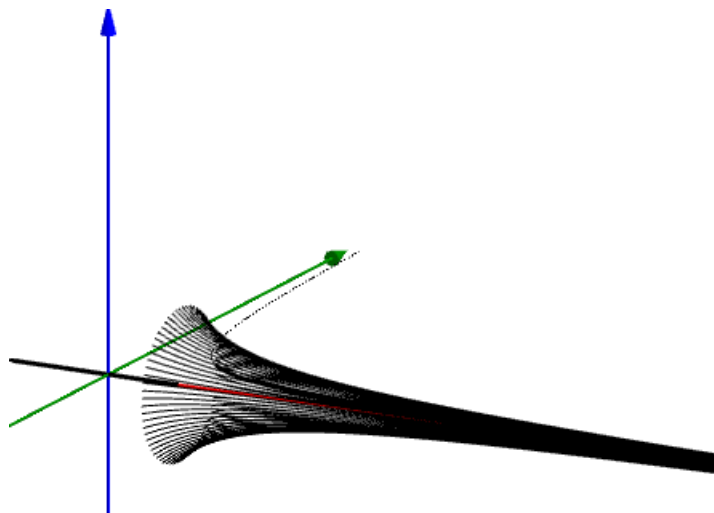


Figura 44.2: Il solido di rotazione del sottografico di $f(x)$

Capitolo 45

Le serie

Definizione 126 (Serie). Sia a_n una successione reale, costruiamo la successione delle somme parziali:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$\{s_n\}$ è definita serie, ed è indicata con uno dei seguenti simboli:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Se esiste un numero reale S tale che $\lim s_n = S$ S è la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ che è detta convergente.

Se $\{s_n\}$ diverge diremo che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge o non possiede somma finita.

45.1 Proprietà delle serie convergenti

45.1.1 Linearità

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

45.1.2 Serie telescopiche

Se gli elementi di una successione a_n si possono esprimere come una differenza nella forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, la serie costruita con gli a_n è detta telescopica. Il comportamento di queste serie è caratterizzato dal seguente teorema:

Teorema 116 (convergenza delle serie telescopiche). Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali, tali che $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n - b_{n+1}$.

Allora la serie $\sum a_n$ converge se e solo se la successione $\{b_n\}$ converge, e la somma di $\sum a_n$ vale $b_1 - L$, dove $L = \lim b_n$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Utilizzando la notazione del teorema precedente si ha: $b_n = \frac{1}{n}$ e quindi $\lim b_n = 0$ e pertanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

45.2 La serie geometrica

La proprietà telescopica può essere utilizzata per studiare una serie molto importante, la serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si può osservare che detta s_n la somma parziale ennesima si può scrivere:

$$\begin{aligned} (1-x)s_n &= (1-x) \sum_{n=0}^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^n x^n - \sum_{n=0}^n x^{n+1} = \\ &= 1 - x^n \end{aligned}$$

da cui $s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$, il comportamento della serie dipende dalla successione $\frac{x^n}{1-x}$ che converge se $0 < x < 1$ e diverge per $x \geq 1$.

Nell'ipotesi $0 < x < 1$ a partire dalla serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (45.1)$$

è possibile costruire altre interessanti serie:
sostituendo nella 45.1 a x x^2 si ottiene:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2} \quad (45.2)$$

moltiplicando 45.2 per x si ottiene:

$$x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}$$

sostituendo in 45.1 a x $-x$ si ottiene:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x} \quad (45.3)$$

sostituendo in 45.3 a x x^2 si ottiene:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2} \quad (45.4)$$

moltiplicando in 45.4 per x si ottiene:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1+x^2} \quad (45.5)$$

integrando la 45.3 si ottiene:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots = \log(1+x) \quad (45.6)$$

scoperta di Mercatore¹ e Brouncker² (1668), integrando, invece, la 45.4 si ottiene:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \operatorname{arctg}(x) \quad (45.7)$$

La 45.7 nota come serie di Gregory³

45.3 La rappresentazione decimale dei numeri reali

Sia X un numero reale, si può sempre scrivere come un numero $-10 < x < 10$ moltiplicato per una opportuna potenza di 10. Pertanto il numero x individua la successione delle sue cifre $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, e sussistono le seguenti disuguaglianze:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

Detta $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}$ si ha sottraendo s_n dalle disuguaglianze precedenti $0 \leq x - s_n < 10^{-n}$, che mostra che $s_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty$:

$$x = s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

45.3.1 Osservazione

Se un numero decimale termina con infiniti zeri, ad esempio $\frac{1}{32} = 0.031250000\dots$ può essere scritto come $0.031249999\dots$

dimostrare con cura

45.4 Criteri di convergenza

Si possono avere criteri di convergenza di tre tipi: (indichiamo con C la condizione)

I) condizioni sufficienti: "se C è soddisfatta allora $\sum a_n$ converge"

¹Nicolaus Mercator: nato nel 1620 a Eutin attuale Germania, morto a Parigi nel 1687, opere principali: Trigonometria sphaericorum logarithmica, Cosmographia, e Astronomica sphaerica

²William Brouncker nato in Irlanda nel 1620 morto a Londra nel 1684, lavorò sulle frazioni continue ottenendo, fra altri risultati, la frazione continua di $\frac{4}{\pi}$

³James Gregory: nato nel 1638 a Drumoak (vicino Aberdeen in Scozia, morto nel 1675 a Edinburgo. Utilizzò le serie infinite per calcolare l'area del cerchio e dell'iperbole (l'area fra l'iperbole e l'asse delle ascisse)

II) condizioni necessarie: "se $\sum a_n$ converge allora C è soddisfatta"

III) condizioni necessarie e sufficienti: " $\sum a_n$ converge se e solo se C è soddisfatta"

Teorema 117 (condizione necessaria per la convergenza di una serie). Se la serie $\sum a_n$ converge allora $\lim a_n = 0$

Questa è condizione necessaria, che può essere dimostrata osservando che $a_n = s_n - s_{n-1}$

completare con cura la dimostrazione

45.4.1 Serie a termini non negativi

Nel seguito si fa l'ipotesi che $a_j \geq 0 \forall j \in \mathbb{N}$

Teorema 118 (condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie). La serie $\sum a_n$ converge se e solo se la successione delle somme parziali è superiormente limitata.

dimostrare con cura

Teorema 119 (convergenza di una serie dominata da una serie convergente). Date due successioni (a termini non negativi) tali che esiste una costante c positiva per cui: $a_n \leq cb_n$ per tutti gli n allora: se $\sum b_n$ anche $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione. Sia s_n la somma parziale ottenuta con gli a_n e t_n quella dei b_n , l'ipotesi implica che $s_n \leq ct_n$. Se $\sum b_n$ converge allora le sue somme parziali sono superiormente limitate, quindi detto M un maggiorante si ha $s_n \leq cM$ e quindi anche le s_n sono superiormente limitate, pertanto $\sum a_n$ converge. $\square$

Il teorema precedente rimane vero anche se la successione a_n è dominata da b_n da un certo N in poi.

Confronto con un integrale

Teorema 120 (convergenza di una serie dominata da un'integrale). Sia f una funzione positiva non crescente, definita per $x \geq 1$. Sia:

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad e \quad t_n = \int_1^n f(x) dx$$

Allora le due successioni $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ o convergono entrambe o divergono entrambe

Esempi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge se e solo se $s > 1$ infatti:

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^s} = \begin{cases} \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} & s \neq 1 \\ \log n & s = 1 \end{cases}$$

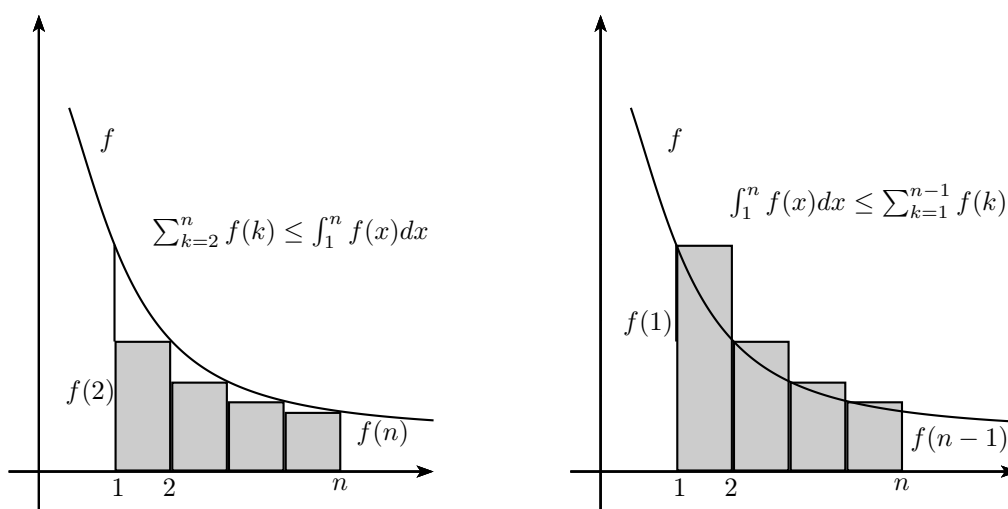


Figura 45.1: Criterio di confronto con un integrale

Per $s > 1$ si ha convergenza per $s = 1$ si ha la serie armonica che diverge, così pure nei casi $0 < s < 1$.

La funzione $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ è nota come ζ di Riemann.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ converge se e solo se $s > 1$ infatti:

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s} = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & s = 1 \end{cases}$$

Per $s > 1$ si ha convergenza per $s = 1$ altrimenti diverge.

Criterio della radice e del rapporto

Teorema 121 (Criterio della radice). Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi, tale che: $a_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow R$ per $n \rightarrow +\infty$ allora:

- a) se $R < 1$, la serie converge
- b) se $R > 1$, la serie diverge
- c) se $R = 1$, il criterio non consente una conclusione

Dimostrazione. Sia: $0 \leq a_n < x^n$, da cui $0 \leq a_n^{\frac{1}{n}} < x$ □

In modo analogo si dimostra il seguente:

Teorema 122 (Criterio del rapporto). Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi, tale che: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow R$ per $n \rightarrow +\infty$ allora:

- a) se $R < 1$, la serie converge
- b) se $R > 1$, la serie diverge
- c) se $R = 1$, il criterio non consente una conclusione

45.4.2 Esercizio ... interessante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n!}}}$$

$\log(n!) = \sum_{k=2}^n \log(k) \geq \int_1^n \log(x) dx$ Sviluppando i calcoli si ottiene:

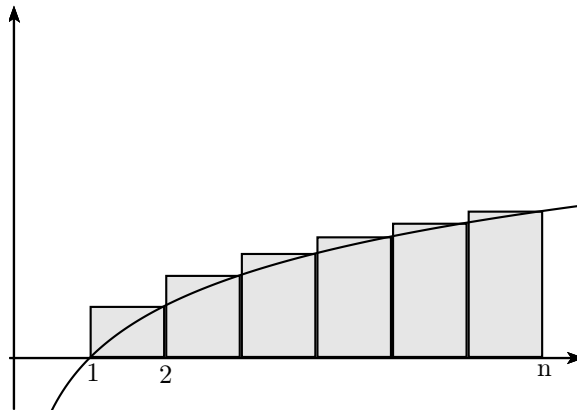


Figura 45.2: $\sum_{k=2}^n \log(k) \geq \int_1^n \log(x) dx$

$$\log(n!) \geq n \log(n) - n + 1 \geq n \log(n) - n \quad \Rightarrow \quad n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pertanto

$$\frac{1}{n^{\sqrt[n]{n!}}} \leq \frac{e}{n^2}$$

Quindi la serie converge.

Capitolo 46

Calcolo numerico degli integrali definiti

Spesso di molte funzioni integrabili non si conosce una funzione primitiva esprimibile con funzioni elementari (per esempio, $f(x) = e^{\cos x}$, $f(x) = x^x$); in molti casi, funzioni semplici hanno funzioni primitive tanto complicate per cui le formule approssimate sono più facilmente calcolabili di quelle esatte e con maggiore precisione (ad esempio una primitiva della funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

$$\text{è } F(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{2} \log \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right)$$

Ci proponiamo di stimare con un errore prefissato

$$I = \int_a^b f(t) dt \tag{46.1}$$

dove f è ovviamente una funzione uniformemente continua in $[a, b]$

46.1 Il metodo dei rettangoli

Fissato un intero n sia:

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Scegliamo come approssimazione di 46.1 $S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$

Dimostriamo che l'errore che si commette è $\leq \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$

Per la dimostrazione ci servono alcuni risultati preliminari, sia $g(x)$ una funzione derivabile con continuità nell'intervallo $[0, \delta]$ tale che $g(0) = 0$, allora:

$$\int_0^\delta g(t) dt = \int_0^\delta (\delta - t) g'(t) dt \tag{46.2}$$

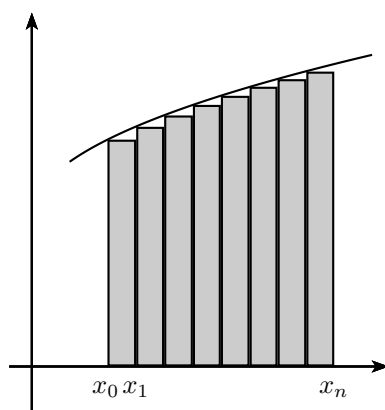


Figura 46.1: Il metodo dei rettangoli

infatti integrando per parti, $\int_0^\delta (\delta - t)g'(t)dt = \underbrace{(\delta - t)g(t)|_0^\delta}_{=0} + \int_0^\delta g(t)dt = \int_0^\delta g(t)dt$.

Procediamo ora con il calcolo dell'errore: definiamo

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \quad \delta = \frac{b-a}{n}$$

L'errore in un intervallo di ampiezza δ è dato da $|I_k - \delta f(x_{k-1})|$, che può essere scritto, considerando che $\delta f(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})dx$, come:

$$|I_k - \delta f(x_{k-1})| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_{k-1})) dx \right|$$

ed anche applicando il cambio di variabile $x = x_{k-1} + t$ si ottiene:

$$|I_k - \delta f(x_{k-1})| = \left| \int_0^\delta (f(x_{k-1} + t) - f(x_{k-1})) dt \right|$$

utilizzando la 46.2 con $g(t) = f(x_{k-1} + t) - f(x_{k-1})$ si ottiene:

$$|I_k - \delta f(x_{k-1})| \leq \frac{M_1}{2} \delta^2$$

Ora sommando gli errori su tutti gli intervalli si ottiene:

$$\left| I - \delta \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right| \leq \frac{M_1}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$$

46.1.1 Esempio: calcolo di $\log(2)$

$I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, dato che $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ si può scegliere $M_1 = 1$, pertanto l'errore è dell'ordine di $\frac{1}{2n}$, quindi per ottenere il valore del $\log(2)$ con un errore minore 10^{-1} devo usare almeno $n = 5$,

infatti:

$$S_5 = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k-1}{5}} = \frac{1879}{2510} \simeq 0.746$$

$$|\log(2) - S_5| \simeq 0.052.$$

46.2 Il metodo delle tangenti

Il metodo dei rettangoli, come si desume dall'esempio, è piuttosto grossolano, per funzioni *abbastanza regolari* si può osservare che la tangente alla curva nel punto medio permette di costruire su ogni intervallino un trapezio, che meglio approssima il sottografico della funzione (Figura 46.2) Inoltre per evidenti proprietà geometriche l'area del trapezio è equivalente a quella del

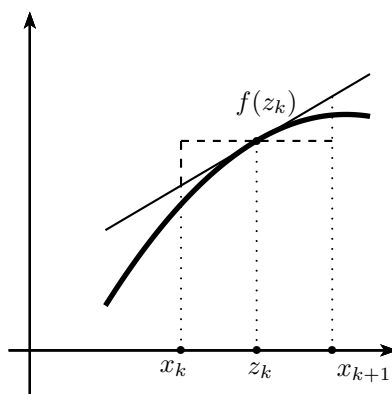


Figura 46.2: Il metodo dei trapezi

rettangolo di altezza $f(z_k)$. Con calcoli simili⁽¹⁾ a quelli sviluppati per il metodo dei rettangoli si può ottenere che l'errore che si commette utilizzando il metodo dei trapezi vale:

$$|I - S'_n| \leq \frac{M_2}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

dove $|f''(x)| \leq M_2$ e $S'_n = \frac{b-a}{n} (f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n))$

46.2.1 Esempio: calcolo di $\log(2)$

$M_2 = 2$, quindi $\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{10^2}$, prendiamo $n = 4$, si ottiene:

$$S'_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{1 + \frac{k-1}{4} + 1 + \frac{k}{4}} = \frac{4448}{6435} \simeq 0.6912$$

¹Si utilizza la seguente uguaglianza

$$\int_{-\delta}^{+\delta} g(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} (x-\delta)^2 (g''(x) + g''(-x)) dx$$

con $g \in C^2$

$$|\log(2) - S'_5| \simeq 0.0012.$$

46.3 Il metodo di Cavalieri Simpson

Il metodo delle tangenti visto in precedenza si può riassumere osservata che in ogni subintervallo la funzione viene approssimata con la tangente nel punto medio, cioè con un polinomio di primo grado di cui si calcola poi l'integrale; è possibile procedere con approssimazioni migliori utilizzando polinomi di grado via via maggiore. Il metodo di Cavalieri Simpson ² utilizza come polinomio approssimante quello di grado che assume gli stessi valori della funzione negli estremi e nel punto medio. Con questo metodo l'errore è stimato in

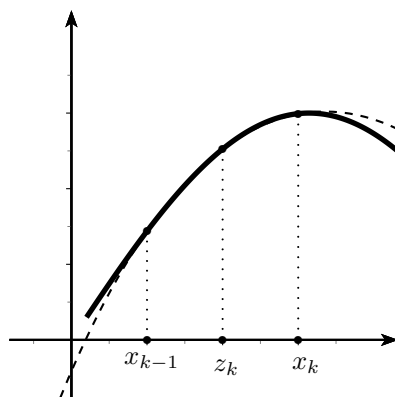


Figura 46.3: Il metodo di Cavalieri Simpson

$$|I - S_n^*| \leq \frac{M_4}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

$$\text{dove } |f^{(4)}(x)| \leq M_4 \text{ e } S_n^* = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + 4f(z_k) + f(x_k)}{6}$$

46.3.1 Esempio: calcolo di $\log(2)$

Stima dell'errore $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ quindi $M_4 = 24$, da cui si ottiene per l'errore una stima data da:

$\frac{1}{120n^4}$ se prendiamo $n = 2$ si ha:

$$S^* = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2}}{6} \simeq 0.6932$$

$$|\log(2) - S_2^*| \simeq 1.07 \cdot 10^{-4}.$$

²Thomas Simpson, nato il 20 agosto 1710 a Market Bosworth, Leicestershire, Inghilterra; morto il 14 maggio 1761 nella stessa località di nascita

Partendo dalla relazione

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

si stimi π a meno di 10^{-3}

46.4 Approfondimento

Negli ultimi due metodi presentati, si osserva come l'approssimazione dell'integrale venga ottenuta, approssimando la funzione con opportuni polinomi, questa tecnica costituisce la base costruttiva di molte formule:

46.4.1 Le formule di quadratura

Tratto da Stoer 1974

Data una funzione continua $f(x)$ definita su di un intervallo $[a, b]$, le formule di quadratura si utilizzano per risolvere il problema del calcolo dell'integrale definito

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad S_{n+1} = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

dove gli $n+1$ punti distinti $x_i \in [a, b]$ per $i = 0, 1, \dots, n$ sono i nodi della formula e gli $n+1$ valori w_i per $i = 0, 1, \dots, n$ sono i pesi della formula.

Una formula di quadratura interpolatoria si costruisce sostituendo alla $f(x)$ il suo polinomio di interpolazione $p_n(x)$ sugli $n+1$ nodi x_i

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

dove

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e pertanto si ottiene:

$$S_{n+1} = \int_a^b p_n(x) dx \quad w_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

Formule di Newton-Cotes

Sono formule costruite con nodi equidistanti; in questo caso è possibile scrivere le formule di quadratura nella forma

$$S_{n+1} = h \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

dove i pesi α_i sono dati da

$$\alpha_i = \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{t - k}{i - k} dt$$

e dipendono solo dagli indici i ed n e non anche dall'intervallo di integrazione. In questo modo è possibile tabulare i pesi e ricavare tutte le formule di quadratura di Newton-Cotes.

n	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	nome
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Regola dei Trapezi
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$			Regola di Simpson
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$		Regola dei $\frac{3}{8}$ "pulcherrima"
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	Formula di Milne

Resto della formula di quadratura

Permette di valutare la bontà dell'approssimazione fornita da una formula di quadratura

$$r_{n+1} = I - S_{n+1}$$

in particolare per le formule di Newton-Cotes è possibile dare una espressione piuttosto semplice per il resto, nel caso di funzioni derivabili $n + 2$ volte:

i) se n è pari, esiste un punto $c \in [a, b]$ per cui:

$$r_{n+1} = \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!} \int_a^b x \pi_n(x) dx$$

ii) se n è dispari, esiste un punto $c \in [a, b]$ per cui:

$$r_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \int_a^b \pi_n(x) dx$$

dove $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ svolgendo i calcoli si ottiene:

n	nome	resto
1	Regola dei Trapezi	$\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(c)$
2	Regola di Simpson	$\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(c)$
3	Regola dei $\frac{3}{8}$ "pulcherrima"	$\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(c)$
4	Formula di Milne	$\frac{8}{945} h^7 f^{(6)}(c)$

Capitolo 47

Le equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono particolari equazioni in cui le *incognite* son funzioni, e nell'equazione troviamo la funzione e le derivate della funzione. Si definisce **ordine** dell'equazione differenziale il massimo ordine di derivata presente nell'equazione.

47.1 Equazioni differenziali del primo ordine

Si dice equazione differenziale lineare del primo ordine un'equazione del tipo:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (47.1)$$

dove P e Q sono funzioni note. Ci proponiamo di risolvere l'equazione 47.1, procediamo per gradi.

47.1.1 Soluzione dell'equazione omogenea

Supponiamo $Q(x) = 0$, l'equazione 47.1 diventa:

$$y' + P(x)y = 0 \quad (47.2)$$

Se y non è mai nulla nell'insieme in cui si ricerca la soluzione allora si può scrivere:

$$\frac{y'}{y} = -P(x) \quad (47.3)$$

è facile osservare che $\frac{y'}{y}$ è la derivata di $\log(y)$ dunque la 47.3 può venir scritta: $(\log(y))' = -P(x)$ da cui $\log(y) = -\int P(x)dx + C$, cioè:

$$y = e^{-A(x)} \quad \text{dove} \quad A(x) = \int P(x)dx + C \quad (47.4)$$

Dimostriamo che questo insieme di soluzioni sono tutte le soluzioni:

Teorema 123 (il problema di Cauchy primo ordine). Sia P una funzione continua sull'intervallo aperto I . Siano dati $a \in I$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora esiste una e una sola funzione $y = f(x)$ soddisfacente a:

$$\begin{cases} y' + P(x)y = 0 \\ y(a) = b \end{cases} \quad (47.5)$$

La 47.5 è detta problema di Cauchy e

$$f(x) = be^{-A(x)} \quad \text{dove} \quad A(x) = \int_a^x P(x)dx \quad (47.6)$$

Dimostrazione. Sia f la funzione definita da 47.6. Essendo $A(a) = 0$ si ha che $f(a) = b$, sostituendo nella $y' + P(x)y = 0$ $y = f(x)$ si ottiene un'identità. (facile esercizio!) Dimostriamo l'unicità. Sia g una generica soluzione, dobbiamo dimostrare che $g(x) = be^{-A(x)}$ o $g(x)e^{A(x)} = b$. È "naturale" introdurre la funzione $h(x) = g(x)e^{A(x)}$, calcoliamone la derivata:

$$h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + g(x)A'(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}(g'(x) + P(x)g(x)) \quad (47.7)$$

Poiché g soddisfa la 47.6 avremo che $g'(x) + P(x)g(x) = 0$ su tutto I e dunque $h'(x) = 0$ $\forall x \in I$, questo significa che h è costante su I , quindi $h(x) = h(a) = b$ e $g(x)e^{A(x)} = b$ cioè $g(x) = be^{-A(x)}$ $\square$

47.1.2 Soluzione dell'equazione non omogenea

Sia $y' + P(x)y = Q(x)$, trasformiamo il primo membro dell'uguaglianza nella derivata di un prodotto, moltiplicando tutta l'equazione per una funzione del tipo $e^{A(x)}$, si ottiene $y'e^{A(x)} + P(x)ye^{A(x)} = Q(x)e^{A(x)}$ il primo membro è la derivata di $ye^{A(x)}$ se $A(x)$ è una primitiva di $P(x)$, pertanto si ottiene: $(ye^{A(x)})' = Q(x)$ che integrando conduce alla soluzione costituita dall'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale.

Esempio

Determinare su $(0, +\infty)$ tutte le soluzioni dell'equazione:

$$xy' + (1-x)y = e^{2x}$$

soluzione. dato che $x \neq 0$ si ha $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = \frac{e^{2x}}{x}$, devo ora cercare una funzione del tipo $A(x)$ la cui derivata sia $\frac{1}{x} - 1$, ad esempio $A(x) = \log(x) - x$, quindi $e^{A(x)} = xe^{-x}$, moltiplicando nell'equazione differenziale si ottiene: $y'xe^{-x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right)xe^{-x}y = \frac{e^{2x}}{x}xe^{-x}$, che può essere scritto: $(yxe^{-x})' = e^x$, integrando e semplificando si ottiene: $y = \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}$ $\square$

47.2 Equazioni differenziali del secondo ordine

Tratteremo solo il caso "a coefficienti costanti", cioè:

$$y'' + by' + cy = R(x) \quad (47.8)$$

in cui $b, c \in \mathbb{R}$.

47.2.1 Caso $b = c = 0$ e $R(x) = 0$

L'equazione 47.8 si riduce a: $y'' = 0$ che con una doppia integrazione porta alla soluzione $y = c_1x + c_2$

47.2.2 Caso $b = 0$, $c \neq 0$ e $R(x) = 0$

L'equazione 47.8 si riduce a $y'' = -cy$, si presentano due casi

$c > 0$

sia $k^2 = c$ la funzione y cercata deve essere tale che la sua derivata seconda risulti proporzionale all'opposto della funzione, scegliamo come candidate soluzioni le funzioni del tipo: $\sin(h_1x)$ e $\cos(h_2x)$ che verificano la richiesta, infatti derivando due volte si ottiene $\frac{d^2}{dx^2} \sin(h_1x) = -h_1^2 \sin(h_1x)$, da cui $h_1 = k$, analogo per la funzione coseno.

La soluzione generale sarà perciò:

$$y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

$c < 0$

sia $k^2 = -c$ la funzione y cercata deve essere tale che la sua derivata seconda risulti proporzionale alla funzione, scegliamo come candidate soluzioni le funzioni del tipo: e^{h_1x} e e^{-h_2x} , infatti derivando due volte si ottiene $\frac{d^2}{dx^2} e^{h_1x} = h_1^2 e^{h_1x}$, da cui $h_1 = k$, analogo per la funzione e^{-h_2x} .

La soluzione generale sarà perciò:

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

47.2.3 Caso $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $R(x) = 0$

L'equazione 47.8 diventa

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (47.9)$$

cerchiamo di riportarci alla situazione già risolta, il "trucco" è quello di sostituire la funzione y con il prodotto di due funzioni: $y = fg$, la 47.8 si trasforma in:

$$\begin{aligned} f''g + 2f'g' + fg'' + b(f'g + fg') + cfg &= 0 \\ f(g'' + bg' + cg) + f'(2g + bg) + f''g &= 0 \end{aligned}$$

Ponendo, senza perdere generalità al problema, $2g + bg = 0$ cioè $g = e^{-\frac{b}{2}x}$ si ottiene:

$$e^{-\frac{b}{2}x} \left(f'' + \frac{4c - b^2}{4} f \right) = 0$$

le cui soluzioni sono le funzioni f : $f'' + \frac{4c - b^2}{4} f = 0$ ¹, pertanto se:

$\frac{4c - b^2}{4} = 0$ le soluzioni sono date da:

$$y = e^{-\frac{b}{2}x} (c_1 x + c_2)$$

$\frac{4c - b^2}{4} = k^2 > 0$ le soluzioni sono date da:

$$y = e^{-\frac{b}{2}x} (c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx))$$

¹osservare che $\frac{b^2 - 4c}{4}$ è il Δ dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ detta equazione caratteristica dell'equazione differenziale 47.9

$\frac{4c - b^2}{4} = -k^2 < 0$ le soluzioni sono date da:

$$y = e^{-\frac{b}{2}x} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx})$$

47.2.4 Equazione non omogenea

Definizione 127 ($L(f) = f'' + bf' + cf$). Definiamo L il seguente operatore $L(f) = f'' + bf' + cf$

Teorema 124 ($L(f) = f'' + bf' + cf$ è lineare). L è lineare

dimostrare con cura

L'equazione 47.8 si può scrivere come $L(y) = R$, siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione differenziale considerata, si ha: $L(y_1) = L(y_2) = R$, applicando la linearità di L si ottiene: $L(y_2 - y_1) = R - R = 0$ perciò $y_2 - y_1$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata, deve valere $y_2 - y_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ quindi la generica soluzione dell'equazione non omogenea è data da una particolare soluzione y_1 più le soluzioni dell'omogenea associata:

$$y = y_1 + c_1 v_1 + c_2 v_2$$

Il problema si sposta dal cercare tutte le soluzioni di $L(y) = R$ al trovare una particolare soluzione.

Supponiamo che la soluzione cercata sia del tipo: $y_1 = t_1 v_1 + t_2 v_2$, dove t_1 e t_2 sono generiche funzioni e v_1 e v_2 sono le soluzioni dell'omogenea.

$$y_1' = t_1' v_1 + t_1 v_1' + t_2' v_2 + t_2 v_2'$$

$$y_1'' = t_1'' v_1 + t_1' v_1' + t_1 v_1'' + t_2'' v_2 + t_2' v_2' + t_2 v_2''$$

quindi

$$L(y_1) = t_1(cv_1 + bv_1' + v_1'') + t_2(cv_2 + bv_2' + v_2'') + b(t_1' v_1 + t_2' v_2) + (t_1'' v_1 + t_1' v_1' + t_2'' v_2 + t_2' v_2') + (t_1' v_1' + t_2' v_2')$$

ora $cv_1 + bv_1' + v_1''$ e $cv_2 + bv_2' + v_2''$ sono zero in quanto v_1 e v_2 sono soluzioni dell'omogenea, inoltre

$$t_1'' v_1 + t_1' v_1' + t_2'' v_2 + t_2' v_2' = (t_1' v_1 + t_2' v_2)'$$

si ottiene:

$$L(y_1) = (t_1' v_1 + t_2' v_2)' + b(t_1' v_1 + t_2' v_2)$$

Ora $L(y_1) = R$ e pertanto si può scegliere di imporre $t_1' v_1 + t_2' v_2' = R$ e $t_1' v_1 + t_2' v_2 = 0$ si ottiene così un sistema di due equazioni in due incognite t_1' e t_2' , che si può risolvere con Cramer².

$$\begin{cases} t_1' v_1 + t_2' v_2 = 0 \\ t_1' v_1' + t_2' v_2' = R \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$t_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ R & v_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}}$$

$$t_2' = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}}$$

²Gabriel Cramer (1704-1752), che ha pubblicato la regola nel testo dal titolo "Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" pubblicato nel 1750, in verità la stessa regola fu pubblicata da Colin Maclaurin nel suo "Treatise of Algebra" del 1748 ed è probabile che ne fosse a conoscenza già dal 1723

dove:

$$W = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}$$

è detto Wronskiano³.

47.3 Applicazioni

Riguardare circuiti CR, LR, LCR, sistema massa molla, sviluppati a suo tempo in modo "non standard", oggi basta ... cambiare qualche nome

47.3.1 Decadimento radioattivo

Benché i vari elementi radioattivi mostrino marcate differenze nei loro tassi di decadimento, tutti sembrano avere una proprietà comune, cioè il tasso con cui una sostanza decade è proporzionale in ogni istante alla quantità di materia presente in quell'istante:

se all'istante 0 si ha $m(0) = m_0$ massa radioattiva, la variazione di m nel tempo è data da:

$$m'(t) = -km(t)$$

dove k è la costante di decadimento. Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} m'(t) = -km(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione: $m(t) = m_0 e^{-kt}$, ricordiamo le proprietà degli esponenziali studiate, in particolare: dato che $e^0 = 1$ si ricava che $e^{-t} = \frac{1}{2}$ se $x = \log 2$ e che $e^{-t} = \frac{1}{4}$ per $x = 2 \log 2$ quindi la funzione esponenziale si dimezza sempre nello stesso tempo.

47.3.2 Caduta di un grave in un fluido viscoso

La seconda legge della dinamica ci offre un'ottima palestra per applicare quanto studiato sulle equazioni differenziali.

$$\begin{cases} mx'' = mg - bx' \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione può essere scritta nel seguente modo: $x'' + \frac{b}{m}x' = g$, dopo aver moltiplicato per $e^{\frac{b}{m}t}$ ambo i membri dell'equazione si può scrivere; $\left(x'e^{\frac{b}{m}t}\right)' = ge^{\frac{b}{m}t}$ integrando, si ottiene $x'(t) = \frac{gm}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$ si è utilizzata la condizione iniziale $x'(0) = 0$, integrando nuovamente si ottiene: $x(t) = \frac{gm}{b} \left(t - \frac{m}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right)$

³Josef-Maria Hoëné de Wronski nato il 23 agosto 1778 a Wolsztyn in Polonia, morto l' 8 agosto 1853 a Neuilly-sur-Seine vicino Parigi

47.3.3 Il problema della catenaria

Un filo flessibile omogeneo è sospeso alle sue estremità. Trovare l'equazione della curva d'equilibrio del filo sottoposto al proprio peso. Scomponendo la tensione T nelle sue componenti

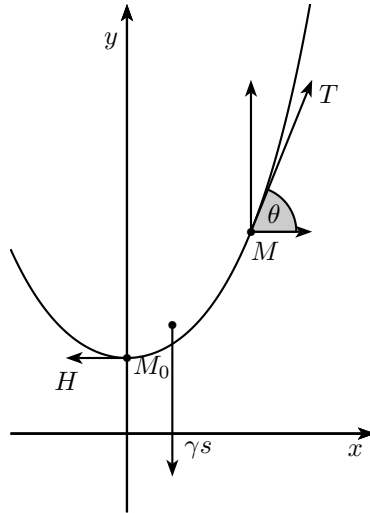


Figura 47.1: Forze agenti sul tratto di filo M_0M

orizzontale e verticale, si ha:

$$T \cos \theta = H, \quad T \sin \theta = \gamma s$$

dividendo membro a membro si ottiene $\tan \theta = \frac{\gamma}{H}s$ sia ora $y = f(x)$ la curva cercata, si ha che $\tan \theta = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ di conseguenza $y' = \frac{\gamma}{H}s$, derivando entrambi i membri si ottiene: $y'' = \frac{\gamma}{H} \frac{ds}{dx}$ ma ricordando che $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. L'equazione che si ottiene è:

$$y'' = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1 + (y')^2}$$

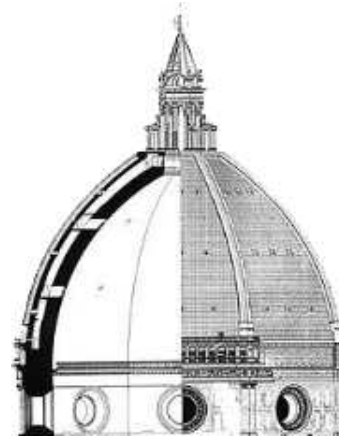
Si può verificare che funzioni del tipo

$$y = \frac{\gamma}{H} \cosh \left(x \frac{H}{\gamma} + c_1 \right) + c_2$$

risolvono l'equazione.

verificare derivando!!!

La catenaria nell'arte



Due “importanti esempi” Casa Batllò (Gaudì) e la cupola del Brunelleschi.

47.3.4 Lancio di un razzo

Sia $m(t)$ la massa del missile compreso il carburante, nell'istante t , sia $v(t)$ la velocità del missile nell'istante t e $c(t)$ la velocità con cui viene espulso il carburante.

Analizziamo l'istante t e l'istante $t + dt$ e supponiamo che il carburante venga espulso istantaneamente nell'intervallo dt , avremo:

massa missile all'istante t $m(t)$ velocità $v(t)$

massa missile all'istante $t + dt$ $m(t + dt)$ velocità $v(t + dt)$

massa carburante espulsa $m(t) - m(t + dt)$ velocità del carburante $c(t) + v(t)$

Applichiamo la conservazione della quantità di moto:

$$m(t)v(t) = m(t + dt)v(t + dt) + (m(t) - m(t + dt))(c(t) + v(t))$$

semplificando e raccogliendo opportunamente si ottiene:

$$m(t + dt)(v(t + dt) - v(t)) = c(t)(m(t + dt) - m(t))$$

ora dividendo entrambi i membri per dt e passando poi al limite si ha: $m(t)v'(t) = c(t)m'(t)$ e ricordando che $mv' = ma$ si può scrivere

$$m(t)v'(t) = c(t)m'(t) + F \quad (47.10)$$

dove F rappresenta la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

risolvere il caso $c(t) = -c$ ed $F = mg$

Capitolo 48

Costruzione dell'insieme $\mathbb{R}$

48.1 I numeri reali

¹ Di tanto in tanto vedono la luce dei libri di volgarizzazione matematica, nei quali si attribuisce una straordinaria importanza al problema "se i numeri irrazionali esistano"; essi rappresentano l'eco di un periodo ormai trascorso della scienza, in cui la natura di questi numeri era avvolta da una misteriosa oscurità. Di fatto possiamo spiegarci facilmente che cosa dia occasione a tali dubbi.

Discussioni come quelle del capitolo precedente sono assai difficili da comprendere: in esso abbiamo parlato per esempio di "serie di intervalli, interni uno all'altro, che hanno per limite un punto"; ma questa proposizione, letteralmente intesa, rappresenta senza dubbio una richiesta assai grave per il nostro pensiero. Se da un segmento ne stacciamo un altro, da questo un terzo, ecc., otteniamo sempre un segmento: come potrà dunque - da una serie siffatta - venire originato un punto? L'abisso tra segmento e punto sembra rimanere sempre il medesimo. "Grande o piccolo che sia - scrive Paul du Bois-Reymond² nella sua Teoria generale delle funzioni (1882) - il segmento rimane sempre un intervallo compreso fra due estremi razionali. Se noi tutt'a un tratto sostituiamo, senza ragione logica, il punto al segmento, compiamo con ciò un atto arbitrario, col quale introduciamo una nuova rappresentazione in luogo dell'antica, e ammettiamo a priori quel che doveva venir dimostrato. Parlar qui di un graduale coincidere di due punti, come qualcuno vorrebbe, è un completo non senso. O gli estremi si trovano separati da un segmento, oppure coincidono formando un unico punto; uno stato intermedio non esiste.

Questa è certamente una difficoltà seria. Si può provare davvero che una successione di segmenti, interni l'uno all'altro, tenda a un punto? Oppure quest'asserto costituisce una mera ipotesi? Per rispondere a tale problema, noi ci porremo da un punto di vista diverso, considerando l'anzidetta successione di intervalli come costituente, di per sé stessa, un vero e proprio numero. Ma per raggiungere il nostro scopo, dobbiamo anzitutto occuparci di un problema notevolmente più modesto.

¹Quanto segue è contenuto in Waismann 2004 opera di Friedrich Waismann(1896-1959) che fu tra i primi autori del Circolo di Vienna, culla del neopositivismo. nel 1937 passò all'Univesità di Cambridge e due anni dopo a Oxford, dove diede originali contributi allo sviluppo della filosofia analitica.

²nato a Berlino nel 1831 morto a Freiburg nel 1889

Avevamo dato la seguente definizione: una successione di numeri

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

è convergente, se esiste un numero a cui i termini della successione vanno indefinitamente avvicinandosi. Essa è senza dubbio logicamente esatta; presenta però l'inconveniente di supporre che noi conosciamo il valore del limite. È invece assai spesso più difficile scoprire questo valore che non studiare il comportamento della successione. Per esempio, se il lettore esamina la successione $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$, è probabilissimo che ne comprenda subito la convergenza, sebbene forse egli non sia in grado di calcolarne a prima vista il limite. Sarebbe perciò desiderabile trovare una nuova definizione che non faccia riferimento al limite. Domandiamoci dunque: è possibile stabilire se una successione converge, studiando soltanto il comportamento dei suoi termini?

La cosa è possibile. Supponiamo che la successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ converga verso il numero (razionale) a . In quest'ipotesi, fissato un ϵ : positivo arbitrario, si potrà sempre trovare un indice N tale che si abbia

$$|a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N$$

Per ogni termine successivo a_{n+p} varrà pure

$$|a - a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N$$

Da queste due disuguaglianze è possibile ricavarne una terza, in cui non compare più il numero a . Consideriamo infatti la differenza $a_n - a_{n+p}$: il suo valore non cambia aggiungendovi e togliendovi a : $a_n - a_{n+p} = a_n - a + a - a_{n+p} = (a_n - a) - (a_{n+p} - a)$. Prendendo il valore assoluto di quest'espressione si ottiene $|a_n - a_{n+p}| = |(a_n - a) - (a_{n+p} - a)| \leq |a_n - a| + |a_{n+p} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ebbene, noi chiameremo convergenti proprio quelle successioni i cui termini si comportano nel modo ora accennato. Stabiliremo cioè la seguente definizione: la successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, dicesi convergente se si ha $|a_n - a_{n+p}| < \epsilon$, quando sia $n > N$.

Questo è un criterio immanente, cioè un criterio che si riferisce soltanto ai termini della successione presa in esame, e non suppone la conoscenza di alcun numero oltre a essi. In parole povere, il criterio esige che i termini della successione si addensino gli uni agli altri, sicché la differenza fra uno di essi (scelto abbastanza in avanti) e un qualunque termine successivo diventi piccola ad arbitrio; ovvero, ancor più semplicemente, che, dopo un certo numero di termini, i rimanenti si presentino vicinissimi gli uni agli altri. Come il lettore sa, vi sono successioni convergenti che tendono a un limite irrazionale: per esempio, quella che tenda a $\sqrt{2}$. Poiché, tuttavia, noi disponiamo finora soltanto dei numeri razionali, non possiamo, volendo essere rigorosi, procedere come se quel limite irrazionale esistesse, ma dobbiamo dire invece: vi sono due generi di successioni convergenti, quelle che hanno un limite razionale e quelle che non l'hanno. Queste parole ci ripetono, in altra forma, quanto già sappiamo, e cioè che il sistema dei numeri razionali non è chiuso rispetto all'operazione di limite.

Ci troviamo quindi di nuovo innanzi al problema di ampliare il campo numerico. E la via da seguire ci è chiaramente indicata dalle discussioni dei capitoli precedenti. Noi costruiremo un calcolo operante sulle successioni. I nostri elementi saranno cioè le successioni di numeri reali, e precisamente quelle che convergono nel senso ora definito. Mostriamo che per esse possono venir introdotti i soliti rapporti di maggiore, uguale e minore, e possono venir stabilite delle ben precise operazioni di calcolo. Otterremo così il diritto di considerarle come un nuovo genere di numeri: saranno questi i cosiddetti *numeri reali*.

Un tal modo di introdurre gli irrazionali evita tutte quelle difficoltà che si incontravano nell'antica concezione.

Oggi esistono varie teorie dei numeri reali; noi faremo un cenno a due di esse particolarmente notevoli. dovute, l'una a Cantor, e l'altra a Dedekind.

48.1.1 La teoria di Cantor

Definizione 128 (Zero-successione). Una successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ dicesi zero-successione se per ogni ϵ : positivo piccolo ad arbitrio esiste un N tale che risulti $|a_n| < \epsilon$, purché sia $n > N$.

Se ne ricava, in particolare, che la successione $0, 0, \dots, 0, \dots$ è una zero-successione.

Teorema 125 (dell'opposta di una zero-successione). Se (a_n) è una zero-successione, deve esserlo anche $(-a_n)$.

Teorema 126 (della somma di zero-successioni). Se (a_n) e (b_n) sono zero-successioni, anche $(a_n + b_n)$ dovrà esserlo.

Definizione 129 (Successioni uguali). Due successioni si dicono uguali, se la successione delle differenze è una zero-successione.

Questa definizione soddisfa le solite condizioni richieste per il concetto di uguaglianza. Il rapporto da essa definito è infatti:

- 1) riflessivo: $(a_n) = (a_n)$; poiché $(a_n - a_n) = (0)$ è una zero-successione;
- 2) simmetrico: da $(a_n) = (b_n)$ si deduce $(b_n) = (a_n)$, poiché se $(a_n - b_n)$ risulta una zero-successione, lo stesso accadrà per $(b_n - a_n)$;
- 3) transitivo: da $(a_n) = (b_n)$ e $(b_n) = (c_n)$ si ricava $(a_n) = (c_n)$; è chiaro invero che, se $(a_n - b_n)$ e $(b_n - c_n)$ sono zero-successioni, tale dovrà essere anche $(a_n - c_n)$ ottenuta da esse addizionandole termine a termine.

Una conseguenza di questa definizione è che esistono sempre infinite successioni uguali fra loro. (Questo ci richiama alla memoria il fatto che esistono infinite coppie esprimenti il medesimo numero razionale.) Passiamo ora ai concetti di "positivo" e "negativo".

Definizione 130 (Successione positiva). Una successione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ dicesi positiva, se esiste un numero razionale positivo r , alla cui destra cadono quasi tutti i termini della successione. Dicesi invece negativa, se esiste un numero razionale negativo s , alla cui sinistra cadono quasi tutti i termini della successione.

Bisogna ora dimostrare che le proprietà di essere positiva, di essere negativa e di essere una zero-successione sono incompatibili fra loro, e che formano una disgiunzione completa. Questo appunto è il contenuto dei due seguenti teoremi.

Teorema 127 (sulla natura delle successioni). Una successione non può essere contemporaneamente positiva e negativa, o positiva e nulla, o nulla e negativa.

Dimostrazione. Se infatti una successione è positiva, i suoi termini giacciono quasi tutti alla destra di un numero razionale positivo dato r ; non possono quindi diventare piccoli ad arbitrio, e cioè non possono costituire una zero-successione né tanto meno una successione negativa. Allo stesso modo si vede che, se è negativa, i suoi termini non possono certo costituire una zero-successione, né tanto meno una successione positiva. Se infine si tratta di una zero-successione,

i suoi termini diverranno piccoli ad arbitrio, e quindi non potrà esistere alcuna costante positiva (o negativa), tale da lasciarli tutti alla propria destra (o, rispettivamente, sinistra). $\square$

Teorema 128 (Successioni: disgiunzione completa). Una qualunque successione convergente o è positiva, o è negativa, oppure è una zero-successione, queste tre possibilità formano una disgiunzione completa.

E infatti, o esiste un numero positivo r , alla cui destra cadono quasi tutti i termini a_n ; ovvero un numero negativo s , alla cui sinistra cadono quasi tutti gli a_n ; o non si verifica né l'una né l'altra di queste ipotesi. In tal caso potrebbe darsi che infiniti termini cadessero alla destra di r e infiniti alla sinistra di s ; ma ciò è escluso dalla supposizione iniziale che la serie sia convergente. Rimane dunque l'unica possibilità - quando gli a_n non cadano né quasi tutti alla destra di r né quasi tutti alla sinistra di s - che essi cadano quasi tutti fra r e s . Data l'arbitrarietà di r e s , questo significa che quasi tutti i termini della successione considerata cadono in un intorno arbitrario (e quindi anche arbitrariamente piccolo) dello zero, e cioè che si tratta proprio di una zero-successione. Sorge però ancora una domanda. Esistono sempre, come abbiamo poco fa osservato, infinite successioni fra loro uguali; orbene, se una successione è positiva, lo saranno anche le infinite altre a essa uguali? O invece la positività è un carattere connesso alla forma specifica della successione, e che si perde quando passiamo da essa alle successioni uguali? La risposta è fornita dal seguente teorema.

Teorema 129 (proprietà delle successioni positive I). Se a_n è positiva, e se è $(a_n) = (b_n)$, anche (b_n) sarà positiva.

Dimostrazione. Infatti, se (a_n) è una successione positiva, quasi tutti i suoi termini cadono alla destra di un numero razionale positivo r ; non può dunque accadere diversamente per i termini della (b_n) , dato che questi si avvicinano sempre più ai termini della prima. Ciò che abbiamo dimostrato per le successioni positive, vale senza cambiamenti per le successioni negative e per le zero-successioni. $\square$

Per quanto diremo in seguito, abbiamo bisogno di altri due teoremi:

Teorema 130 (proprietà delle successioni positive II). Se la successione (a_n) è positiva, la successione $(-a_n)$ sarà negativa.

Teorema 131 (proprietà delle successioni positive III). Se (a_n) e (b_n) sono entrambe successioni positive, tale dovrà pure essere la successione $(a_n + b_n)$

Passiamo ora alla definizione dei concetti di "maggiore" e "minore".

Definizione 131 ($(a_n) > (b_n)$). La successione (a_n) dicesi maggiore della successione (b_n) , in simboli $(a_n) > (b_n)$ quando la successione delle differenze $(a_n - b_n)$ è positiva.

Definizione 132 ($(a_n) < (b_n)$). Sarà invece $(a_n) < (b_n)$ quando la successione $(a_n - b_n)$ è negativa.

I concetti così definiti sono: a) irreflessivi, b) asimmetrici, c) transitivi. a) Nessuna successione è maggiore di sé stessa; se infatti fosse $(a_n) > (a_n)$, questo significherebbe che la successione $(a_n - a_n)$, formata da termini tutti nulli, è positiva, mentre sappiamo che essa è una zero-successione. b) Se è $(a_n) > (b_n)$, la successione $(a_n - b_n)$ sarà positiva; e quindi la $(b_n - a_n)$ sarà negativa; donde segue $(b_n) < (a_n)$ c) Se si ha $(a_n) > (b_n)$ e $(b_n) > (c_n)$, tanto la successione $(a_n - b_n)$ quanto la $(b_n - c_n)$ sarà positiva; e quindi anche la successione $(a_n - b_n + b_n - c_n) =$

$(a_n - c_n)$, ottenuta addizionandole, dovrà risultare positiva; si avrà cioè $(a_n) > (c_n)$. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema fondamentale:

Teorema 132 (sistema ordinato delle successioni convergenti). Le successioni convergenti formano un sistema ordinato.

Si prendano cioè due successioni arbitrarie (a_n) e (b_n) ; la successione (a_n) dovrà essere maggiore, uguale, o minore della (b_n) . Si tratta, in altre parole, di escludere il caso teoricamente possibile della loro inconfrontabilità. Quest'esclusione dipende semplicemente dal fatto, già riconosciuto poco sopra, che la successione delle differenze $(a_n - b_n)$ è positiva, negativa o nulla e che queste tre possibilità formano una disgiunzione completa. Vista così la possibilità di ordinare le successioni convergenti, passiamo ora a spiegare le operazioni di calcolo: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ Addizione.

Il lettore ricorda certo quali sono le condizioni, cui deve soddisfare il concetto di somma: a) la somma deve esistere; e cioè la somma di due successioni convergenti deve risultare ancora una successione convergente;

b) la somma deve essere determinata in modo univoco; e cioè: se sostituiamo (a_n) e (b_n) con due altre successioni (a'_n) e (b'_n) a esse uguali, dobbiamo ottenere il medesimo valore della somma: $(a_n + b_n) = (a'_n + b'_n)$;

c) la somma deve godere della proprietà associativa, e deve godere della proprietà commutativa.

Tralasciamo di dimostrare che il concetto di somma, come venne or ora definito, soddisfa di fatto tutte queste condizioni. Definiamo invece, in forma schematica, le altre operazioni:

$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$ Sottrazione.

$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ Moltiplicazione.

$(a_n) : (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ Divisione.

Si prova facilmente che esse godono di quelle stesse proprietà che son valide, nel campo dei numeri razionali, per le operazioni dallo stesso nome. Se ne conclude che noi possiamo confrontare fra loro le varie successioni convergenti, possiamo sommarle, moltiplicarle, ecc., allo stesso modo come confrontiamo, sommiamo, moltiplichiamo, ecc., i numeri razionali. Abbiamo così dimostrato che è legittimo interpretare le successioni convergenti come un nuovo genere di numeri, i numeri reali.

Sorgerà subito, a proposito di essi, il problema: in che rapporto stanno con i razionali? Qui, come già in altri capitoli, dobbiamo mettere in guardia il lettore dal voler inserire i vecchi numeri fra i nuovi, come se fossero una loro sottoclasse: invece di far ciò, noi cerchiamo di stabilire una corrispondenza fra una parte dei numeri reali e l'insieme dei razionali.

Al nostro scopo riferiremo a ogni razionale r la successione convergente $(r, r, r, \dots, r, \dots)$ - o, più in generale, ogni successione che converga verso r ; - in tal caso si vedrà subito che fra due qualunque di tali successioni, per esempio $(r, r, \dots, r, \dots)$ ed $(s, s, \dots, s, \dots)$, corrono esattamente gli stessi rapporti che fra i due numeri razionali r e s : le due successioni risultano uguali se r e s sono uguali; la prima risulta maggiore della seconda se r è maggiore di s ; alla loro somma corrisponde la somma $r + s$, ecc. In breve, fra i numeri razionali e questo particolare tipo di successioni convergenti (le successioni con limite razionale) esiste una corrispondenza biunivoca, simile e isomorfa. Questo, ovviamente, è il motivo per cui i numeri razionali sembrano costituire una sottoclasse del campo reale. È però necessario, per evitar confusioni, tenere ben distinti fra loro il numero razionale r e il reale-razionale $(r, r, \dots, r, \dots)$

Dando alle successioni convergenti il nome di numeri, noi continuiamo a mantenerci fedeli a un principio, che già ci guidò nella costruzione dei numeri interi e dei razionali. L'idea di considerare le successioni stesse come numeri parve però, appena sorta, così nuova e ardita, che non pochi matematici indietreggiarono di fronte a essa: una successione - obiettarono - è un'entità formata da infiniti numeri, e non rassomiglia per nulla a una grandezza rappresentabile sulla retta numerica. Ché se poi, accettando la critica più moderna, si decide di interpretarla proprio come una regola (o una legge) per la formazione dei termini che la costituiscono, si viene con ciò stesso a inserirla in una categoria logica affatto diversa da quella dei numeri: non è assurdo voler calcolare con regole o leggi?

Questa lotta contro la *teoria formale* dei numeri irrazionali prese un tono particolarmente vivace negli scritti di Paul du Bois-Reymond: "La scissione del concetto di numero dal concetto di grandezza - così egli scrive - procurerebbe all'analisi un'ossatura puramente formalistico-letterale, e finirebbe col degradarla a un mero giuoco di segni, forniti soltanto di un significato arbitrario, proprio come i pezzi degli scacchi e le carte da giuoco. Per quanto esso possa risultare divertente, certo si esaurirebbe però quasi subito in germogli infecondi. Senza dubbio sarà possibile - con l'aiuto di assiomi, convenzioni e altri filosofemi - ampliare dei concetti originariamente chiari in modo da ottenere infine un sistema aritmetico del tutto analogo a quello ricavato dal concetto di grandezza, e racchiudere così la matematica calcolante entro una barriera di dogmi e definizioni che la proteggano dallo psicologismo. Può anche darsi che in tali costruzioni si eserciti un'acutezza assolutamente fuori del comune. Contro di esse sta però il fatto che allo stesso modo sarebbe possibile inventare altri sistemi aritmetici, completamente diversi da quello ordinario, mentre invece soltanto questo corrisponde al concetto di grandezza lineare" (con quest'ultima espressione l'autore intende riferirsi al concetto di grandezza misurabile). È molto strano che lo stesso Hankel, il creatore della teoria formalistica dei numeri razionali, non abbia voluto a nessun costo ammettere la teoria di Cantor; nel suo già citato *Theorie der komplexen Zahlensysteme* egli dichiara: "Ogni tentativo di trattare i numeri irrazionali con metodo formalistico e senza riferimento al concetto di grandezza conduce necessariamente a una gran quantità di artifici astrusi e malagevoli, i quali, anche ammesso che possano venir svolti con assoluta esattezza (cosa che mi sembra per lo meno assai dubbia), non posseggono certo un valore scientifico più alto delle trattazioni intuitive."

Questi autori ritengono che il concetto di successione non riesca a cogliere in nessun modo quell'idea che siamo soliti formarci parlando di numero reale. Essi tendono piuttosto a distinguere la successione (intesa come processo di approssimazione) dal suo limite (il numero irrazionale); una tal distinzione rende però molto difficile spiegare perché si abbia diritto di supporre l'esistenza di quel limite. A ben riflettere, sono esclusivamente delle difficoltà psicologiche quelle che forniscono a tutto ciò l'aspetto di problema. Che cosa vogliamo dire, a rigore, affermando che conosciamo un numero irrazionale, per esempio $\sqrt{2}$ e che possiamo farci un'idea della sua grandezza? Che cosa si cela dietro questo sentimento? Nulla, senza dubbio, fuorché la conoscenza di un processo per calcolare $\sqrt{2}$ con un numero arbitrario di decimali. Conoscere un numero irrazionale significa saperlo calcolare con successive approssimazioni; è quindi perfettamente legittimo identificare un tal numero con il procedimento di approssimazione (e cioè con la successione stessa). Lasciemo poi risolvere al lettore stesso il problema se una successione possa soltanto avvicinarsi al suo limite, o riesca invece a raggiungerlo effettivamente.

Un secondo motivo che trattenne alcuni matematici dall'accettare la teoria di Cantor è questo: parlando di numero irrazionale ci si rappresenta, di solito, un punto sulla retta numerica; sembra quindi impossibile che tal numero non sia altro che una regola o una legge. Ciò che ci trae in inganno è, qui, unicamente una rappresentazione grossolana e primitiva: ci si immagina, a un

dipresso, di poter introdurre la mano nell'insieme dei numeri reali traendone fuori uno, e non si pensa, invece, che il numero irrazionale può venir dato soltanto per mezzo di un processo di approssimazione. In realtà, il miglior modo di cogliere l'essenza del numero irrazionale è proprio quello di identificarlo con una regola per costruire una successione convergente di numeri razionali.

Accenniamo infine a una modificazione della nostra teoria, che forse può renderla più vicina alla rappresentazione comune dei numeri irrazionali. Fino a questo momento non ci siamo curati di distinguere le successioni crescenti dalle decrescenti e dalle oscillanti; ora ci limiteremo invece a considerare le successioni monotone, quelle, cioè, i cui termini variano in un senso solo. Supponiamo di aver costruito due di tali successioni

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

con le seguenti proprietà:

- 1) La prima è monotona crescente; si ha cioè

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

- 2) La seconda è monotona decrescente; si ha cioè

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

- 3) Nessun termine della prima supera il corrispondente della seconda

$$b_1 \geq a_1; b_2 \geq a_2; b_3 \geq a_3; \dots$$

- 4) Le differenze $b_n - a_n$ diventano arbitrariamente piccole al crescere di n .

Vogliamo raggruppare queste due successioni formandone una coppia, che denoteremo con un unico simbolo, per esempio $\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}\right)$. Non è difficile trasportare le definizioni e le regole di calcolo, date poco fa per le successioni convergenti qualunque, a queste coppie di successioni; invece di costruire un calcolo operante con successioni convergenti, ne otterremo così uno operante su coppie di successioni. I punti $a_1, a_2, a_3, \dots$ avanzano verso destra, i punti $b_1, b_2, b_3, \dots$ avanzano verso sinistra, cosicché gli uni e gli altri determinano dei segmenti che diventano sempre più corti. È dunque una variazione insignificante della teoria di Cantor che ci porta a identificare il numero reale con una coppia di successioni monotone del tipo ora considerato, cioè con una serie di intervalli decrescenti, interni uno all'altro.

Molte sono le ricerche che ci impongono quest'interpretazione dei numeri reali. Citiamo soltanto due esempi:

- 1) Un decimale illimitato non è altro che un modo abbreviato per indicare una tale successione di intervalli, interni l'uno all'altro. Se per esempio, nel calcolo di $\sqrt{2}$, troviamo

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots$$

possiamo esprimere il nostro risultato scrivendo

$$\sqrt{2} = \left(\begin{array}{l} 2, 1.5, 1.42, 1.415, \dots \\ 1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots \end{array} \right)$$

si vede di qui, che lo sviluppo decimale di $\sqrt{2}$ ci offre proprio una legge per formare una successione di intervalli (ciascuno dei quali è un decimo del precedente), interni l'uno all'altro.

- 2) Volendo determinare l'area del cerchio, col solo aiuto della geometria elementare, si procede, com'è ben noto, così: si iscrivono e circoscrivono al cerchio un esagono regolare, poi un dodecagono regolare, ecc., racchiudendo in tal modo l'anzidetta area in un intervallo che diventa sempre più piccolo. Le aree dei poligoni iscritti formano una successione monotona crescente, quelle dei poligoni circoscritti una successione monotona decrescente; nessun termine della prima supera un termine della seconda; e la differenza fra un poligono circoscritto e il corrispondente poligono iscritto scende, col crescere del numero dei lati, al di sotto di qualunque valore positivo, arbitrariamente piccolo. Le nostre quattro condizioni si trovano dunque soddisfatte: l'area del cerchio risulta quindi espressa proprio da una catena di intervalli, del tipo da noi considerato. (Né ci è lecito credere che si tratti qui unicamente di un metodo per calcolare l'area del cerchio; no: prima delle considerazioni ora accennate il concetto di area era stato definito soltanto per le figure racchiuse da segmenti rettilinei, e non per il cerchio o altre figure racchiuse da linee curve. Non poteva quindi avere alcun senso il problema di calcolare una tale area; questo problema può sorgere soltanto dopo che si sia definita l'area del cerchio identificandola proprio con il limite comune, a cui tendono le aree dei poligoni iscritti e quelle dei poligoni circoscritti.)

La formazione di una catena di intervalli del tipo ora riferito è spesso un mezzo molto comodo per dimostrare l'esistenza di certi numeri. Valga come esempio la dimostrazione del noto:

Teorema 133 (Bolzano-Weierstraß). Ogni insieme infinito e limitato possiede almeno un punto limite (o punto di condensazione).

L'attributo "infinito" ci dice che il nostro insieme deve risultar costituito da infiniti punti; l'attributo "limitato" ci dice invece che tutti questi punti debbono cadere fra due estremi a e b , e cioè in un intervallo finito.

La dimostrazione procede così: dividiamo per metà l'intervallo (a, b) , e scegliamo quella metà che contiene infiniti punti. (Nel caso che in ognuno degli intervalli parziali cadano infiniti punti, ne scegliamo uno ad arbitrio.) Con l'intervallo che è stato scelto, procediamo in modo perfettamente analogo: lo dividiamo di nuovo per metà, e prendiamo quella parte che contiene infiniti punti, ecc. Otteniamo in tal modo una serie di intervalli, interni l'uno all'altro, la lunghezza dei quali va decrescendo indefinitamente. Essi tendono a un limite, che sarà proprio il punto di condensazione cercato; è chiaro infatti che ogni intervallo parziale, in cui esso viene a trovarsi inserito, contiene infiniti punti dell'insieme. Se accade che, dividendo un intervallo, entrambe le metà contengano infiniti punti dell'insieme, il procedimento si biforca: potremo allora proseguirlo scegliendo l'una o l'altra delle due metà, e riconosceremo così che esistono diversi punti di condensazione del nostro insieme.

Il domandarsi poi in che modo si possa decidere quale dei due intervalli parziali, ottenuti dividendo l'intervallo (a, b) , contenga infiniti punti dell'insieme, costituisce un problema del tutto diverso. Nella nostra dimostrazione noi supponiamo oggettivamente certo che il numero dei punti dell'insieme, ottenuti in un segmento qualunque, debba essere finito o infinito; e ciò senza badare al fatto che si posseda o non si posseda un mezzo per deciderlo. Negli ultimi anni, anche questa supposizione venne sottoposta a critiche assai sottili, e l'intuizionista ne combatte oggi la legittimità argomentando che un'affermazione ha senso, unicamente se può venir provata con un numero finito di passaggi. Per comprendere quanto siano vaste le conseguenze della critica intuizionistica, si ricordi che il teorema di Bolzano-Weierstraß ora dimostrato è proprio uno dei pilastri

fondamentali di tutta l'analisi. Ma la discussione di questo genere di problemi ci condurrebbe fuori dei limiti della nostra ricerca.

Lo scopo che ci condusse alla teoria dei numeri reali fu quello di rendere eseguibile l'operazione di passaggio al limite. Esso può dirsi ora raggiunto: ogni successione convergente di numeri razionali $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ha un limite, il numero reale a , che è proprio definito dalla successione stessa. Qui si presenta però un'altra domanda: che accade se noi ripetiamo questo procedimento nel dominio dei numeri reali? Che accade, cioè, se formiamo una successione i cui termini siano a loro volta numeri reali? Saremo portati da essa a un nuovo tipo di numeri, irraggiungibili con i metodi finora usati? Questa domanda ha per la matematica un'importanza notevolissima. In caso di risposta positiva il campo numerico prenderebbe il seguente aspetto: sopra il sistema dei numeri razionali si eleverebbe un primo gruppo di numeri reali, definiti come successioni convergenti di numeri razionali; su di essi si eleverebbero poi dei numeri reali di secondo grado, definiti come successioni di numeri reali di primo grado, ecc. La totalità dei numeri reali si suddividerebbe quindi in una gerarchia, e non sarebbe più lecito parlare di numeri reali senza ulteriore specificazione. È ovvio che in tal caso l'edificio dell'aritmetica diverrebbe assai più complicato: per ogni teorema dell'analisi bisognerebbe specificare qual sia il tipo dei numeri reali a cui esso è applicabile, e riuscirebbe con tutta probabilità impossibile enunciare leggi generali. Per fortuna questa suddivisione non è necessaria. Vale cioè il teorema che ogni successione convergente di numeri reali può venir sostituita da una successione convergente di numeri razionali avente lo stesso limite: la formazione di successioni convergenti tratte dal campo dei numeri reali non porta nulla di nuovo.

Prima di tutto un'osservazione. Una successione di numeri reali è un simbolo nuovo che non è stato finora spiegato. Conveniamo dunque che le regole fissate per le successioni convergenti di numeri razionali continuino a valere per successioni convergenti di numeri reali; in particolare che due di tali successioni si dicano uguali se la successione delle loro differenze è una zero-successione.

Per dimostrare ora la veracità del nostro ultimo assetto, prendiamo una qualunque successione convergente, per esempio di numeri irrazionali:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots \quad (48.1)$$

Ognuno di questi termini è definito come una successione di numeri razionali (facciamo qui uso del doppio indice)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots) \\ \alpha_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots) \\ &\dots \\ &\dots \\ \alpha_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}, \dots) \end{aligned}$$

sicché la successione 48.1 è, a rigore, una successione di successioni di numeri razionali. Abbiamo asserito che essa è sostituibile con una successione semplice. Per dimostrarlo noi dobbiamo dunque costruire una successione di numeri razionali, i cui termini differiscano dai termini della 48.1 per quantità piccole ad arbitrio; in tal caso le due successioni potranno venir sostituite l'una all'altra. Fissiamo nella prima successione un indice N_1 tale che da esso in poi la differenza fra a_1 e un termine qualunque della prima successione sia inferiore a $1/3$; nella seconda fissiamo un indice N_2 , tale che da esso in poi la differenza fra a_2 e un termine qualunque della seconda successione sia minore di $1/2$; ecc. Otteniamo così la successione di numeri razionali

$$a_{1N_1}, a_{2N_2}, a_{3N_3}, \dots \quad (48.2)$$

³E cioè tale che risulti: $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots) - (a_{1N_1}, a_{1N_2}, a_{1N_3}, \dots) < 1$

Confrontando ora la 48.1 con la 48.2, si vede subito che la successione delle differenze è costituita da termini inferiori a

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

poiché questa è una zero-successione, tale sarà anche quella. Dunque la 48.1 e la 48.2, in base alla nostra definizione di poco fa, risultano uguali.

Il nostro teorema può venir espresso anche in quest'altra forma: *l'insieme dei numeri reali è chiuso rispetto all'operazione di passaggio al limite*. Quest'enunciato riesce a mettere in chiara luce l'analogia fra il nuovo ampliamento del campo numerico e quelli già precedentemente ottenuti.

48.1.2 La teoria di Dedekind

La teoria che ora esporremo parte da basi completamente diverse. Dedekind fu condotto a queste ricerche dalle varie difficoltà che gli si presentavano dinanzi ogni volta che nelle sue lezioni cercava di spiegare in modo esatto la continuità. L'asserto che una retta è continua sembra di per sé assai chiaro ed evidente; questa chiarezza non basta però al matematico, il quale ha bisogno di un criterio assolutamente preciso su cui poter fondare le sue deduzioni. È ovvio che non lo si raggiunge accennando alla connessione reciproca dei punti di una retta, o alla loro concatenazione senza lacune fin nelle minime parti, ecc.; tutto ciò non è in grado di costituire la base di alcuna deduzione logica. Dedekind si propose quindi di analizzare il concetto di continuità, fino a ottenerne una definizione veramente precisa. E raggiunse infine il suo scopo con un'idea tanto semplice quanto originale. Il lettore immagini una retta orizzontale, e prenda su di essa un punto ad arbitrio: egli vedrà subito che la retta resta divisa in due parti, di modo che ogni punto dell'una giace alla sinistra di ogni punto dell'altra (il punto di divisione potendo, a piacimento, venir attribuito alla prima o alla seconda). Ebbene, Dedekind comprese che l'essenza della connessione continua risiede proprio nella possibilità di invertire questa semplicissima costatazione.

Dividiamo - egli dice - tutti i punti della retta in due classi, di modo che ogni punto della prima classe si trovi alla sinistra di ogni punto della seconda: *esisterà allora uno e un solo punto che determina questa partizione*. Come già osservai, ritengo indubitabile che tutti riconosceranno subito la verità di questo principio; qualche lettore potrà anzi rimanere stupito che proprio una proposizione così banale possa scopirci il segreto del concetto di continuità. Io sono però ben contento che tutti lo trovino tanto intuitivo e in così grande accordo con la rappresentazione comune di linea, dato che né io né altri potremo mai trovarci in grado di dimostrarlo. Esso infatti non è altro che un assioma; ed è proprio accettando quest'assioma che noi attribuiamo alla linea la sua struttura continua.

Comprenderemo tutta l'importanza dell'idea di Dedekind, non appena ci porremo il problema se l'insieme dei numeri razionali sia continuo nel senso ora spiegato. Esso costituisce, com'è noto, un insieme ovunque denso; e qualcuno potrà credere che questo fatto equivalga alla continuità. Col criterio di Dedekind si dimostra subito il contrario; supponiamo infatti di suddividere in due classi l'insieme dei numeri razionali, ponendo in quella di sinistra tutti i negativi, lo zero, e tutti quei positivi il cui quadrato è inferiore a due, e ponendo invece in quella di destra tutti i rimanenti. Ne risulterà una partizione completa del campo razionale, in seguito a cui ogni numero di questo campo cadrà in una e una sola classe. Esiste qualche numero razionale che determini questa suddivisione, e cioè risulti il massimo elemento della classe inferiore, o il minimo della classe superiore? No. È chiaro infatti che là dove le due classi - per così dire - si incontrano, si trova un vuoto, poiché $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. Se consideriamo invece le due classi ottenute raggruppando fra loro una volta tutti i razionali inferiori a 1 e l'altra volta tutti quelli maggiori o uguali a 1, vedremo subito che esse sono proprio separate dal numero razionale 1.

Esistono dunque delle partizioni di Dedekind che ammettono un elemento separatore razionale, e altre che non l'ammettono. Com'è ovvio, questa constatazione sarebbe sufficiente a provarci la discontinuità del campo razionale, anche se non avessimo mai udito nulla intorno ai numeri irrazionali. Un esempio di insieme continuo ci verrà invece fornito dalla totalità dei numeri reali; ma prima di dimostrarlo dovremo approfondire alcuni concetti. Immaginiamo un sistema di enti qualunque (numeri, punti, ecc.), e supponiamo di sapere soltanto che è ordinato: ciò significa che, dati due enti del sistema, si sa sempre quale dei due precede l'altro. (Si tratta, quindi, di enti che non implicano alcun carattere quantitativo.) Consideriamo ora una divisione degli enti del sistema in due classi A e B, con le seguenti proprietà:

- 1) nessuna delle due classi è vuota (non deve cioè avvenire che tutti gli enti del sistema cadano in una sola classe);
- 2) ogni ente di A deve precedere ogni ente di B;
- 3) per ogni ente del sistema deve risultare univocamente stabilito a quale delle due classi appartenga.

Qualunque divisione di questo tipo verrà da noi chiamata *partizione*, e verrà indicata con il simbolo (A/B) . Per quanto riguarda la reciproca delimitazione delle due classi, si possono distinguere quattro casi:

- 1) esiste sia un ultimo elemento di A che un primo elemento di B;
- 2) esiste un ultimo elemento di A, ma non esiste alcun primo elemento di B;
- 3) non esiste un ultimo elemento di A, ma esiste un primo elemento di B.
- 4) non esiste né un ultimo elemento di A, né un primo di B.

Nel primo caso la partizione si dice a intervalli; nel secondo e terzo continua, nel quarto a lacune. Facendo uso di questa terminologia, la definizione di Dedekind potrà venire così formulata: un sistema ordinato deve dirsi continuo, se tale risulta ogni sua partizione, e cioè se non sono possibili né partizioni a intervalli, né partizioni a lacune. Il lettore badi che non è affatto necessario limitare ai numeri l'applicazione di questa definizione. Possiamo anche estenderla alle intensità di luce, alle altezze dei suoni, ecc. Tuttavia sarà bene che ce ne facciamo, innanzitutto, una chiara idea per mezzo di alcuni esempi numerici.

- 1) La serie dei numeri interi presenta intervalli, ma non lacune. E cioè, comunque la dividiamo in due classi (per esempio ponendo in A tutti gli interi minori di due, e in B tutti gli altri), la classe inferiore avrà un massimo, e la superiore un minimo.
- 2) L'insieme dei numeri razionali presenta lacune, ma non intervalli. Quest'ultimo fatto costituisce la cosiddetta discontinuità del campo razionale. L'insieme dei numeri razionali è troppo povero, perché ogni partizione possa venir prodotta da un suo elemento: in esso vi sono più partizioni che numeri. Una tal constatazione ci suggerisce di ampliarlo interpretando come nuovi numeri le partizioni stesse. In completa analogia con quanto venne fatto nei capitoli precedenti, noi tenteremo dunque di costruire un calcolo con le partizioni. Eccone i primi passi:

Definizione 133 (Partizioni uguali). Due partizioni (A/B) e (A'/B') si dicono uguali se A coincide con A' e B con B'.

Quando si divide il campo razionale per mezzo del numero 2, questo numero stesso può, come sappiamo, venire inserito tanto nella classe minore quanto nella maggiore. Si ottengono così due

partizioni che nel senso della nostra definizione sarebbero differenti, mentre di solito si riguardano come sostanzialmente uguali; correggeremo dunque l'anzidetta definizione, affermando che le due partizioni (A/B) e (A'/B') risultano uguali quando A coincide con A' e B coincide con B' salvo al più l'eccezione di un numero.

Definizione 134 (Confronto di partizioni). La partizione (A/B) dicesi minore della partizione (A'/B') , se esistono dei numeri razionali che appartengono ad A' senza appartenere ad A .

Definizione 135 (Partizione positiva). Una partizione dicesi positiva, se la sua classe inferiore contiene almeno un numero positivo.

Definizione 136 (Partizione negativa). Una partizione dicesi negativa, se la sua classe superiore contiene almeno un numero negativo.

Definizione 137 (Partizione nulla). Una partizione dicesi nulla, se nella sua classe inferiore non si trovano numeri positivi, e nella sua classe superiore non si trovano numeri negativi.

Definizione 138 (Somma di partizioni). Per somma delle due partizioni (A/B) e (A'/B') si intende quella partizione $(A + A'/B + B')$, la cui classe inferiore contiene tutti i numeri che si ottengono sommando un termine di A con uno di A' , e la cui classe superiore contiene tutti i numeri che si ottengono sommando un termine di B con uno di B' .

Questi pochi cenni possono bastare per far comprendere al lettore come è costruita la nuova teoria. Naturalmente bisognerebbe provare che i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza, di somma, ecc., godono di tutte le proprietà formali possedute dagli analoghi concetti dell'aritmetica dei numeri razionali.

Per numero razionale intenderemo poi, non il numero stesso, ma la partizione da esso generata. Tra i razionali e le loro partizioni sussiste una corrispondenza biunivoca, simile e isomorfa.

Che accade ora se, nel campo numerico delle partizioni, formiamo delle nuove partizioni? Ci troveremo come prima, fuori del campo di partenza? No; vale infatti il seguente

Teorema 134 (partizioni del campo reale). Per ogni partizione del campo reale, ne esiste una del campo razionale a essa equivalente.

Ma in che modo intendere quest'equivalenza? Indichiamo una partizione del campo reale con (A/B) e una del campo razionale con (A'/B') : la classe A sarà costituita da soli numeri reali, mentre A' è costituita da soli numeri razionali. Per confrontare le due partizioni possiamo limitarci ai soli numeri reali-razionali che costituiscono A : diremo che la partizione (A/B) equivale alla partizione (A'/B') se i numeri reali-razionali che costituiscono le classi A e B sono proprio i corrispondenti dei numeri razionali che costituiscono A' e B' .

Tenuto conto di questa definizione, non è difficile dimostrare il teorema poco fa enunciato. Data una partizione del campo reale (A/B) , costruiamone una del campo razionale (A'/B') con la seguente regola: un razionale r verrà aggregato alla sotto classe A' se il numero reale-razionale che gli corrisponde fa parte di A ; verrà invece aggregato a B' , se il numero reale-razionale fa parte di B . La partizione (A'/B') così originata equivale evidentemente alla partizione da cui siamo partiti.

Il nostro teorema ci prova dunque che ogni partizione del campo reale è, di nuovo, un numero reale. E cioè, non si esce fuori del campo reale, formando in esso delle partizioni. I numeri reali costituiscono perciò un sistema continuo: il cosiddetto continuo reale.

Accenniamo a un problema; la cui discussione ci faccia vedere concretamente come si opera in pratica con questi concetti. È noto che un insieme di punti può non avere né un massimo né un minimo, anche se questi punti stanno tutti su di una porzione limitata di retta (ciò accade, per esempio, delle frazioni proprie, che sono comprese tutte fra zero e 1). Vogliamo dimostrare che in queste condizioni un insieme avrà sempre un limite superiore e un limite inferiore (nel nostro esempio sono appunto i numeri zero e 1). Al fine di definire con esattezza che cosa si intenda per limite inferiore, cominciamo con l'introdurre il concetto di minorante: dicesi minorante di un insieme un numero inferiore a tutti quelli dell'insieme (che cioè, sull'asse numerico, stia alla loro sinistra). Ovviamente esistono infiniti minoranti di un insieme limitato; ebbene, il massimo fra essi è proprio il limite inferiore dell'insieme. Questo è dunque un numero minore di tutti i termini dell'insieme, che perde però questa sua proprietà non appena lo si voglia aumentare, sia pur di pochissimo. Il problema se esista il limite inferiore di un insieme può venir formulato così: siamo sicuri che l'insieme dei minoranti possieda un massimo? Per rispondervi, scindiamo i razionali in due classi, ponendo nella minore tutti quei numeri che stanno alla sinistra di ogni numero dell'insieme, e nella maggiore tutti quelli che stanno alla destra di almeno un numero dell'insieme. Otterremo in tal modo, com'è chiaro, una partizione del campo razionale, e perciò un numero reale g . Questo g non può essere maggiore di alcun numero dell'insieme. Se invece fosse maggiore di uno fra essi, per esempio di a , dovrebbe esistere nella classe inferiore di g qualche razionale maggiore di a , e questo contraddirebbe la nostra definizione di g ⁽⁴⁾. Dunque tutti i numeri dell'insieme dato cadono alla destra di g , per cui può dirsi un minorante (nel senso poco fa definito). Se però lo si sostituisce con un numero un po' maggiore, $g + \epsilon$, questa proprietà viene subito a mancare. Nella classe inferiore di $g + \epsilon$: cadrà infatti qualche numero che apparteneva alla classe superiore di g , e che perciò lasciava alla sua sinistra almeno un termine dell'insieme dato. Dunque $g + \epsilon$: non è più minorante; e cioè il numero g è il massimo dei minoranti. Se il lettore trova un po' difficile questa dimostrazione, voglio suggerirgli un mezzo assai utile per comprenderla chiaramente: provi a dimostrare da sé, in modo del tutto analogo, l'esistenza del limite superiore; egli si troverà costretto a ripercorrere ancora una volta l'intera catena di pensieri qui accennati, e finirà certo per raggiungere una completa chiarezza.

La teoria di Dedekind può venir modificata considerando, per ciascuna partizione, la sua sola classe inferiore (dato che essa determina univocamente anche la superiore); in questo caso tale classe porterà il nome di segmento. Non è difficile ripetere per i segmenti tutte le definizioni poco sopra enunciate per le partizioni. È per l'appunto in questo modo che i numeri reali vengono introdotti da Russell.

48.1.3 Confronto delle due teorie

Tanto gli enti creati dalla teoria di Cantor, quanto quelli creati dalla teoria di Dedekind vennero da noi detti numeri reali; è lecita una tal denominazione? Sono essi davvero i medesimi numeri? Di identità non si può certamente parlare, trattandosi di enti definiti in due maniere affatto diverse. Sussiste però una corrispondenza molto intima fra i due sistemi: essi possono rappresentarsi l'uno sull'altro in modo biunivoco, simile e isomorfo, e cioè posseggono esattamente la stessa struttura. Per riconoscerlo, basterà una semplice riflessione. La teoria di Cantor opera con successioni, o - come ora preferiremo dire - con serie di intervalli (interni l'uno all'altro e infinitamente decrescenti); e noi sappiamo che esistono infinite serie diverse che tendono al medesimo punto. Immaginiamole distese tutte sulla medesima retta numerica; i loro estremi sinistri formeranno la classe inferiore e i loro estremi destri la classe superiore di una partizione, nel senso di Dedekind.

⁴È poi ovvio che g non può essere uguale ad alcun numero dell'insieme. essendo questo, per ipotesi, privo di un minimo.

La partizione è quindi null'altro che un modo di concepire simultaneamente tutte le possibili serie di intervalli che si addensano attorno a un punto.

Partendo dalla teoria di Dedekind si può provare che una serie di intervalli interni l'uno all'altro e infinitamente decrescenti individua un punto; viceversa, partendo dalla teoria di Cantor, si può dimostrare che una partizione determina un numero. Sebbene le due teorie siano indipendenti l'una dall'altra, ogni teorema di analisi può venir formulato indifferentemente tanto nella prima quanto nella seconda; in matematica si parla perciò di numeri reali *sic et simpliciter*, senza distinguere se si tratti di numeri nel senso di Cantor o nel senso di Dedekind.

Il concetto base della teoria di Cantor è la successione; il concetto base di quella di Dedekind è la classe. Quest'ultima presenta certi vantaggi sulla prima, perché determina un numero reale con un'unica partizione, mentre la teoria di Cantor esprime il medesimo numero con diverse successioni. Ogni volta che, nella teoria di Cantor, si definisce uno dei concetti di maggiore, minore, uguale, positivo, somma, ecc. è necessario dimostrare che le proprietà formali del concetto definito non dipendono dalla speciale successione scelta per esprimere i numeri considerati; al contrario, nella teoria di Dedekind, tutto ciò non è più necessario: essa è quindi più semplice e più spedita.

Da un altro punto di vista si dovrà invece preferire la teoria di Cantor: mentre quella di Dedekind serve esclusivamente allo studio dei continui lineari, quella di Cantor può invece studiare i continui a un numero qualunque di dimensioni (basterà a tale scopo che in luogo di serie di segmenti, infinitamente decrescenti e interni l'uno all'altro, si prendano in considerazione serie di intervalli piani, di intervalli spaziali, ecc.).

Abbiamo visto, alcune pagine addietro, che la teoria di Dedekind riesce a caratterizzare la continuità della retta in termini estremamente semplici e chiari; chiediamoci, ora, in che modo la stessa cosa possa venir formulata dal punto di vista di Cantor.

A qualcuno potrebbe venire in mente che un insieme risulti continuo quando è chiuso rispetto all'operazione di limite (quando contiene cioè tutti i suoi punti limite). La cosa però non è vera, come risulta dal seguente esempio di insieme chiuso e non continuo

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

La discontinuità di quest'insieme dipende dal fatto che, salvo lo zero, ogni termine dell'insieme è isolato (possiede cioè un intorno in cui non cadono altri punti dell'insieme). Affinché un insieme risulti continuo, sarà perciò necessario che ogni suo punto sia punto limite. L'essenza della continuità sembra dunque risiedere nelle due condizioni:

- 1) che ogni punto dell'insieme sia punto limite;
- 2) che ogni punto limite appartenga all'insieme.

Nella teoria matematica degli aggregati, la totalità dei punti limite di un insieme M porta il nome di insieme derivato di M e suol denotarsi con M' . Valendoci di questa terminologia, possiamo dunque enunciare le due proprietà anzidette degli insiemi continui nel seguente modo:

- 1) l'insieme continuo deve essere contenuto per intero nel suo derivato (M deve far pane di M');
- 2) l'insieme derivato deve essere contenuto per intero nell'insieme continuo (M' deve far pane di M).

Queste due proprietà, simultaneamente prese, ci dicono che M deve coincidere con M' . Ma è noto che un insieme, il quale coincida con il suo derivato, porta il nome di perfetto; parrebbe quindi che il concetto di insieme continuo debba identificarsi con quello di insieme perfetto.

Questa fu anche, in un primo tempo, l'opinione di Cantor; più tardi egli dovette però abbandonarla, quando scoperse l'esistenza di insiemi perfetti che non sono densi in nessun intervallo della retta numerica, per piccolo che esso sia.

Per dare l'esempio di un insieme perfetto e non denso, cominciamo a prendere un segmento arbitrario AB e, dopo averlo diviso in tre parti uguali, portiamogli via quella di mezzo, lasciando però, di tale parte, gli estremi; ripetiamo poi la stessa operazione su ognuna delle parti rimanenti, cancellando di nuovo da ognuna di esse il suo terzo intermedio (salvo gli estremi); e così via senza fermarci mai. In tal modo otterremo, per così dire, un insieme poroso, infinitamente bucherellato, con le seguenti proprietà:

- 1) di essere chiuso, e cioè di contenere tutti i suoi punti limite: è chiaro infatti che, sopprimendosi ogni volta solo la parte interna di un intervallo (esclusi i suoi estremi), non si può ricavare, dall'insieme chiuso AB , altro che un insieme nuovamente chiuso, la qual cosa varrà pure se si prosegue l'operazione all'infinito;
- 2) di essere costituito da soli punti limite: non si potranno infatti avere punti isolati, poiché non si sopprimono mai due intervalli adiacenti (questa proprietà, insieme con la precedente, ci dice che l'insieme considerato è perfetto);
- 3) di non essere denso in alcuna sua parte: non esiste cioè un intervallo in cui fra due punti qualunque dell'insieme cada sempre un altro punto dell'insieme; e infatti, per quanto piccolo sia l'intervallo da noi scelto, sempre si troveranno in esso delle coppie di punti (estremi di qualche intervallo cancellato), fra i quali non cade alcun altro punto dell'insieme.

La proprietà espressa dal termine "perfetto" non basta dunque a caratterizzare la continuità della retta. Per ottenere il continuo lineare, è necessario esigere che un insieme, oltre a essere perfetto, sia anche denso.

48.1.4 Unicità del sistema dei numeri reali

Abbiamo inserito i numeri razionali fra gli interi, e gli irrazionali fra i razionali; né possiamo avere, ormai, alcun dubbio sul significato di quest'inserzione. Applicando nuovamente al campo dei numeri reali l'operazione di limite (o l'analoga operazione di partizione), non usciremo più fuori di esso. Con la scoperta dei numeri reali, il processo dell'ampliamento numerico sembra dunque avere raggiunto una certa conclusione. Ma questa è per ora soltanto un'ipotesi. Che cosa potremmo infatti obiettare a chi sostenesse che un giorno verrà forse scoperta qualche operazione, la quale ci costringerà a infittire di nuovo il sistema dei numeri reali?

Per rispondere a questa domanda, occorre innanzi tutto prendere in esame i presupposti del problema; cercare cioè di chiarire un po' bene che cosa si intenda per *sistema di numeri*.

Quando ci domandiamo se il campo reale possa venir ampliato con l'inserzione di altri numeri, noi pensiamo, com'è ovvio, che il nuovo sistema dovrebbe avere con l'antico un certo tipo di somiglianza; ma in che cosa consisterà precisamente questa somiglianza? Vi sono alcune condizioni assai semplici, che sembrano caratterizzare il concetto di sistema numerico (nel senso più ampio del termine). Tali condizioni sono le seguenti:

- 1) i suoi termini devono risultare ordinati;

- 2) devono esistere nel sistema quattro operazioni, fornite delle stesse proprietà formali di cui godono le quattro operazioni base dell'aritmetica;
- 3) un suo sottoinsieme (o insieme parziale) deve riuscire rappresentabile in modo biunivoco, simile e isomorfo sul sistema dei numeri razionali (il sistema considerato deve presentarsi cioè come un ampliamento del campo razionale);
- 4) deve essere valido il seguente assioma aritmetico: se α e β sono due numeri positivi del sistema e $\alpha < \beta$, si può, addizionando a α sé stesso un numero sufficiente di volte, ottenere un numero somma maggiore di β ; in breve, deve sempre esistere un numero n tale, che sia $n\alpha > \beta$.

Precisato con queste condizioni il concetto di sistema numerico, vedremo facilmente che alla nostra domanda di poco fa deve venir data una risposta negativa. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 135 (Teorema di completezza). I numeri reali costituiscono un sistema che non può ammettere alcun ampliamento soddisfacente le condizioni 1-4

Per dimostrarlo, indichiamo con R il sistema dei numeri reali, e con $\overline{R}$ un altro sistema che soddisfi le nostre quattro condizioni e contenga tutti gli elementi di R . Prendiamo poi un numero arbitrario del sistema R e denotiamolo con $\overline{a}$. Per la terza condizione, R dovrà contenere un sottoinsieme con la stessa struttura del sistema razionale: lo chiameremo quindi insieme dei numeri razionali di R . Tutti questi numeri razionali potranno venir suddivisi in due classi, secondo che sono maggiori o minori di $\overline{a}$. La partizione così ottenuta definirà un momento reale a , che appartiene esso pure a R . Vogliamo studiare la differenza $a - \overline{a}$. Questi due numeri sono racchiusi dalla stessa partizione del campo razionale, di modo che, rappresentati sulla retta numerica, non possono racchiudere fra di loro alcun segmento finito per piccolo che esso sia. La loro differenza potrebbe quindi essere, tutt'al più, una quantità infinitesima attuale. La comparsa di un infinitesimo attuale contraddice però - come vedremo meglio fra poco - l'assioma di Archimede (cioè la condizione 4). Dunque, nel sistema $\overline{R}$, a dovrà essere uguale ad $\overline{a}$; e cioè ogni elemento di $\overline{R}$ è un numero reale ordinario. Se ne conclude che $\overline{R}$ non può esprimere un ampliamento di R .

Sorge ora un secondo problema: per evitare la presenza di lacune nel campo razionale abbiamo fatto ricorso a quattro differenti metodi operativi: le successioni convergenti, le serie di intervalli decrescenti e interni l'uno all'altro, le partizioni di Dedekind e i segmenti. Tutti i sistemi così ottenuti risultarono simili e isomorfi fra loro. Non esisteranno, ciò nondimeno, altre vie capaci di condurci a sistemi numerici essenzialmente nuovi? In termini più esatti: può esistere un qualche sistema, soddisfacente le condizioni 1-4. e chiuso rispetto all'operazione di limite, il quale differisca in qualcosa di sostanziale dal sistema dei numeri reali? La risposta è contenuta nel seguente teorema:

Teorema 136 (Teorema di unicità). Ogni sistema, che soddisfi le condizioni precedentemente enunciate e sia chiuso rispetto all'operazione di limite, può venir riferito termine a termine al sistema dei numeri reali con una corrispondenza biunivoca, simile e isomorfa. Vi è dunque, a rigore, un unico sistema del tipo accennato.

Indichiamo di nuovo con R il sistema dei numeri reali e con R un altro sistema qualunque che soddisfi le condizioni date. In tale ipotesi R dovrà ovviamente contenere un sottoinsieme con la struttura dei numeri razionali: valendoci di esso noi cercheremo di provare che a ogni elemento di R se ne può far corrispondere uno di R . Ogni numero reale a può, com'è noto, venir determinato da una partizione razionale, di modo che si può scrivere $a = (A/B)$

Poiché a ogni razionale di $\mathbb{R}$ corrisponde un razionale di $\mathbb{R}$, si potrà formare in quest'ultimo sistema una partizione esattamente corrispondente alla (A/B) . Si otterrà in tal modo la partizione (A/B) , che per la continuità di $\mathbb{R}$ determinerà un numero $\bar{\alpha}$ di questo sistema. A ogni numero reale $\alpha = (A/B)$ viene dunque a corrispondere un elemento $\bar{\alpha} = (A/B)$ del sistema $\mathbb{R}$ e questa corrispondenza risulta, evidentemente, simile e isomorfa. $\mathbb{R}$ deve perciò contenere almeno tanti elementi quanti sono quelli di $\mathbb{R}$ (in termini più rigorosi: un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ deve potersi rappresentare in modo biunivoco, simile e isomorfo su $\mathbb{R}$). Segue poi, dal teorema di completezza, che $\mathbb{R}$ non può contenere più elementi di $\mathbb{R}$, dato che $\mathbb{R}$ non è ampliabile. Dunque $\mathbb{R}$ deve, in sostanza, coincidere con $\mathbb{R}$. E questo equivale proprio a dire che il nostro sistema dei numeri reali è l'unico sistema possibile, privo di lacune e soddisfacente le quattro condizioni di pagina 479.

Domandiamoci infine: vi è qualcosa, nel mondo esterno, che corrisponda esattamente al continuo dei numeri reali? Qualcuno penserà che il continuo aritmetico sia soltanto la copia del continuo spaziale. Boltzmann e Clifford hanno richiamato l'attenzione sulla possibilità che il nostro spazio, anzi anche il tempo, siano discontinui, sicché, per esempio, tutti i movimenti naturali consisterebbero di piccolissimi salti, come nei film. Tutte le osservazioni empiriche sarebbero compatibili anche con l'ipotesi di uno spazio e di un tempo discontinui del resto la meccanica ondulatoria moderna afferma che è scientificamente privo di senso parlare di proprietà geometriche dello spazio fisico al di sotto di un certo limite (e cioè al di sotto dell'ordine di grandezza degli atomi). Dedekind notò d'altra parte che la stessa geometria può, per un certo rispetto, fare a meno dello spazio continuo. Tenendo conto per esempio dei soli punti che in un certo sistema di coordinate possono venir espressi mediante numeri algebrici, si ottiene uno spazio ovunque discontinuo; "eppure, malgrado la sua discontinuità, malgrado che presenti in sé infinite lacune, questo spazio permetterebbe proprio tutte le costruzioni che compaiono negli Elementi di Euclide, e tutte con quella stessa esattezza con cui vengono eseguite nello spazio continuo: la sua discontinuità non potrebbe quindi venir rilevata nella scienza di Euclide". Dedekind prosegue: "Se poi qualcuno mi dicesse che noi non siamo in grado di immaginare lo spazio altrimenti che continuo, io mi permetterei di mettere in dubbio le sue parole, e gli farei osservare quanta finezza di cultura scientifica sia necessaria per comprendere chiaramente l'essenza del continuo"⁵

Mentre per lo spazio fisico (esterno) si suole ammettere, al giorno d'oggi, la legittimità di queste osservazioni, si sostiene invece con tanta maggior ostinatezza che la prima origine del continuo matematico debba proprio venir cercata nell'intuizione visiva. Possiamo condividere anche noi questo parere? Può l'intuizione produrre davvero ciò che si vorrebbe attribuirle? Per rispondere a questo problema, cominciamo a discuterne uno più facile. Domandiamoci, cioè, se chi guardi uno spettro ottico veda o non veda un numero determinato di colori. Ovviamente non ne vede un numero determinato (quando si intendano per colori anche le singole sfumature dello spettro). Dovremo dunque concludere che egli ne vede un numero infinito, forse tanti quanti sono i numeri reali? Certamente no. Ciò sarebbe una falsificazione totale del concetto di numero: il continuo dei colori ha invero una struttura completamente diversa dal continuo matematico. Di due numeri reali è stabilito senza ambiguità se essi risultino uguali o differenti; e per quanto siano prossimi l'uno all'altro, è però impossibile sostenere che sono identici quando non coincidono. Da un colore all'altro si passa invece insensibilmente, dato che due colori vicinissimi si confondono fra loro in modo da non poter venire distinti. In termini più precisi: non ha senso, per quel che riguarda il continuo dei colori, parlare di elementi isolati che dovrebbero costituirlo. Al contrario dello spettro non è applicabile l'idea di numero, non trovandosi in esso verificata la prima ipotesi di qualunque applicazione dell'aritmetica: la possibilità di distinguere fra loro gli oggetti con i quali si vuole contare. Assai giustamente si dirà invece che i colori dello spettro sono

⁵R. DEDEKIND, Was sind und was sollen die Zahlen?, 6/a ed. (Braunschweig 1930).

innumerevoli, intendendosi affermare con ciò che non ha senso voler loro attribuire una qualsiasi specificazione numerica.

Proprio la stessa cosa accade per lo spazio visivo. Il lettore provi a domandarsi quanti punti percepisce nel campo della sua vista; se propende a credere che siano infiniti, provi ancora a domandarsi in qual maniera potrebbe giustificare la sua opinione. Possiede egli forse qualche metodo preciso per aggiungere, a un qualunque insieme di punti di quel campo, un altro punto, come possiede un metodo preciso per aggiungere, a un qualunque numero cardinale, un'altra unità? No certo; la cosa è troppo ovvia per insistervi. Vorrà invece tentare se risulti applicabile al campo visivo la definizione di infinito dovuta a Dedekind, rappresentando l'insieme di tutti i suoi punti su di una sola sua parte? Basta di nuovo una breve riflessione per convincersi che la cosa è impossibile: un tale tentativo non può avere alcun significato; perché l'unico mezzo aritmetico per rappresentare un insieme su una sua parte è l'induzione completa, e quest'unico mezzo risulta evidentemente inapplicabile all'insieme dei punti percepiti dal nostro occhio. L'asserto "Vedo infiniti punti" significa esclusivamente questo: "Non ha senso dire che ne vedo soltanto venti, oppure soltanto trenta o quaranta." Esso non ha nulla a che fare con l'infinito della matematica. (Proprio per la stessa ragione non riusciamo a costruirci, nello spazio visivo, un'immagine dell'insieme dei numeri razionali.)

Possiamo dunque concludere che i numeri reali non ci vengono suggeriti affatto né dalla natura fisica né dall'intuizione. Essi sono proprio una libera creazione della fantasia umana, sebbene esistano senza dubbio vari motivi che inducono il matematico a crearli. Questi motivi provengono in primo luogo dalla geometria (si ricordi la scoperta degli irrazionali per opera di Pitagora); in secondo luogo dal calcolo dei decimali (questo calcolo venne introdotto in matematica fin dall'epoca del Rinascimento). La trattazione dei diversi tipi di decimali fa sorgere spontanea in noi l'idea del numero reale, sebbene soltanto le teorie di Cantor e di Dedekind riescano poi a spiegarcela in forma rigorosa.

Ripensiamo ora un istante alle basi della geometria analitica. Questa scienza poggia, tra l'altro, sull'ipotesi di una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e i numeri reali. Come ormai è chiaro una tale proposizione non può venir dimostrata, ma soltanto postulata: essa costituisce l'assioma di Cantor e Dedekind, uno dei più importanti di tutta la geometria analitica ordinaria. Esistono tuttavia delle geometrie che non l'accettano.

Capitolo 49

Probabilità II

49.1 Premesse ... richiami

Definizione 139 (Numero aleatorio o variabile aleatoria). Un numero aleatorio X è una funzione a valori reali, definita su una famiglia di eventi.

Se Ω è l'insieme degli eventi sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ allora:

$$X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

49.2 Definizioni preliminari

Definizione 140 (Numero aleatorio continuo). Un numero aleatorio si dice continuo quando $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $p(X = x) = 0$, ed esiste una funzione f (densità di probabilità) definita non negativa tale che, per ogni intervallo $A = [a, b]$ si ha:

$$p(A) = p(X \in A) = \int_a^b f(x)dx$$

Osservazione 1. Se $a = b = x$ si ha $p(X = x) = 0$, se $a = -\infty$ e $b = +\infty$ si ha:

$$p(X \in \mathbb{R}) = p(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Se $f(x)$ è la densità di probabilità di un numero aleatorio X , allora:

Definizione 141 (Funzione di ripartizione). La funzione

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

è detta funzione di ripartizione.

Problema 43. Della funzione di ripartizione F , di un numero aleatorio X , sappiamo che $F(t) = 0$ se $-\infty \leq t < 0$, mentre $F(t) = c(1 - e^{-t})$ se $t \geq 0$.

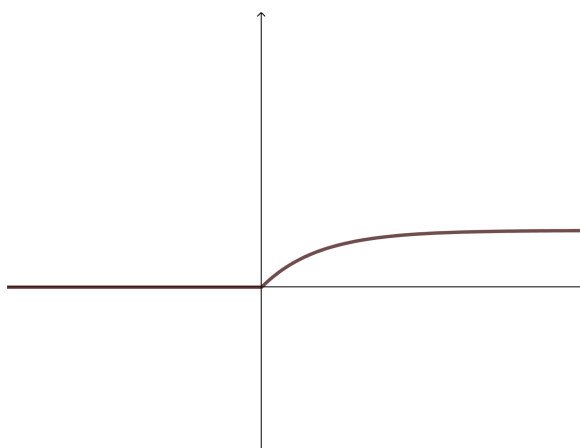
Calcolare la densità di X .

Soluzione. Tracciamo il grafico $\mathcal{G}(F)$ di $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ c(1 - e^{-t}) & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Per poter tracciare $\mathcal{G}(F)$ si deve calcolare c . Per definizione di funzione di ripartizione si ha che $F(+\infty) = 1$, quindi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} c(1 - e^{-t}) = c$$

da cui si ricava $c = 1$



Utilizzando, ora, il valore di c ricavato, calcoliamo la funzione densità di probabilità f .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha: $F'(x) = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

□

Definizione 142 (Previsione, valore atteso, media). La media di un numero aleatorio continuo X è così definita:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Nel caso dell'esercizio precedente si ha:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = (-x - 1) e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

Definizione 143 (Varianza). La varianza di un numero aleatorio continuo X si definisce mediante:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Nel caso dell'esercizio precedente si ha: (primo modo)

$$V(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} (x - 1)^2 e^{-x} dx}_{E((X - E(X))^2)} = - \frac{(2x^2 - 2x + 1) e^{-x}}{4} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

Nel caso dell'esercizio precedente si ha: (secondo modo)

$$V(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx}_{E(X^2)} - \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \right)^2}_{(E(X))^2} = 1$$

49.3 Veniamo alla “realtà”

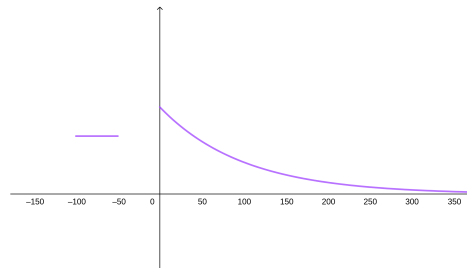
Problema 44. Se il rendimento di un titolo finanziario, in punti percentuali, può essere modellato da un numero aleatorio X con funzione di ripartizione

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -100 \\ \frac{t+100}{200} & \text{se } -100 \leq t < -50 \\ \frac{1}{4} & \text{se } -50 \leq t < 0 \\ 1 - \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{100}} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

quanto valuteremo $p(20 < X \leq 40)$ e $p(-40 < X \leq -20)$? Quanto valuteremo la probabilità di un profitto? Quale soglia ha una probabilità del 75% di non essere superata?

Soluzione. Scriviamo la funzione densità e tracciamo il suo grafico

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -100 \\ \frac{1}{200} & \text{se } -100 \leq t < -50 \\ 0 & \text{se } -50 \leq t < 0 \\ \frac{3}{400}e^{-\frac{t}{100}} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



quanto valuteremo $p(20 < X \leq 40)$?

$$\begin{aligned} p(20 < X \leq 40) &= \int_{-\infty}^{40} f(t) dt - \int_{-\infty}^{20} f(t) dt \\ &= F(40) - F(20) = 1 - \frac{3}{4}e^{-\frac{2}{5}} - 1 + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{5}} \\ &\simeq 0.111 \end{aligned}$$

quanto valuteremo $p(-40 < X \leq -20)$?

$$\begin{aligned} p(-40 < X \leq -20) &= \int_{-\infty}^{-20} f(t) dt - \int_{-\infty}^{-40} f(t) dt \\ &= F(-20) - F(-40) \\ &= \frac{-20+100}{200} - \frac{-40+100}{200} \\ &\simeq 0.1 \end{aligned}$$

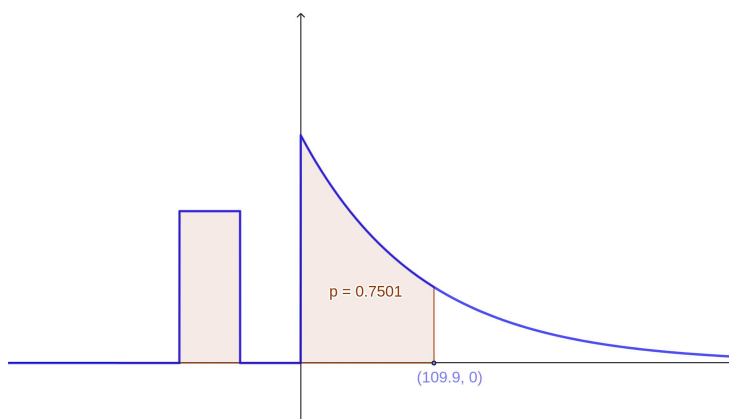
quanto valuteremo la probabilità di un profitto?

La richiesta si traduce in $p(X > 0)$

$$\begin{aligned} p(X > 0) &= 1 - p(X \leq 0) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^0 f(t) dt \\ &= 1 - F(0) \\ &= 1 - 1 + \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

quale soglia ha una probabilità del 75% di non essere superata?

La richiesta si traduce in $p(X < \beta) < 0.75$ $p(X < \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(t) dt$ osserviamo che: $p(X < 0) = 0.25$, quindi il valore cercato è maggiore di zero, $F(\beta) < 0.75$ $1 - \frac{3}{4}e^{-\frac{\beta}{100}} < 0.75$ $\frac{3}{4}e^{-\frac{\beta}{100}} > 0.25$ e quindi $\beta > 110$;



Per capire meglio <https://www.geogebra.org/classic/eshyug3z> ... forse.

Quanto vale il rendimento atteso del titolo finanziario?

Calcoliamo

$$E(X) = \int_{-100}^{-50} \frac{t}{200} dt + \int_0^{+\infty} t \frac{3}{400} e^{-\frac{t}{100}} dt = 56.25$$

□

49.4 Distribuzioni di probabilità continue

Definizione 144 (Distribuzioni di probabilità continua). Una distribuzione di probabilità è un modello matematico che collega i valori di una variabile alle probabilità che tali valori possano essere osservati.

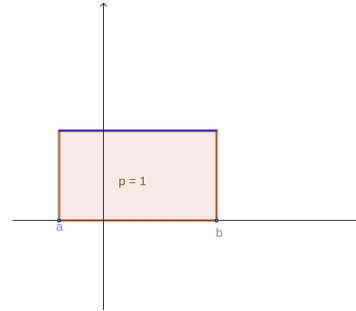
Le distribuzioni di probabilità vengono utilizzate per modellizzare il comportamento di un fenomeno in relazione alla popolazione di riferimento, ovvero alla totalità dei casi di cui lo sperimentatore osserva un dato campione.

In questo contesto la variabile è vista come un numero aleatorio la cui densità di probabilità esprime il grado di incertezza con cui i suoi valori possono essere osservati.

49.4.1 Distribuzione uniforme

Definizione 145 (Distribuzione uniforme). Un numero aleatorio continuo X ha distribuzione uniforme su un intervallo $[a, b]$ se ha densità:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Media e varianza

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Problema 45. Un numero aleatorio X con distribuzione uniforme su un intervallo ha media $E(X) = 0$ e $\sigma_X = 1$. Calcolare la densità di X e la funzione di ripartizione.

Soluzione. È sufficiente risolvere il sistema:
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 0 \\ \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = 1 \end{cases}$$
 che permette di ottenere: $f(t) =$

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{se } t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \square$$

49.4.2 Distribuzione esponenziale

Analizziamo il seguente problema: costruire un modello dell'andamento del flusso di veicoli su una strada in cui sono valide le seguenti ipotesi:

- i) stazionarietà: la probabilità di avere $0, 1, 2, \dots, k$ eventi in un intervallo di osservazione $[t, t+h]$ dipende solo da h e non da t ;

- ii) indipendenza: le variabili aleatorie associate ad intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti (non c'è memoria);
- iii) gli eventi multipli sono molto minori di quelli singoli.
- iv) il numero medio degli eventi è un parametro a

In analogia a quanto visto in precedenza (vedi 35.3) possiamo "proporre" come legge delle variabili aleatorie che descrivono il fenomeno $P_k(a, t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$. Questa legge verifica le ipotesi precedenti, in particolare si può osservare che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{P}(a, t)}{P_1(a, t)} = 0$$

dove $\tilde{P}(a, t)$ ¹ indica la probabilità di eventi multipli. Il limite ci indica che $\tilde{P}$ ha ordine di infinitesimo maggiore di P_1 .

calcolare il limite

Sia Z una variabile aleatoria, avente come legge $P_k(a, t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$, con questo significato: « tempo in cui si verifica il primo evento da un istante fissato », cioè « il primo evento si verifica nell'intervallo $[t, t+h]$ », questo enunciato corrisponde alla congiunzione di:

A: « nessun evento si verifica nell'intervallo $[0, t]$ »

B: « almeno un evento si verifica nell'intervallo $[t, t+h]$ »

Applicando la legge $P_k(a, t) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}$ è possibile determinare le probabilità dei due eventi: $P(A) = P_0(a, t)$ e $P(B) = 1 - P_0(a, h)$. Date le ipotesi di indipendenza si ha che $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, da cui:

$$P(t \leq Z \leq t+h) = e^{-ta} - e^{-(t+h)a}$$

Ma possiamo anche scrivere:

$$P(t \leq Z \leq t+h) = \int_t^{t+h} a e^{-a\tau} d\tau$$

La variabile aleatoria Z è una variabile aleatoria continua, cioè esiste una funzione f non negativa, integrabile e continua tale che per ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ si ha:

$$P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} a e^{-a\tau} d\tau$$

nell'esempio si ha:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

Problema 46. In una autostrada transitano 10 veicoli al minuto.

Qual è la probabilità che l'intervallo fra il passaggio di un veicolo ed un altro sia maggiore di 10 secondi?

¹ $\tilde{P}(a, t) = 1 - P_0(a, t) - P_1(a, t)$

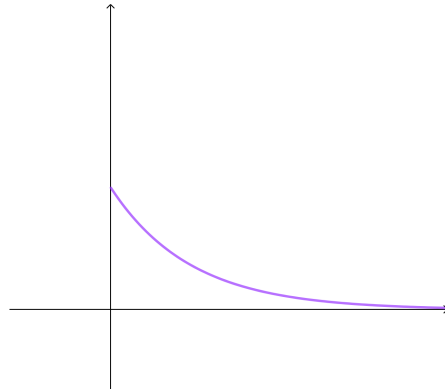
Soluzione. Si può supporre che la legge che descrive il fenomeno abbia una densità esponenziale, dopo aver calcolato la media (parametro $a = \frac{1}{6}$), si può calcolare la probabilità che in un intervallo di 10 secondi passi almeno una vettura:

$$P(0 \leq Z \leq 10) = \int_0^{10} \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}\tau} d\tau = 1 - e^{-\frac{5}{3}}$$

passando al complementare otteniamo il risultato ($\cong 18\%$) □

Definizione 146 (Distribuzione esponenziale). Un numero aleatorio continuo X ha distribuzione esponenziale se ha densità:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Media e varianza

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

49.4.3 Distribuzione normale

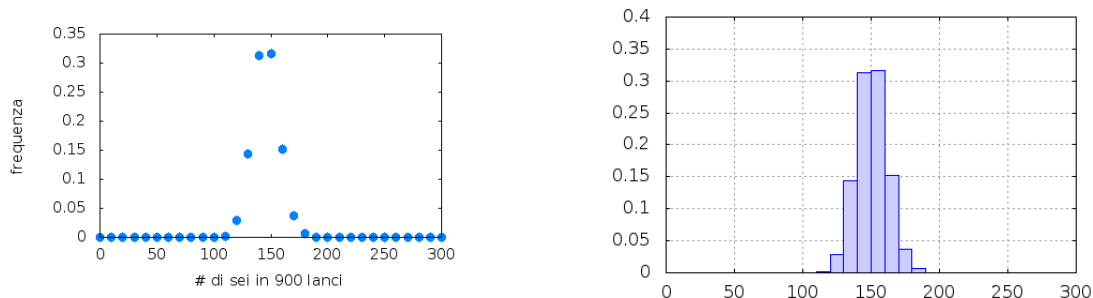
49.4.4 “Costruzione” della distribuzione normale

Problema 47. Un dado equo viene lanciato 900 volte sia X il numero di volte in cui compare il 6.

Studiare la legge di X .

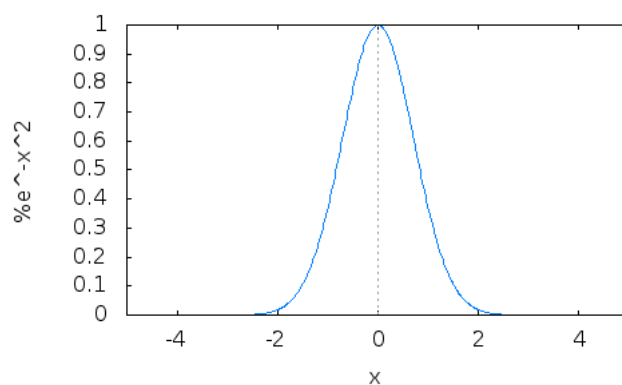
Soluzione “sperimentale”. Facciamo le prove (esperimento ... virtuale wxMaxima)

```
passi:89$
array(x,passi)$
ripeti:2500$
for j:0 step 1 thru passi do (x[j]:0)$
for k:1 step 1 thru ripeti do (conta:0,
for i:1 step 1 thru 900 do (esito:random(6)+1, if esito=6 then
conta:conta+1), fascia: truncate(conta/(10)),
x[fascia]:x[fascia]+1)$
listarray(x);
```



La funzione che meglio interpola i punti ricavati in precedenza è del tipo

$$\mathcal{N}(x, k, s) = ke^{-sx^2}$$

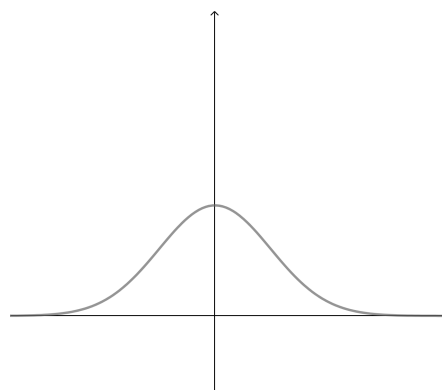


Affinché $\mathcal{N}(x, k, s)$ risulti la legge di una variabile aleatoria si ha: $s = \frac{1}{2\sigma^2}$ $k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. □

Purtroppo la funzione $\mathcal{N}$ non ammette primitiva elementare, e pertanto un qualsiasi integrale calcolato su di un intervallo deve essere calcolato per via numerica.

Definizione 147 (Distribuzione normale). Un numero aleatorio continuo X ha distribuzione normale se ha densità:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$



Media e varianza

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Basta osservare che la funzione integranda è dispari.

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -x\mathcal{N}(x)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(x) dx \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

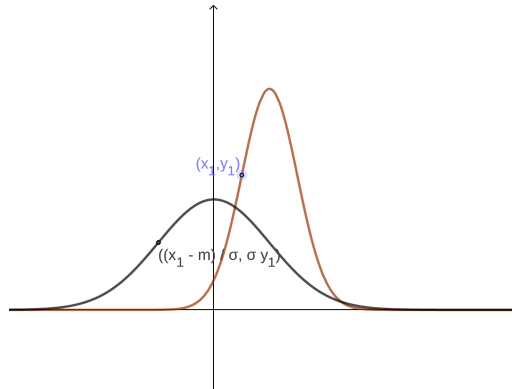
La distribuzione normale $\mathcal{N}(x)$ viene abitualmente chiamata normale standard. ($\mathcal{N}_{(0,1)}$).

In generale definiamo $\mathcal{N}_{(m,\sigma)}$ la distribuzione normale la cui densità è:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $E(X) = m$ e $V(X) = \sigma^2$.

Grazie alla relazione $\mathcal{N}_{(m,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} \mathcal{N}_{(0,1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$



è sempre possibile riportare una distribuzione $\mathcal{N}_{(m,\sigma)}$ in forma standard ($\mathcal{N}_{(0,1)}$).

Si può osservare che, detta $\Phi_{(m,\sigma)}$ la funzione di ripartizione di $\mathcal{N}_{(m,\sigma)}$ si ha:

$$\Phi_{(m,\sigma)}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \mathcal{N}_{(0,1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx = \int_{-\infty}^{y=\frac{x-m}{\sigma}} \mathcal{N}_{(0,1)}(y) dy$$

cioè:

$$\Phi_{(m,\sigma)}(x) = \Phi_{(0,1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Problema 48. Si sa che il voto di maturità degli studenti segue una legge normale di media $m = 75$ e varianza $\sigma^2 = 104$.

1 Qual è la percentuale di voti più alti di 81?

2 Qual è la percentuale di bocciati?

Soluzione. Qual è la percentuale di voti più alti di 81?

Il numero aleatorio X associa allo studente S il suo voto di maturità x $X(S) = x$. X segue una legge $\mathcal{N}_{(75, \sqrt{104})}$.

Ci viene chiesto di calcolare:

$$\begin{aligned} p(X \geq 81) &= \int_{81}^{+\infty} \mathcal{N}_{(75, \sqrt{104})}(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{81} \mathcal{N}_{(75, \sqrt{104})}(x) dx \\ &= 1 - \Phi_{(0,1)}\left(\frac{81 - 75}{\sqrt{104}}\right) = 1 - \Phi_{(0,1)}(0.59) \end{aligned}$$

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	Seconda cifra decimale di z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

$$p(X \geq 81) = 1 - 0.72240 \simeq 0.27$$

Qual è la percentuale di bocciati?

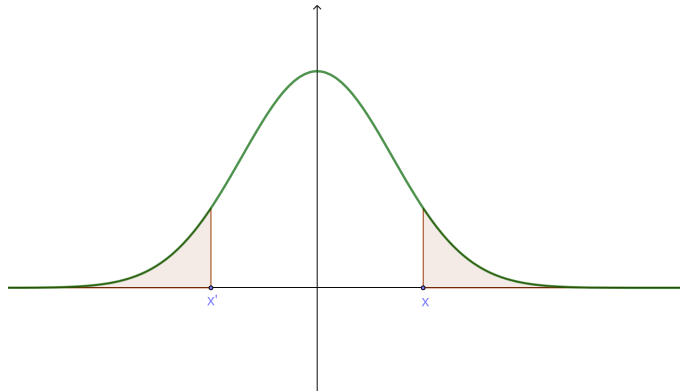
Il numero aleatorio X associa allo studente S il suo voto di maturità x $X(S) = x$. X segue una legge $\mathcal{N}_{(75, \sqrt{104})}$.

Ci viene chiesto di calcolare:

$$\begin{aligned} p(X < 60) &= \int_{-\infty}^{60} \mathcal{N}_{(75, \sqrt{104})}(x) dx \\ &= \Phi_{(0,1)}\left(\frac{60 - 75}{\sqrt{104}}\right) = \Phi_{(0,1)}(-1.47) \end{aligned}$$

La tabella della funzione di ripartizione $\Phi_{(0,1)}$ riporta solo i valori per $x \geq 0$.

La funzione densità è pari quindi:



pertanto: $\Phi_{(0,1)}(-1.47) = 1 - \Phi_{(0,1)}(1.47)$

Tavole della funzione di ripartizione della variabile Normale Standardizzata:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	Seconda cifra decimale di z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95359	0.95440

$$p(X < 60) = 1 - 0.92922 \simeq 0.07$$

49.4.5 Con Python

```
[1]: from sympy import *
      from sympy.stats import *
      init_printing()
      import numpy as np
      import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[2]: z,x = symbols('z,x')
      E = 75
      V = 104
      E, V
```

```
[2]: (75, 104)
```

```
[3]: sigma = sqrt(V)
      N(sigma,3)
```

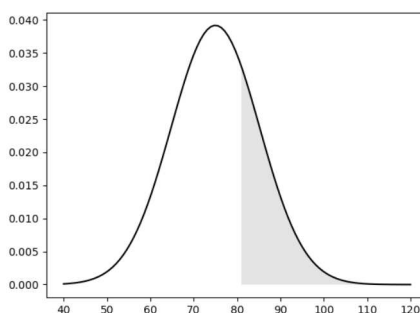
```
[3]: 10.2
```

```
[4]: fig, ax = plt.subplots()
      media = E
      X = Normal('x',media, sigma)
```

```

G = density(X)(z)
x_array = np.linspace(81, 120, 100)
f_array = lambdify(z, G)(x_array)
x_array1 = np.linspace(40, 120, 100)
f_array1 = lambdify(z, G)(x_array1)
ax.plot(x_array1, f_array1, color = 'black')
ax.fill_between(x_array, f_array, facecolor = 'lightgrey', alpha = 0.6)
plt.show()

```



```

[5]: p1 = P(X > 81)
      N(p1,3)

```

```

[5]: 0.278

```

```

[6]: p2 = P(X<60)
      N(p2,5)

```

```

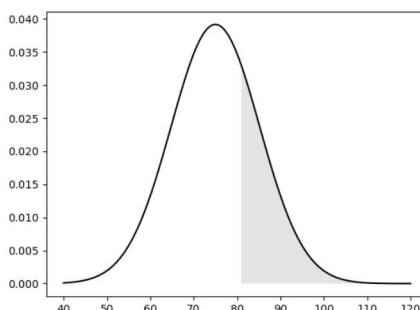
[6]: 0.070663

```

```

[7]: fig, ax = plt.subplots()
      x_array = np.linspace(40, 60, 100)
      f_array = lambdify(z, G)(x_array)
      x_array1 = np.linspace(40, 120, 100)
      f_array1 = lambdify(z, G)(x_array1)
      ax.plot(x_array1, f_array1, color = 'black')
      ax.fill_between(x_array, f_array, facecolor = 'lightgrey', alpha = 0.6)
      plt.show()

```



□

49.5 Il teorema del limite centrale

Teorema 137 (del Limite Centrale). Sia data una popolazione numerica infinita di media m e deviazione standard σ da cui vengono estratti dei campioni casuali formati ciascuno da n individui, con n abbastanza grande ($n > 30$). La distribuzione delle medie campionarie tende a una distribuzione gaussiana di media $m_C = m$ e deviazione standard $\sigma_C = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

In altre parole, anche in una popolazione che non segue il modello gaussiano, le medie campionarie, se calcolate su campioni abbastanza grandi, tendono a distribuirsi secondo una legge gaussiana.

Sia X una variabile aleatoria reale, dotata di media $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}$. Prese n v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ indipendenti e tutte distribuite con la legge di X , costruita, per ogni X_i la v.a. $Y_i = \frac{X_i - \bar{x}}{\sigma}$, si ha: $E(Y_i) = E\left(\frac{X_i - \bar{x}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X_i) - \bar{x}) = 0$, e $V(Y_i) = E\left(\left(\frac{X_i - \bar{x}}{\sigma} - 0\right)^2\right) = \frac{V(X_i)}{\sigma^2} = 1$.

Y_i è centrata ed ha varianza unitaria. Le Y_i sono fra loro indipendenti², pertanto la v.a.

$$Z_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\bar{x}}{\sqrt{n}\sigma}$$

è centrata ed ha varianza 1.

Teorema 138 (del limite centrale classico). Nelle ipotesi sopra elencate la v.a. Z_n converge verso la distribuzione normale ridotta, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} dx$$

« Questo teorema, di straordinaria potenza, ha quasi un tocco di magia: esso indica un procedimento di limite che partendo da una variabile aleatoria qualsiasi (purché di varianza finita) ci conduce alla distribuzione normale. Nessun enunciato potrebbe meglio sottolineare l'ordine che emerge dal disordine.»

49.6 Applicazioni numeriche

Molto spesso viene assegnata la v.a $W_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$, che in molti casi concreti ha il significato di frequenza relativa. Dati due numeri a, b con $a < b$ si vuole calcolare: $P(a < W_n < b)$,

Nell'ipotesi che $E(X_i) = \bar{x}$ e $V(X_i) = \sigma^2$ si ha: $E(W_n) = \bar{x}$ e $V(W_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ e scarto quadratico medio $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

²somma di v.a. indipendenti

Il teorema del limite centrale afferma che W_n ha distribuzione che può essere trasformata applicando la traslazione di $-\bar{x}$ e successiva dilatazione di fattore $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (scarto quadratico medio di W_n) in $W'_n = \frac{W_n - \bar{x}}{\sigma\sqrt{n}}$ ottenendo che la W'_n è distribuita secondo la $N_{(0,1)}$. Pertanto applicando ai valori a, b la trasformazione si ottiene:

$$P(a \leq W_n \leq b) = P\left(\frac{a - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n} \leq W'_n \leq \frac{b - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

49.6.1 Esempi

Problema 49. Quanti lanci di una moneta equa occorre fare affinché la probabilità di ottenere una frequenza compresa fra 0.48 e 0.52 sia maggiore di 0.99?

Soluzione. Le v.a. X_i rappresentano l'esito del lancio (1 vinco, 0 perdo). $E(X_i) = \frac{1}{2} = \bar{x}$, $V(X_i) = \frac{1}{4} = \sigma^2$. Il problema ci chiede di calcolare n :
 $P(0.48 \leq W_n \leq 0.52) > 0.99$. Trasformando W_n in W'_n si ottiene:

$$P(0.48 \leq W_n \leq 0.52) = P\left(\frac{0.42 - 0.5}{0.5}\sqrt{n} \leq W'_n \leq \frac{0.52 - 0.5}{0.5}\sqrt{n}\right)$$

ora dato che le tavole ci forniscono la probabilità del tipo $P(x < \alpha)$, si può così procedere: $\frac{0.99}{2} + 0.5 = 0.995$ rappresenta $P(x < \alpha)$ quindi cerco nelle tavole il valore di α osservo che il valore 0.9951 si ottiene da un $\alpha = 2.58$. Pertanto si ha: $\frac{0.52 - 0.5}{0.5}\sqrt{n} = 2.58$ risolvendo in n si ottiene $n > 4160$ $\square$

Problema 50. Uno studente, per giungere puntuale a scuola, prende un autobus, che però non è molto puntuale. L'ora media di passaggio sono le 7.45, con uno scarto quadratico medio (σ) di 5 minuti. A quale ora lo studente deve trovarsi alla fermata per avere probabilità del 95% di arrivare in orario a scuola? (Si suppone che i passaggi dell'autobus seguano una legge normale.

Soluzione. La v.a. X minuto di passaggio dell'autobus (rispetto l'ora media, 3 minuti prima $X = -3$ sei minuti dopo $X = 6$) è distribuita secondo la densità $N(0, 5) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{50}}$, applicando a X la trasformazione $Y = \frac{X}{5}$ si ottiene una v.a Y distribuita secondo $N(0, 1)$ risolviamo il problema per Y , in particolare cerchiamo α tale che $P(y < \alpha) = \frac{0.95}{2} + 0.5$, con l'uso delle tavole si trova $\alpha = 1.97$, applichiamo la trasformazione inversa, $X = \sigma Y$, si ottiene $1.97 \cdot 5 = 9.85$. Pertanto lo studente deve trovarsi alla fermata con circa dieci minuti di anticipo. $\square$

Problema 51. Nella trasmissione di una immagine il colore di ogni pixel è descritto da 8 bit, cioè da un vettore $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ dove gli a_i possono assumere valore 0 oppure 1. Durante la trasmissione di ogni singolo bit si può avere una distorsione con probabilità $p = 0.0002$. Un'immagine è composta da 512×256 pixel:

- qual è il numero medio di pixel distorti?
- qual è la probabilità che l'immagine contenga più di 200 pixel distorti?

Soluzione. Costruiamo le variabili aleatorie:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{l'i-esimo pixel è distorto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $p(X_i = 0) = (1 - p)^8$ per cui $\bar{p} = p(X_i = 1) = 1 - (1 - p)^8$

La v.a. $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{131072}$ ha media $E(X) = n\bar{p} = 209.7$

$$p(\{X \geq 200\}) = 1 - p(\{X < 200\}) = 1 - \Phi\left(\frac{199.5 - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1 - \bar{p})}}\right) = 0.773$$

□

Capitolo 50

Esercizi svolti

50.1 Probabilità e statistica

Esercizio 12. Un quiz ha più scelte, ciascuna con 4 risposte possibili di cui una soltanto esatta. Qual è la probabilità che, tirando ad indovinare, si diano da 10 a 30 risposte corrette per 40 problemi che lo studente non conosce?

Soluzione.

$$\sum_{k=10}^{30} \binom{40}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} = 0.5604602683225615$$

Oppure usando la legge di Poisson $P_k(10) = \frac{10^k}{k!} e^{-10}$ e sommando da 10 a 30 si ottiene:

$$\sum_{k=10}^{30} P_k(10) = 0.5420702056902013$$

□

Esercizio 13. Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che il 6 sia uscito esattamente 2 volte? Qual è la probabilità che in n lanci il 6 sia uscito esattamente 2 volte? Per quale valore di n questa probabilità è massima?

Soluzione. Probabilità che il 6 esca esattamente 2 volte in 3 lanci:

$$\binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72} \simeq 0.0695$$

Probabilità che il 6 esca esattamente 2 volte in n lanci:

$$\binom{n}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

Dal disegno del grafico della funzione (vedi figura 50.1) $\binom{n}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n-2)}$ si evince che il valore massimo è assunto per n uguale a 11 e 12.

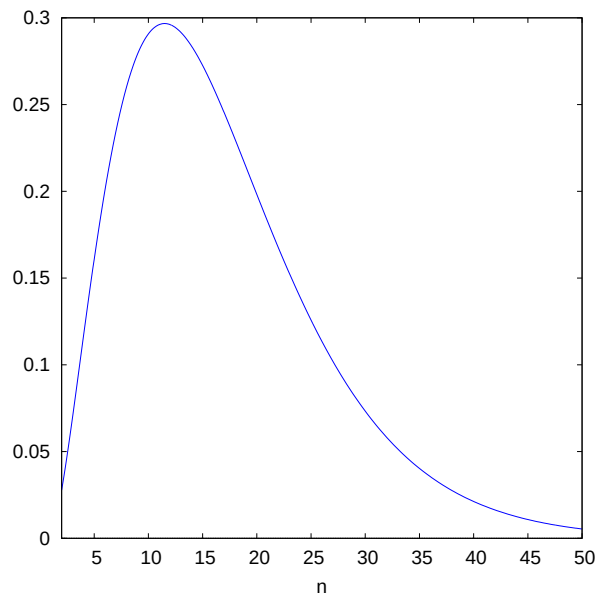


Figura 50.1: Grafico due sei in n lanci

n	p
10	0.2907
11	0.2961
12	0.2961
13	0.2916

□

Esercizio 14. Due urne A e B contengono palline:

A:1 blu, 2 rosse;

B:2 blu, 1 rossa;

Inizialmente una delle 2 urne viene scelta a caso e da essa vengono effettuate 2 estrazioni con reimbussolamento.

Soluzione. Siano X e Y i risultati delle 2 estrazioni:

qual è la probabilità che X=blu?

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

$$p(b|A) = \frac{1}{3}$$

$$p(b|B) = \frac{2}{3}$$

$$p(b) = p(A) \cdot p(b|A) + p(B) \cdot p(b|B) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

qual è la probabilità che sia X=blu e Y=rossa?

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

$$p(b|A) = \frac{1}{3}$$

$$p(b|B) = \frac{2}{3}$$

$$p(r|A) = \frac{2}{3}$$

$$p(r|B) = \frac{1}{3}$$

$$p(b, r) = (p(A) \cdot p(b|A) + p(B) \cdot p(b|B)) \cdot (p(A) \cdot p(r|A) + p(B) \cdot p(r|B)) = \frac{1}{4}$$

X e Y sono indipendenti?

Essendo l'estrazione avvenuta con reimbussolamento, gli eventi sono fra di loro indipendenti in quanto la prima estrazione non influenza in alcun modo la seconda. $\square$

Esercizio 15. n palline sono distribuite a caso in r scatole.

Soluzione. qual è la probabilità che la scatola n.1 contenga i palline?

$$\binom{n}{i} \left(\frac{1}{r}\right)^i \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-i}$$

qual è la probabilità che le scatole n.1 e 2 contengano, rispettivamente, i e j palline?

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{r}\right)^i \left(\frac{1}{r}\right)^j \left(\frac{r-2}{r}\right)^{n-i-j}$$

$\square$

Esercizio 16. Un compilatore assegna ad ognuna delle variabili che intervengono in un programma una cella di memoria scegliendola a caso in maniera indipendente da una variabile all'altra. In caso di conflitto (cioè se due variabili vengono assegnare alla stessa cella) l'operazione di assegnazione deve essere ripetuta.

- Se vi sono n celle di memoria e k variabili, qual è la probabilità che si verifichi un conflitto?
- Quanto vale questa probabilità se $n = 1000$ e $k = 25$?
- Si tratta di una probabilità grande?

Soluzione. probabilità di non avere conflitto con k variabili: $p(A_k)$. Calcoliamo la probabilità di non avere un conflitto sapendo che non si sono verificati nelle precedenti $k-1$ assegnazioni:

$p(A_k|A_{k-1}) = \frac{n - (k - 1)}{n}$, quindi:

$$\begin{aligned} p(A_k) &= p(A_k|A_{k-1})p(A_{k-1}) = \\ &= p(A_k|A_{k-1})p(A_{k-1}|A_{k-2})p(A_{k-2}) = \\ &= \dots \\ &= \frac{n - (k - 1)}{n} \frac{n - (k - 2)}{n} \dots \frac{n - 1}{n} = \\ &= \frac{n!}{n^k(n - k)!} \end{aligned}$$

Quindi la probabilità di non avere conflitti è data da: $1 - \frac{n!}{n^k(n - k)!}$

Se $n = 1000$ e $k = 25$ si ha:

$$1 - p(A_{25}) = \frac{1000!}{1000^{25}975!} \simeq 0.261$$

□

Esercizio 17. Un calcolatore è collegato ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 persone. Collegati a questa rete vi sono i terminali di 24 operatori, ognuno dei quali, ad un certo istante richiede con probabilità $p = 0,6$ di essere connesso al calcolatore centrale. Qual è la probabilità che, ad un istante, la rete sia satura?

Soluzione. la probabilità che 20 persone siano collegate ad uno stesso istante è $(0.6)^{20}$, bisogna tenere conto anche della probabilità delle 4 persone non collegate, che è $(0.4)^4$. Inoltre si deve moltiplicare per tutte le permutazioni possibili, che sono: $\binom{24}{20}$.

$$\sum_{k=21}^{24} (0.6)^k (0.4)^{24-k} \binom{24}{k} \simeq 0.0035$$

□

Esercizio 18. In un album da 100 figurine ne sono state incollate 60. Se ne acquistiamo 24 qual è la probabilità di trovarne almeno 20 doppie?

Soluzione.

$$\sum_{i=20}^{24} \frac{\binom{60}{i} \binom{40}{24-i}}{\binom{100}{24}} \simeq 0.00114$$

□

Esercizio 19. Una segretaria commette in media 2 errori per pagina. Viene richiesta la probabilità che ne faccia 5 nella prossima pagina.

Soluzione. Viene supposto l'andamento del numero degli errori per pagina secondo la legge di Poisson: $p_a(k) = \frac{1}{k!} a^k e^{-a}$ dove a è la media degli errori per pagina, k indica i cinque errori da

prevedere.

Sostituendo i dati, in particolare $a = 2$ e $k = 5$, si ottiene:

$$p_2(5) = \frac{1}{5!} 2^5 e^{-2} \approx 0.03608$$

□

Esercizio 20. Data la probabilità 0,8 che un cittadino presti fede a un'accusa, si calcola la probabilità che la settima persona interrogata sia la quarta a crederci.

Soluzione. Per risolvere il problema si può considerare lo studio del comportamento dei primi sei interrogati e contemporaneamente il fatto che la settima persona ci creda.

Dunque, tra i primi sei interrogati devono esserci esattamente tre persone che ci credono e tre persone che non ci credono. Si considera inoltre che ai fini della soluzione del problema, non deve essere considerato l'ordine in cui questi rispondano, utilizzando le combinazioni di 6 su 3, per indicare il fatto che tre persone ci credano e tre no, si considera la probabilità $p(c) = 0.8$ che un interrogato ci creda e $p(\bar{c}) = 0.2$ che l'interrogato non ci creda.

Considerato ciò, si può procedere alla soluzione del problema utilizzando la formula

$$p = p(c) \left[\binom{6}{3} p(c)^3 \cdot p(\bar{c})^3 \right]$$

Quindi si sostituisce con i dati del problema:

$$p = 0,8 \left[\binom{6}{3} 0,8^3 \cdot 0,2^3 \right] \simeq 0.06554$$

□

Esercizio 21. Vi è un insieme di 8 chiavi, da cui si deve estrarre una determinata chiave. Si considera il reinserimento della chiave nel succitato insieme, qualora questa non sia la chiave giusta. Si calcola la probabilità di estrarre la chiave giusta al primo tentativo, al secondo tentativo, e al k -esimo tentativo.

Soluzione. La probabilità di estrarre la chiave giusta al primo tentativo è di

$$p_1 = \frac{1}{8}$$

Per calcolare la probabilità di estrarre la chiave giusta al secondo tentativo, si deve considerare il fatto che nel precedente tentativo sia stata estratta una chiave sbagliata; pertanto si considera la probabilità del tentativo fallito di $\frac{7}{8}$ moltiplicata alla probabilità del successo del successivo tentativo di $\frac{1}{8}$, ovvero:

$$p_2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{64} \simeq 0.10937$$

Analogamente al caso precedente, si può calcolare la probabilità di estrarre una chiave giusta al k -esimo tentativo moltiplicando la probabilità di estrarre la chiave giusta al primo tentativo, di $\frac{1}{8}$, alla probabilità di aver estratto delle chiavi sbagliate nelle precedenti estrazioni, quindi $\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1}$

dove $k - 1$ indica il numero dei precedenti tentativi. Pertanto la generica probabilità di estrarre la chiave giusta alla k -esima estrazione è

$$p_k = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} \frac{1}{8}$$

□

Esercizio 22. La probabilità di centrare un bersaglio è 10^{-3} per ogni colpo. Qual'è la probabilità di centrarlo con due o più pallottole, se il numero dei colpi sparati è 5000?

Soluzione.

$$1 - \sum_{k=0}^1 (10^{-3})^k (1 - 10^{-3})^{5000-k} \binom{5000}{k} \simeq 0.959639689041808$$

oppure usando Poisson $p_k(5) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}$, si ottiene:

$$1 - p_0(5) - p_1(5) \simeq 0.9595723180054871$$

□

Esercizio 23. Una persona gioca al lotto i numeri 1, 2, 3. Per aiutare la fortuna nottetempo aggiunge all'urna tre palline supplementari con i numeri 1, 2, 3 (quindi nell'urna vi sono ora 93 palline). Qual'è la probabilità che il trucco venga scoperto (cioè che vengano estratte almeno due palline con numeri uguali)?

Soluzione.

$$3 \left(\frac{\binom{2}{2} \binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} \right) = \frac{5}{713} \simeq 0.007$$

□

Esercizio 24. Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati neri, mentre l'altra ha un lato nero e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno dei due lati: è nero. Qual'è la probabilità che anche il secondo lato sia nero?

Soluzione.

$$p(2|1) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

□

Esercizio 25. Una macchina produce una vite al secondo. Nella fabbrica ci sono occasionali cadute di tensione che si verificano ogni secondo con probabilità 0.09. Quando c'è una caduta di tensione, la macchina si arresta, perché c'è un controllo elettronico. Qual è la probabilità che la macchina produca k viti, dopo che è stata messa in funzione?

Soluzione. Non deve esserci caduta di tensione nei primi k secondi ed un arresto il $k + 1$ -esimo secondo.

$$\left(\frac{91}{100}\right)^k \left(\frac{9}{100}\right)$$

□

Appendice A

Raggi cosmici

Studio della numerosità di eventi per secondo.

Rilevazioni svolte in data 13 aprile 2011 dalla classe 4L.

Frequenze rilevate

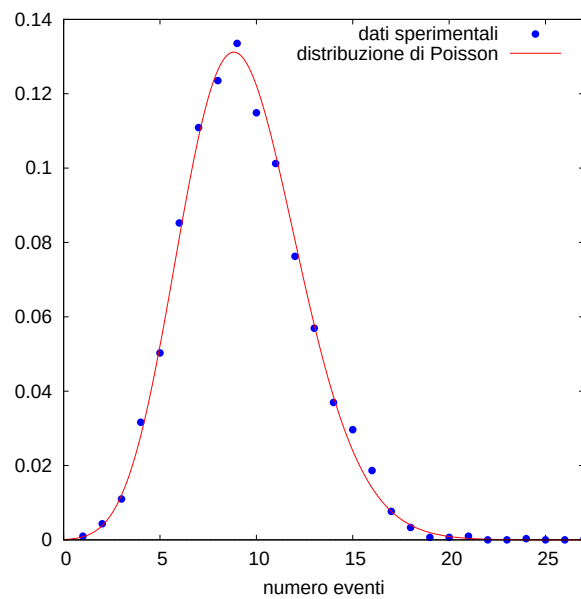
x1:3/3003;
x2:13/3003;
x3:33/3003;
x4:95/3003;
x5:151/3003;
x6:256/3003;
x7:333/3003;
x8:371/3003;
x9:401/3003;
x10:345/3003;
x11:304/3003;
x12:229/3003;
x13:171/3003;
x14:111/3003;
x15:89/3003;
x16:56/3003;
x17:23/3003;
x18:10/3003;
x19:2/3003;
x20:2/3003;
x21:3/3003;
x22:0/3003;
x23:0/3003;
x24:1/3003;
x25:0/3003;
x26:0/3003;
x27:1/3003;

```
p(k,a):=(a^k/k!)*exp(-a);
```

$$p(k,a) := \frac{a^k}{k!} \exp(-a)$$

```
media:9.3307;
```

```
plot2d([[discrete,xf],p(x,media)],[x,0,27],[style,points,lines],
[legend,"dati sperimentali","distribuzione di Poisson"],
[xlabel,"numero eventi"],[ylabel,""],
[gnuplot_preamble,"set size ratio 1; set zeroaxis;"],
[gnuplot_term,ps],
[gnuplot_out_file,"/home/joao/Scrivania/rc.eps"]);
```



Appendice B

Un esercizio in dettaglio

Soluzione dell'esercizio di pagina 393

Sia X la v.a. che ad ogni evento $\omega_i = \{\text{esce la faccia con "i" punti}\}$ associa il numero x_i di punti sulla faccia, si ha:

$$x_1 = 1 \quad p_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = 2, \dots, x_6 \text{ con } p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{2} \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 x_k p_k = 3$$

La probabilità richiesta richiede l'uso della formula di Bayes: sia K l'evento "ottengo 2 e 3 nel lancio ripetuto del dado", allora indicata con $p(E) = \frac{1}{2}$ la probabilità di estrarre un dado equo e con $p(T) = \frac{1}{2}$ la probabilità di estrarre un dado manipolato; si ha:

$$\begin{aligned} p(K|T) &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ p(K|E) &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Applicando Bayes si ha:

$$p(T|K) = \frac{p(K|T)p(T)}{p(K|T)p(T) + p(K|E)p(E)} = 0.375$$

Ora per verificare se esiste indipendenza fra le variabili aleatorie indicate nell'esercizio si può procedere verificando se $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, metodo laborioso ma in questa fase istruttivo.

Il calcolo conduce ad una dipendenza delle due v.a., questo risultato poteva essere ricavato semplicemente osservando che $p(K) = q_{23} \neq q'_2 q''_3$ si veda (35.3)

Appendice C

Il metodo di esaustione

Tratto da Acerbi 2010

C.1 Le quadrature e il cosiddetto « metodo di esaustione »

Il libro XII degli Elementi è un'applicazione sistematica del cosiddetto « metodo di esaustione », con cui sono dimostrate le proposizioni seguenti: i cerchi tra loro sono come i quadrati sul diametri; le piramidi che sono sotto la stessa altezza e che hanno basi triangolari sono tra loro come le basi e di conseguenza ogni piramide è terza parte del prisma che ha la sua stessa base e altezza uguale (porisma a 7); ogni cono e terza parte di un cilindro, quello che ha la sua stessa base e altezza uguale; i coni e cilindri che sono sotto la stessa altezza sono tra loro come le basi; i coni e cilindri simili sono tra loro in rapporto triplicato di quello dei diametri nelle basi; le sfere sono tra loro in rapporto triplicato di quello dei propri diametri. Il libro XII non si occupa quindi di "misurare" certe figure piane o solide. I risultati elencati sono infatti tutti formulati sotto forma di proporzione: il rapporto tra due figure della stessa classe - eventualmente vincolate da restrizioni opportune; a volte simili - è lo stesso del rapporto, in caso triplicato, di loro elementi caratteristici corrispondenti. Nel porisma a XII.7 e in XII.10 il secondo rapporto è semplicemente numerico e le figure non appartengono strettamente alla stessa classe: vedremo sotto come sono trattati questi casi.

Indichiamo la proporzione in questione con $A:B::a:b$. Lo schema di dimostrazione è una riduzione all'assurdo. Si suppone che la proporzione non sia realizzata dalla figura B - è sempre la seconda delle figure. La proporzione sarà dunque realizzata da un dominio o un solido Z minore o maggiore di B e quindi omogeneo ad esso: $A:Z::a:b$. Intervengono due assunzioni mai rese esplicite: esistenza di un quarto proporzionale omogeneo alla grandezza sostituita ed ordinamento totale tra grandezze omogenee. Fin qui niente di nuovo rispetto ad altre dimostrazioni negli Elementi; come si dimostra che ognuna delle ipotesi dell'assurdo non sussiste è ciò che viene comunemente denominato « metodo di esaustione ». A grandi linee, il metodo usato nel libro XII e il seguente. Viene prima considerato il caso in cui Z sia minore di B. La loro differenza sarà quindi un dominio omogeneo ad entrambe. L'idea è quella

di trovare una figura S contenuta in B tale che $Z < S < B$ e che, insieme con una figura S' simile ad essa e contenuta in A , realizzi la proporzione richiesta $S':S::a:b$. Da questa proporzione e da $A:Z::a:b$ segue immediatamente (El. V.11) $A:Z::S':S$. Ma $Z < S$ e quindi (E/. V.14) $A < S'$, il che è impossibile dato che S' è contenuta in A .

Il caso in cui Z è maggiore di B viene liquidato con il trucco seguente. Invertiamo la proporzione primaria in cui interviene Z ed otteniamo $Z:A::b:a$. Ma possiamo sempre trovare un dominio $X < A$ tale che $Z:A::B:X$ perciò $B:X::b:a$. Poiché B è della stessa specie di A , e così b della stessa di a , siamo ricondotti al caso precedente. In conclusione, la proporzione può essere realizzata solo da una figura uguale a B , e quindi anche da B stessa. Ovviamente, il trucco finale funziona solo se A e B sono figure strettamente dello stesso genere, ad esempio due cerchi o due piramidi. Occorrerà ricorrere ad un altro espediente per dimostrare il porisma a XII.7 e XII.10. Ce ne occuperemo tra un attimo. Ora il punto è: come trovare la figura S ?

La figura S viene trovata con la procedura iterativa che caratterizza il metodo di esaustione. Essa prende le mosse da una figura S_0 che soddisfa, con una variante, le stesse condizioni richieste per S : S_0 è contenuta in B , è maggiore della metà di B , e realizza, insieme con una figura S'_0 simile ad essa ed inscritta in A , la proporzione richiesta: $S'_0 : S :: a : b$. Trovare una figura siffatta è reso possibile da teoremi precedenti (che impongono o no il metodo di esaustione poco importa).

Bene; a partire da S_0 viene costruita una sequenza S_n di figure ordinate dalla relazione di inclusione stretta e che soddisfano la prima e la terza condizione su S_0 : dovremo quindi immaginare una corrispondente sequenza costruita a partire da S'_0 . La seconda condizione è sostituita dalla richiesta che l'eccesso di una figura della sequenza sulla precedente sia maggiore della metà della porzione di B lasciata fuori. Si tratta dell'ipotesi principale del crucialissimo teorema El X.1, il quale garantisce che:

Fissate due grandezze disuguali, qualora dalla maggiore sia sottratta una grandezza maggiore che la metà e da quella restata fuori una maggiore che la metà, e questo avvenga in successione, risulterà restare una certa grandezza, che sarà minore della minore grandezza fissata.

La rilevanza di questo risultato è palese: scegliamo in primo luogo opportunamente le due grandezze fissate. La grandezza maggiore sarà la figura B , la grandezza minore sarà la differenza $B - Z$. La prima sottrazione richiesta in X.1 corrisponderà a sottrarre S_0 da B . La figura successiva della sequenza "approssima un po' meglio" B ; sottrarreemo dunque da $B - S_0$ - cioè dalla grandezza restata fuori dell'enunciato di X.1 - la differenza tra le prime due figure nella sequenza, cioè $S_1 - S_0$, ed otterremo $B - S_1$, e così via, dove le grandezze intermedie nelle sottrazioni successive si cancellano l'una con l'altra ad ogni passo. Il teorema X.1 garantisce che arriveremo ad una figura S tale che $B - S < B - Z$ cioè $Z < S < B$, dove la seconda disuguaglianza è automaticamente soddisfatta da ogni figura nella sequenza. In più, la proporzione $S' : S :: a : b$ è realizzata in quanto lo è per costruzione da ogni figura nella sequenza. Con questo la dimostrazione è terminata.

Le «sottrazioni successive» devono quindi ogni volta garantire che più di metà di ciò che resta sia sottratto: ciò dipende dalla situazione geometrica di partenza e dalla scelta della sequenza di figure approssimanti. Sono quindi indissolubili dalla configurazione geometrica particolare in esame. Per questo motivo lo schema dimostrativo è generale ma non è applicabile automaticamente ad ogni figura particolare assegnata: una quadratura effettuata con il metodo di esaustione necessita di una specifica sequenza approssimante, e sta al genio del matematico trovarla.

La caratteristica comune delle dimostrazioni per esaustione consiste dunque nella sottrazione ripetuta di parti di una figura fino a che non sia soddisfatta una ben precisa condizione di arresto, tipicamente che la figura residua sia minore di un dominio o solido assegnato. Il processo di sottrazione è ricorsivo, dal momento che lo stesso tipo di costruzione è effettuato, ad ogni passo, sulla figura che risulta da quello precedente. L'ultimo passaggio non è la fine della procedura, nel qual caso essa non sarebbe genuinamente iterativa: si tratta soltanto della verifica di una condizione esterna. Quest'ultima è semplicemente un parametro di controllo che non è fisso a priori, ma funzionale allo sviluppo della riduzione all'assurdo, e per questo motivo è posto arbitrariamente lontano dal primo passo dell'iterazione. Il parametro, che può essere letto anche come un limite prefissato alla precisione richiesta in un calcolo esplicito, non determina la lunghezza dell'iterazione, che è quindi indefinitamente prolungabile. Ci sono dunque, in un senso ben definito, infiniti passi nel procedimento per esaustione; il punto cruciale è che l'intera procedura sia formulata in maniera da costituire un singolo passaggio in una dimostrazione.

Appendice D

Un integrale un po' ...

Si vogliono determinare i parametri b e k in modo che:

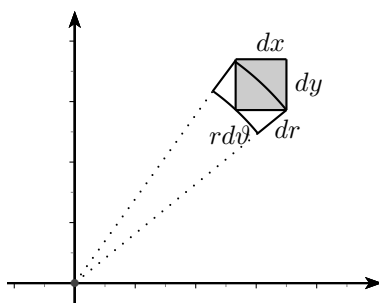
$$\iint_{\mathbb{R}^2} k^2 e^{-b(x^2+y^2)} = 1$$

Si passa a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r \cos(\vartheta) \\ y = r \sin(\vartheta) \end{cases}$$

Osservando che $dx dy$ può essere pensato come l'area di un quadratino infinitesimo, la stessa area in coordinate polari vale $r d\vartheta dr$

Si può scrivere l'integrale come:



$$k^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} e^{-br^2} r dr$$

l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} e^{-br^2} r dr$ si calcola per sostituzione ($-br^2 = z$) ottenendo:
 $\lim_{h \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2b} e^{-br^2} \Big|_0^h = \frac{1}{2b}$ ora basta risolvere $\frac{k^2}{2b} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{k^2}{2b} 2\pi$, per le proprietà della densità di probabilità si ha $\frac{k^2}{2b} 2\pi = 1$ e quindi $k = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$.

Consideriamo ora una variabile aleatoria X descritta dalla densità ora calcolata, procediamo al calcolo della varianza:

$$V(X) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-bx^2} dx$$

Si procede per parti considerando xe^{-bx^2} come la derivata di $\frac{e^{-bx^2}}{-2b}$ e quindi si ottiene:

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left. \sqrt{\frac{b}{\pi}} \frac{e^{-bx^2}}{-2b} \right|_h^k + \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_h^k x^2 e^{-bx^2} dx$$

il $\lim_{h \rightarrow -\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left. \sqrt{\frac{b}{\pi}} \frac{e^{-bx^2}}{-2b} \right|_h^k$ tende a zero, mentre la seconda parte per definizione tende a $\frac{1}{2b}$. Chiamando, come da convenzione, $V(X) = \sigma^2$ si ottiene $b = \frac{1}{2\sigma^2}$. Calcolando la varianza della v.a. si osserva che $b = \frac{1}{2\sigma^2}$

Appendice E

Numeri algebrici e numeri trascendenti

Tratto da Enriques 1987

« ...

E.1 Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo

E.1.1 Problemi algebrici e trascendenti

....

Quando sia proposto un problema costruttivo, si trasformi anzitutto in modo che i (lati siano punti (poniamo per es. in un piano), e gli elementi incogniti siano anch'essi dei punti aventi coi dati relazioni assegnate. Affinché il problema proposto sia risolubile elementarmente, occorre e basta che

- a) le relazioni assegnate si possano tradurre con equazioni algebriche (cioè il problema sia algebrico);
- b) le equazioni algebriche in discorso siano risolubili con operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate (a partire dalle coordinate dei punti dati).

...

Noi ci rivolgiamo qui al primo gruppo di questioni tendenti a decidere dell'algebricità, o, per contrapposto, della trascendenza di un dato problema. Ed avvertiamo subito che i problemi trascendenti debbono riguardarsi come più elevati degli algebrici in questo senso, che la risoluzione loro non solo non è effettuabile con la retta e con il circolo (riga e compasso), ma nemmeno col tracciamento di curve algebriche superiori, o cogli strumenti atti a descrivere tali curve.

Per procedere nelle nostre considerazioni, prendiamo le mosse dal classico problema della quadratura del circolo.

Traduciamo anzitutto questo problema in forma analitica.

Se indichiamo con r il raggio di un cerchio, con d il suo diametro, con c la circonferenza e con a la sua area, abbiamo

$$c = \pi d = 2\pi r \quad (\text{E.1})$$

$$a = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2}rc \quad (\text{E.2})$$

ove π è il rapporto costante della circonferenza al diametro.

Dalla formula E.2 risulta il noto fatto che l'area del cerchio equivale all'area di un triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio del cerchio. Se dunque siamo in grado di costruire colla riga e col compasso un segmento equivalente alla circonferenza, partendo dal raggio, se, cioè, sappiamo effettuare elementarmen- te la rettificazione del cerchio, potremo costruire il detto triangolo e trasformare poi facilmente questo, sempre facendo uso della riga e del compasso, in un quadra- to equivalente. E inversamente, se mediante una costruzione elementare si potesse trasformare il cerchio in un quadrato equivalente, trasformando poi questo in un triangolo equivalente avente per altezza il raggio del cerchio, si otterrebbe mediante una costruzione elementare la rettificazione della circonferenza.

Il problema della quadratura del cerchio si trova così ricondotto a quello della ret- tificazione della circonferenza. E se, per semplicità, scegliamo come unità di misura il diametro, quest'ultimo problema si riduce all'altro di costruire un segmento di lunghezza π (o brevemente costruire π) a partire dal segmento unità.

È ovvio che al segmento stesso si può dare una posizione assegnata, in modo che il problema sia posto sotto la forma in cui abbiamo detto di considerare un problema costruttivo; in modo, cioè, che i dati siano punti (il centro $(0,0)$ ed un punto del cerchio $(0,1)$), e gli elementi incogniti siano anch'essi dei punti (per es. il punto $(0,\pi)$).

Ma, così essendo posto il problema, non appare se esso venga a dipendere o no dalla risoluzione di un'equazione algebrica, giacche, invero, non viene posta in evidenza alcuna equazione da risolvere, di cui π sia radice.

Guardiamo di generalizzare il problema, da cui siamo partiti, considerando la questione della rettificazione di un arco circolare qualsiasi.

Dell'arco possiamo supporre data (oltre il raggio preso come unità) la corda, oppure il seno, ciò che è equivalente per il nostro scopo.

Il problema della rettificazione dell'arco viene quindi a dipendere dalla risoluzione dell'equazione

$$y = \arcsin x$$

E poiché questa equazione è trascendente, il problema è in generale trascendente, sicché non è possibile assegnare una determinata costruzione generale algebrica, e tanto meno elementare (cioè effettuabile con la riga e con il compasso), mediante la quale, data la corda (o il seno) dell'arco, si ottenga la lunghezza dell'arco.

Se, per es., una costruzione elementare determinata fosse in generale possibile, si troverebbe una determinata espressione di x , formata con operazioni razionali e radici quadrate, la quale per tutti i valori di x fornirebbe y . Quindi la y risulterebbe radice di un'equazione algebrica, i cui coefficienti sarebbero funzioni razionali di x , cioè la

y sarebbe una funzione algebrica della x . Ora una funzione trascendente come la $y = \arcsin x$ non può certo equivalere ad una funzione algebrica.

Ma se è impossibile dare algebricamente, e tanto meno in modo elementare, la risoluzione generale del problema della rettificazione dell'arco, non ne segue per questo a priori che la risoluzione stessa non possa ottenersi, sia trovando per ogni corda (o seno) assegnata una particolare costruzione algebrica o elementare la quale fornisca l'arco; sia trovando una costruzione siffatta per archi particolari, ad esempio, quando la corda (o il seno) dell'arco da rettificare è espressa per il raggio mediante operazioni razionali e radici quadrate, e quindi è essa stessa elementarmente costruibile; in particolare, nel caso corrispondente alla rettificazione dell'intero cerchio. Ed infatti, se la curva $y = \arcsin x$ è trascendente e quindi non può coincidere interamente con una curva algebrica, chi ci dice che le coordinate di ogni punto di essa non possano soddisfare ad una particolare equazione algebrica a coefficienti razionali (variabile da punto a punto), o almeno che essa non contenga punti particolari, le cui coordinate soddisfino ad una tale equazione, ed in special modo punti aventi come coordinate delle espressioni irrazionali quadratiche, a cui corrisponderebbero appunto degli archi rettificabili?

Chi ci assicura che il punto $(0, \pi)$ di essa non si trovi fra i punti particolari accennati?

Tale questione esce, come si vede, dal campo della teoria delle funzioni, per entrare nel dominio dell'aritmetica.

Dando forma più generale alle conclusioni che emergono dalla precedente discussione, possiamo dire:

La questione, di decidere se un problema assegnato sia algebrico o trascendente, si presenta diversamente a seconda che si considera un problema in cui i dati sono variabili o fissi. Nel primo caso, se le equazioni che legano le incognite ai dati sono trascendenti, il problema è trascendente, ed è impossibile una generale risoluzione algebrica valida indipendentemente dai valori dei dati.

Quando si tratta di un problema in cui i dati sono fissi, o (ciò che è lo stesso) quando i dati, pur capaci di variare, si considerino fissati in un modo particolare, occorre domandarsi se le equazioni trascendenti, che legano le incognite ai dati, in quanto servono alla determinazione delle incognite, non possano essere rimpiazzate con equazioni algebriche.

Guardando le cose sotto quest'ultimo aspetto, l'esistenza stessa di problemi (aritmeticamente) trascendenti può essere posta in dubbio. Il dubbio si riattacca alla domanda:

Esistono dei numeri (trascendenti) non soddisfacenti ad alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali?

Soltanto dopo avere risolto affermativamente la predetta questione, ci volgeremo a quella, da cui dipende la quadratura del circolo:

Il numero π deve porsi tra i numeri trascendenti?

Diciamo fin d'ora che anche per questa seconda questione la risposta è affermativa; essa chiude l'era dei tentativi infruttuosi rivolti a cercare, per via elementare, la quadratura del circolo, mostrando che il problema stesso non è risolubile né elemen-

tarmente, cioè mediante rette e cerchi, né col tracciamento di curve algebriche più elevate. »

E.2 Numeri algebrici

Ogni numero, reale relativo o complesso, che sia soluzione di una equazione: $F(x) = 0$, ove $F(x)$ sia un polinomio intero in x , ‘

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

a coefficienti $a_0 (> 0)$, $a_1, \dots, a_{m-1}$, a_m razionali, relativi, si dice algebrica. Si può intendere che i coefficienti siano interi, relativi, e primi fra loro. Se $F(x)$ è decomponibile nel prodotto di due o più polinomi interi in x , $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, ciascuno di grado non nullo, a coefficienti razionali e irriducibile, cioè non ulteriormente decomponibile nel medesimo modo, ogni valore a di x che annulli F annullerà uno almeno dei fattori $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$.

Perciò è detto algebrico ogni numero che sia soluzione di una equazione a coefficienti razionali, e quindi anche interi e primi fra loro, irriducibile.

Se la radice a appartenesse a due equazioni : $f_a(x) = 0$, $f_b(x) = 0$, ciascuna a coefficienti interi primi fra loro ed irriducibile, $f_a(x)$ e $f_b(x)$ sarebbero, eventualmente a meno del segno, identicamente eguali.

Dunque un numero algebrico è radice di una certa equazione : $f(x) = 0$, a coefficienti interi primi fra loro, irriducibile. Se n è il grado di questa equazione, il numero algebrico si dice pure di n -esimo grado. I numeri algebrici di primo grado sono i numeri razionali.

Gli n numeri algebrici, diversi uno dall'altro, che sono soluzioni di una stessa equazione di n -esimo grado a coefficienti razionali irriducibile, si dicono coniugati.

Si dice algebrico intero un numero algebrico che sia radice di una equazione irriducibile a coefficienti interi, fra i quali quello della potenza più alta della variabile sia eguale a 1.

L'aggregato dei numeri algebrici è denso in ogni campo, quello dei numeri algebrici reali è denso in ogni intervallo.

Se α e β sono due numeri algebrici, sono pure algebrici la somma $\alpha + \beta$, il prodotto $\alpha\beta$ e, se $\beta \neq 0$, il quoziente $\frac{\alpha}{\beta}$.

E.3 Numeri trascendenti

E.3.1 La dimostrazione di I. Liouville dell'esistenza di numeri trascendenti

Si dice trascendente ogni numero, reale o complesso, che non sia radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali.

Il primo che abbia dimostrato l'esistenza di numeri trascendenti è I. Liouville. Egli mosse dall'osservazione che è algebrico, di secondo grado o di grado maggiore, un numero che annulla un polinomio intero in x , a coefficienti interi, non annullato da alcun valore razionale della variabile. Se α è un numero algebrico reale non razionale, radice dell'equazione:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad n > 1 \quad a_0 > 0 \quad (\text{E.3})$$

a coefficienti interi, irriducibile, e se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sono i numeri algebrici coniugati di α , è identicamente

$$\alpha - x = \frac{-f(x)}{a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1})} \quad (\text{E.4})$$

E, se si ha una successione di numeri razionali

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_i}{q_i}, \dots \quad (q_0, q_1, \dots, q_i, \dots > 0)$$

avente per limite α , segue che

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} = \frac{-f(p_i, q_i)}{q_i^n a_0 \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_1\right) \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_{n-1}\right)} \quad (\text{E.5})$$

ove è posto

$$f(p_i, q_i) = a_0 p_i^n + a_1 p_i^{n-1} q_i + \dots + a_{n-1} p_i q_i^{n-1} + a_n q_i^n$$

Facendo crescere i indefinitamente e considerando che, qualunque sia i , $|f(p_i, q_i)| \geq 1$ e

$$\lim a_0 \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_1\right) \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{p_i}{q_i} - \alpha_{n-1}\right) = f'(\alpha) \neq 0$$

si trae da E.5 che, per tutti i valori di i maggiori di un certo numero k , è

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| > \frac{1}{A q_i^n}$$

Dunque se α è un numero algebrico di grado n (anche di primo grado), soluzione dell'equazione irriducibile a coefficienti interi : $f(x) = 0$, e se la successione di numeri razionali, tutti diversi da α ,

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_i}{q_i}, \dots$$

ha per limite α , si avrà, per ogni valore dell'indice i maggiore d'un certo numero k :

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| > \frac{1}{A q_i^n}$$

dove A è un numero maggiore di $|f'(\alpha)|$ (e dipende quindi da α e non dalla successione).

Ne viene che, se si ha un numero reale α , il quale sia limite di tale successione di numeri razionali

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_i}{q_i}, \dots$$

che, comunque si scelga il numero positivo A , per infiniti valori dell'indice i si abbia:

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{A q_i^n}$$

con $n \geq 1$, α non è un numero algebrico di grado n , né, a maggior ragione, di grado minore.

In particolare, se, comunque si scelga A , per infiniti valori di i , si ha:

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{A q_i^n}$$

α è irrazionale.

E se, comunque si scelgano A e l'esponente n , si ha per infiniti valori di i :

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{Aq_i^n}$$

α non è algebrica di alcun grado; è cioè trascendente.

Esempi di numeri trascendenti si hanno quindi nelle somme delle seguenti serie a termini razionali, evidentemente convergenti:

$$\alpha = \frac{1}{l} + \frac{1}{l^{1 \cdot 2}} + \frac{1}{l^{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{l^{i!}} + \cdots$$

(l razionale, maggiore di 1);

$$\alpha = \frac{1}{l} + \frac{k_1}{l^{1 \cdot 2}} + \frac{k_2}{l^{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \cdots + \frac{k_i}{l^{i!}} + \cdots$$

l razionale, maggiore di 1; $|k_i|$ intero, non nullo per infiniti valori di i e non maggiore d'un certo numero K). Se $l = 10$ e $k_i = 0, 1, 2, \dots, 9$, nella formula che dà α abbiamo gli sviluppi in decimali di numeri trascendenti, sviluppi nei quali le cifre significative sono separate da gruppi di un numero via via maggiore di zeri.

I precedenti teoremi permettono di stabilire un carattere aritmetico dello sviluppo in frazione continua regolare di un numero algebrico irrazionale α . Se

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \dots, \frac{A_i}{B_i}, \dots$$

sono le ridotte dello sviluppo in frazione continua regolare di α , $\alpha = [b_0, b_1, b_2, \dots]$ per tutti i valori dell'indice i maggiori d'un certo numero k , si avrà:

$$\left| \alpha - \frac{A_i}{B_i} \right| > \frac{1}{AB_i^n}$$

A essendo un certo numero positivo. Quindi, se in quello sviluppo è α_i il quoziente completo che segue il quoziente incompleto b_i , cioè se

$$\left| \alpha - \frac{A_i}{B_i} \right| = \frac{1}{B_i(B_i\alpha_{i+1} + B_{i-1})}$$

risulta :

$$\alpha_{i+1} < AB_i^{n-2}$$

e successivamente

$$b_{i+1} < AB_i^{n-2} \quad (\text{E.6})$$

Dunque, nello sviluppo in frazione continua regolare di un numero algebrica di grado n (> 1), ogni quoziente incompleto è minore del prodotto della potenza $(n-2)$ -esima del denominatore della ridotta precedente per un certo coefficiente positivo A .

Quindi ogni sviluppo in frazione continua regolare che non abbia il carattere espresso dalla E.6 per un dato numero n (> 1) e qualunque sia il numero A che vi si ponga, non rappresenta un numero algebrico di grado n né di grado minore; e, quando non l'abbia anche comunque si fissi n , rappresenta un numero trascendente.

Otteniamo che si presenti questo caso, se formiamo uno sviluppo in frazione continua regolare $[b_0, b_1, b_2, \dots]$, scegliendo ad arbitrio quanti si vogliano quozienti incompleti $b_0, b_1, \dots, b_i$, e determinando i successivi, per esempio con una o con l'altra delle formule:

$$b_{i+h} = B_{i+h-1}^{i+h}, \quad b_{i+h} = B_{i+h-1}^{i+h-1} \quad (h = 1, 2, \dots)$$

E.3.2 Le dimostrazioni di G. Cantor dell'esistenza di numeri trascendenti

G. Cantor trae dalla teoria degli aggregati la dimostrazione dell'esistenza di numeri trascendenti. Un numero algebrico α , di grado n , è, insieme coi suoi $n - 1$ coniugati, distinto da un certo sistema di numeri interi, cioè dai coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ (interi, primi fra loro; $a_0 > 0$) dell'equazione irriducibile della quale è soluzione. Diciamo altezza di α il numero N , dato dalla formula:

$$N = (n - 1) + a_0 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| \quad (\text{E.7})$$

Ora il numero dei numeri algebrici, reali o reali e complessi, di altezza N data è finito, perché, dato N , si può in un numero finito di modi decomporlo nella somma di addendi interi assoluti come quelli che figurano nel secondo membro di E.7 (e non ad ogni decomposizione corrispondono equazioni di n -esimo grado irriducibili a coefficienti primi fra loro etc.).

Quindi i numeri algebrici reali si possono ordinare per altezza crescente e, a parità di altezza, per grandezza; e i numeri algebrici reali e complessi si possono ordinare per altezza crescente, e, a parità di altezza, per grandezza delle parti reali, e, a parità di queste, per grandezza dei coefficienti dell'immaginario. Insomma l'aggregato dei numeri algebrici, reali o reali e complessi, è numerabile. Ma, se C è un aggregato numerabile qualsiasi di numeri reali, fra due numeri reali α e β ($\alpha < \beta$), comunque dati, sono compresi quanti si vogliano numeri reali che non appartengono a C . Questo teorema si dimostra formando classi contigue di numeri reali, che individuano un numero reale compreso fra α e β e non appartenente a C ; è dunque una conseguenza della continuità del campo reale.

Ne viene che in ogni intervallo (α, β) si hanno numeri reali che non appartengono all'aggregato numerabile C_0 dei numeri algebrici, e sono perciò trascendenti.

Alla stessa conclusione G. Cantor perviene considerando per ogni numero reale α il suo sviluppo in decimali:

$$\alpha = q, c_1 c_2 c_3 \dots \quad \left(= q + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i} \right)$$

(q parte intera), ove nella successione delle cifre decimali $c_1, c_2, c_3, \dots$ ammetteremo che ogni elemento, da un certo termine in poi, possa esser nullo, escludendo che ogni elemento, da un certo termine in avanti, sia eguale a 9.

Se consideriamo tutti i numeri algebrici reali ordinati in successione, per esempio con il criterio accennato sopra, si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q_1, c_{11} c_{12} c_{13} \dots \\ \alpha_2 &= q_2, c_{21} c_{22} c_{23} \dots \\ &\dots \\ \alpha_i &= q_i, c_{i1} c_{i2} c_{i3} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

il numero reale rappresentato dallo sviluppo in decimali:

$$s, e_1, e_2, e_3, \dots, e_h, e_{h+1}, e_{h+2}, \dots, e_{h+i}, \dots$$

dove le cifre, non sono tutte uguali a 9,

$$e_h, e_{h+1}, e_{h+2}, \dots, e_{h+i}, \dots$$

sono ciascuna diversa dalla corrispondente della successione

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots$$

non eguaglia alcun numero algebrico, ed è perciò trascendente. Si può disporre di s , di h e delle cifre $e_1, e_2, e_3, \dots, e_h$ così che questo numero sia compreso fra due numeri α e β comunque dati.

E.3.3 La trascendenza di e

Ch. Hermite muove alla dimostrazione della trascendenza di e , da questa osservazione: si possono determinare due polinomi interi in x , $M(x)$ ed $N(x)$, in modo che gli sviluppi, in serie di potenze di x , dell'esponenziale e^x e della funzione razionale fratta $\frac{M(x)}{N(x)}$ coincidano nei loro primi μ termini, essendo μ comunque prefissato, e quindi si abbia:

$$e^x N(x) - M(x) = \epsilon_1 x^{\mu+1} + \epsilon_2 x^{\mu+2} + \dots$$

dove le ϵ sono costanti. La determinazione dei coefficienti di $M(x)$ ed $N(x)$ dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni lineari omogenee.

Ma non conviene proseguire per questa strada. È meglio osservare che, se $F(z)$ è un polinomio intero di grado μ in z , variabile reale, è

$$\int e^{-zx} F(z) dz = -e^{zx} \overline{F}(z) \quad (\text{E.8})$$

dove $\overline{F}(z)$ è un polinomio intero in z , e precisamente

$$\overline{F}(z) = \frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \dots + \frac{F^{(\mu)}(z)}{x^{\mu+1}}$$

Se z_0 e z_i , sono due valori qualunque di z , risulterà:

$$\overline{F}(z_0) = \frac{N(x)}{x^{\mu+1}}, \quad \overline{F}(z_i) = \frac{M_i(x)}{x^{\mu+1}}, \quad (\text{E.9})$$

dove $N(x)$ ed $M_i(x)$ sono polinomi interi in x ; e avremo:

$$e^{-z_0 x} N(x) - e^{-z_i x} M_i(x) = x^{\mu+1} \int_{z_0}^{z_i} e^{-zx} F(z) dz \quad (\text{E.10})$$

in particolare con $z_0 = 0$ e $z_i = 1$:

$$e^x N(x) - M_i(x) = x^{\mu+1} \int_0^1 e^{1-z} F(z) dz$$

la presenza del fattore $x^{\mu+1}$ nel secondo membro ci dice che con i polinomi $M_i(x)$, ed $N(x)$ dati dalle E.9 si ottiene l'approssimazione all'esponenziale e^x che si richiedeva.

$N(x)$ ed $M_i(x)$ sono di grado $\mu - h_0$ e $\mu - h_i$ se z_0 e z_i sono radici di $F(z) = 0$, multiple degli ordini h_0 ed h_i , rispettivamente.

Ora, se z_i è uno fra n valori, $z_1, z_2, \dots, z_n$, della z , con le funzioni razionali

$$\frac{M_1(x)}{N(x)}, \frac{M_2(x)}{N(x)}, \dots, \frac{M_n(x)}{N(x)}$$

di uguale denominatore, date dalle E.9, ove si faccia $i = 1, 2, \dots, n$, otteniamo una simultanea approssimazione agli esponenziali $e^{z_1 x}, e^{z_2 x}, \dots, e^{z_n x}$. E i polinomi $N(x), M_1(x), M_2(x), \dots, M_n(x)$ saranno di grado minore di μ , se prenderemo

$$F(z) = (z - z_0)^{h_0} (z - z_1)^{h_1} (z - z_2)^{h_2} \dots (z - z_n)^{h_n}$$

con $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ interi non nulli e tali che risulti $h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_n = \mu$: Se poi $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ sono interi ed h è un intero non nullo, non maggiore di alcuno degli esponenti $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ i coefficienti di tutti i polinomi $N(x), M_1(x), M_2(x), \dots, M_n(x)$ risultano interi e divisibili per $h!$. E così la formula E.10, con $i = 1, 2, \dots, n$ ed $x = 1$, dà luogo alle altre:

$$e^{-z_0} \alpha_0 - e^{-z_i} \alpha_i = \frac{1}{h!} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} F(z) dz \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{E.11})$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono numeri interi; e si dimostra che, con h abbastanza grande, è

$$|e^{-z_0} \alpha_0 - e^{-z_i} \alpha_i| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove δ è un numero assoluto non nullo comunque prefissato. Così si raggiunge la proposizione fondamentale in questa ricerca: Si hanno $n + 1$ numeri interi

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n,$$

non tutti nulli, che differiscono di tanto poco quanto si vuole da quantità proporzionali alle $n + 1$ potenze di e :

$$e^{z_0}, e^{z_1}, e^{z_2}, \dots, e^{z_n}$$

corrispondenti ad esponenti interi comunque dati.

Dopo questo, il supporre che e sia algebrico e che quindi si abbia, con esponenti interi $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$, diversi uno dall'altro, e con coefficienti $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$, pure interi e non tutti nulli:

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} + \dots, N_n e^{z_n} = 0$$

porta che, quando h sia abbastanza grande, deve essere

$$N_1 e^{z_1} \epsilon_1^{(h)} + N_2 e^{z_2} \epsilon_2^{(h)} + \dots, N_n e^{z_n} \epsilon_n^{(h)} = 0 \quad (\text{E.12})$$

ove è posto

$$\epsilon_i^{(h)} = \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} F(z) dz$$

T. J. Stieltjes con conveniente scelta di una $F(z)$, dimostra che non ha luogo la E.12.

Ponendo

$$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 2, \dots, z_n = n,$$

con

$$F(z) = z^h ((z - 1)(z - 2) \dots (z - n))^{h+1}$$

D. Hilbert, A. Hurwitz e P. Gordan dimostrano che non ha luogo la E.12, quando $h + 1$, oltre che abbastanza grande, sia primo. La dimostrazione della trascendenza di e , conseguita attraverso l'ordine d'idee accennato, è stata semplificata anche da altri autori, così da non richiedere intorno all'esponenziale altra conoscenza che quella del suo sviluppo in serie.

E.3.4 La trascendenza di π

F. Lindemann estende al campo complesso le considerazioni di Ch. Hermite. Supposto che $F(z)$ sia un polinomio intero a coefficienti complessi nella variabile complessa z e considerando l'integrale

$$\int_{z_0}^{z_i} F(z) dz$$

esteso ad un cammino di lunghezza finita e tutto posto a distanza finita, inteso che sia $z_0 = 0$ e che $z_1, z_2, \dots, z_n$ siano n numeri complessi qualsiasi, tramuta nel seguente il teorema fondamentale di Ch. Hermite:

Si hanno $n + 1$ funzioni

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

interi, a coefficienti interi, in $z_1, z_2, \dots, z_n$, tali che

$$|\alpha_0 - e^{-z_i} \alpha_i| < \sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove σ è un numero assoluto non nullo comunque prefissato. Da questo teorema si ricava che, qualunque sia il numero algebrico non nullo ζ , e^ζ non è razionale. E siccome $e^{i\pi} = -1$, è provato che $i\pi$ e π non sono numeri algebrici.

La dimostrazione di F. Lindemann, la quale richiede l'uso di teoremi intorno ai numeri algebrici che non sono fra quelli elementari, è stata semplificata da K. Weierstrass. Anche questo autore parte dalla proposizione che abbiamo detto fondamentale nelle dimostrazioni di Ch. Hermite e F. Lindemann. Egli la pone precisamente in questa forma: Se $f(z)$ è un polinomio in z , a coefficienti interi, di grado $n + 1$, a radici $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ diseguali, si ha un sistema di $n + 1$ polinomi in z :

$$g_0(z), g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)$$

interi e a coefficienti interi, di grado non maggiore di n , tali che il determinante $|g_i(z_j)|$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) è diverso da zero ed è

$$|g_k(z_0)e^{z_i} - g_k(z_i)e^{z_0}| < \sigma \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

essendo σ un numero assoluto non nullo comunque prefissato.

Si prova quindi che $e^\zeta + 1$ è diverso da zero qualunque sia il numero algebrico ζ ; si prova precisamente che e^ζ è diverso da zero il prodotto

$$(e^{\zeta_1} + 1)(e^{\zeta_2} + 1) \dots (e^{\zeta_p} + 1)$$

dove $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$ siano i numeri algebrici coniugati soluzioni d'una qualunque equazione irriducibile a coefficienti razionali.

E questi risultati si generalizzano.

È diversa da zero la somma

$$N_1 e^{\zeta_1} + N_2 e^{\zeta_2} + \dots + N_p e^{\zeta_p}$$

dove $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$ siano numeri algebrici coniugati qualunque ed $N_1, N_2, \dots, N_p$ siano numeri interi non tutti nulli.

Se $N_1, N_2, \dots, N_p$ sono numeri algebrici qualunque, non tutti nulli, e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$ sono pure numeri algebrici, diseguali, non ha luogo l'uguaglianza:

$$N_1 e^{\zeta_1} + N_2 e^{\zeta_2} + \dots + N_p e^{\zeta_p} = 0$$

Onde, in particolare, qualunque siano il numero algebrico non nullo ζ e il numero algebrico N , non è $e^\zeta = N$; cioè la potenza e^ζ è trascendente per ogni valore algebrica non nullo dell'esponente.

Appendice F

Probabilità e geometria

L'incontro fra la geometria e il calcolo delle probabilità, rispettivamente una delle più antiche e una delle più recenti branche della matematica, porta a risultati di grande interesse, resi ancora più stimolanti dagli sviluppi dell'informatica. Per risalire all'origine di questo discorso, occorre considerare l'opera di un ... naturalista, forse il più celebre fra i naturalisti francesi: Georges-Louis Buffon (1707- 1788), che visse in un'epoca in cui gli uomini di cultura acquisivano fama in diversi campi del sapere. Nel 1733, molto prima che si consolidasse la sua reputazione nel campo



Figura F.1: Georges-Louis Leclerc, Conte di Buffon (Montbard, 7 settembre 1707 – Parigi, 16 aprile 1788), è stato un naturalista, matematico, saggista e cosmologo francese. Esponente del movimento scientifico legato all'Illuminismo, le sue teorie avrebbero influito sulle generazioni successive di naturalisti, in particolare su Jean-Baptiste Lamarck e Charles Darwin.

delle scienze naturali, egli aveva pubblicato una dissertazione dedicata al *Jeu de franc-carreau*,

sul quale ritornò nel 1777 nel suo *Essai d'arithmétique morale*. Ecco la descrizione che egli offre di questo gioco: “In una stanza pavimentata con piastrelle uguali, di qualsiasi forma, si lancia in aria uno scudo; uno dei giocatori scommette che esso, una volta caduto a terra, si troverà a *franc-carreau*, vale a dire su un'unica piastrella: il secondo scommette che lo scudo cadrà su due piastrelle, cioè coprirà una dei bordi che le separano; un terzo giocatore scommette che si troverà sopra due bordi; infine un quarto scommette che esso si troverà su tre, quattro o sei bordi; si domanda la sorte di ogni giocatore”; in altre parole, si chiede la probabilità di vincita di ciascuno di essi.

F.1 La probabilità discreta

Quale difficoltà emerge da un problema di questo tipo? Per rispondere a tale domanda richiamiamo la definizione di probabilità dovuta a Laplace⁽¹⁾: la probabilità di un evento è “il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili”. Quindi, la probabilità di ottenere 2 nel lancio di un dado è $\frac{1}{6}$, dal momento che vi sono sei risultati, cioè sei casi possibili, uno solo dei quali è “favorevole”: quello che fornisce come esito 2.

Definita in questi termini, la probabilità rispecchia una realtà empirica: effettuando un gran numero di lanci, il 2 comparirà, in media, una volta su sei; se dividete il numero di volte che avete ottenuto il 2 per il numero totale delle prove, trovate il 16 o 17 per cento. Questo rapporto esprime la frequenza dell'evento considerato e deve essere *ragionevolmente* vicino alla probabilità. Certamente, ciò vale solo in modo approssimativo e non esclude lunghe sequenze di 2, o lunghe sequenze senza 2; cosa di cui tutti i giocatori sono perfettamente consapevoli. Ben presto si presenta il primo ostacolo. Prendendo due dadi anziché uno, vi sono undici somme possibili: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Se si applicasse brutalmente la definizione che abbiamo dato poco sopra, la probabilità di ottenere 6, ad esempio, dovrebbe essere $\frac{1}{11}$. Tuttavia, realizzando l'esperimento un gran numero di volte, si trova una frequenza più vicina al 14 che al 9 per cento, ed è quest'ultimo risultato che corrisponde alla probabilità di $\frac{1}{11}$. Il motivo sta nel fatto che i “casi possibili” e i “casi favorevoli” devono essere, dice Laplace, “ugualmente possibili”, vale a dire equiprobabili. Questa definizione contiene una sorta di circolo vizioso, in quanto si definisce la probabilità tramite la probabilità. In pratica, si ovvia a tale inconveniente mediante considerazioni di simmetria: se i nostri due dadi sono ideali, ogni faccia ha uguale probabilità di uscita e, in tutto, possono verificarsi 36 casi: si ottiene 1 col primo dado e 1 con il secondo, 1 col primo dado e 2 con il secondo, e così via, sino alla combinazione 6 e 6. Cinque di questi 36 casi forniscono come somma sei ($1 + 5, 2 + 4, 3 + 3, 4 + 2, 5 + 1$), per cui la probabilità associata a questo evento è $\frac{5}{36}$, cioè circa 0.1388... Superate queste difficoltà, il calcolo delle probabilità relative ai più comuni giochi d'azzardo, come le carte, i dadi, le lotterie eccetera, si riconduce al computo di rapporti tra casi favorevoli e casi possibili, essendo questi ultimi in numero finito.

F.2 La probabilità continua

Nel gioco del *franc-carreau* la situazione è diversa i casi possibili qui sono costituiti da tutte le posizioni della moneta che si lascia cadere, posizioni che possono essere individuate in base a quelle del centro della moneta stessa, dal momento che quest'ultima ha forma circolare. I casi favorevoli all'evento *franc-carreau* sono invece quelle posizioni del centro della moneta in corrispondenza alle quali questa non interseca il margine delle piastrelle; essi possono quindi

¹Pierre-Simon Laplace nato il 23 Marzo 1749 a Beaumont-en-Auge, Normandy, Francia; morto a Paris il 5 March 1827

essere determinati costruendo all'interno di ogni piastrella la figura costituita dall'insieme dei punti che distano dai bordi una lunghezza maggiore o uguale al raggio della moneta. Per fissare

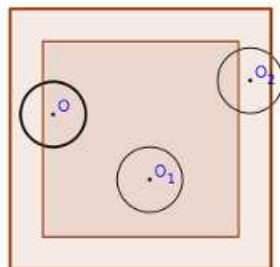


Figura F.2: Posizioni “favorevoli” della moneta casi (O e O_1) posizione sfavorevole (O_2)

le idee, cominciamo con una piastrella quadrata di lato c e una moneta di diametro d . La zona favorevole è il quadrato interno alla piastrella, il cui lato è $c - d$. Casi possibili e casi favorevoli sono dati da tutti i punti dei due quadrati, e sono pertanto in numero infinito. Peggio ancora: tale infinità non è discreta, come quella di una successione di punti, in cui se ne distingue un primo, un secondo $\dots$; si tratta, al contrario, di un’infinità continua non numerabile. Come conseguenza, la definizione di probabilità che abbiamo riportato sopra non è applicabile, poiché non è possibile contare i diversi casi.

In fondo, l’idea del conteggio, lungi dall’essere fine a se stessa, non è molto diversa da quella di misura. Ciò che ci interessa è il rapporto fra casi favorevoli e casi possibili e, se non possiamo calcolarli, li misuriamo. Come nella situazione in esame, essi costituiscono sottoinsiemi del piano, la cui misura corrisponde all’area: la probabilità richiesta sarà dunque il rapporto fra l’area del quadrato più scuro (figura F.2) e quella totale della piastrella: $\frac{(c-d)^2}{c^2}$.

Il gioco è equo se, quando i giocatori scommettono somme uguali, quello che punta su *franc-carreau* ha la stessa probabilità di vincita degli avversari; perché ciò si verifichi occorre che il rapporto fra le aree dei due quadrati sia uguale a $\frac{1}{2}$, il che implica $\frac{d}{c} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.2929$ da cui $\frac{c}{d} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142$. Come dice Buffon, “il lato della piastrella deve essere circa tre volte e mezzo più grande del diametro della moneta con cui si gioca”. Una volta compresa questa valutazione, possiamo seguire l’analisi di Buffon sulle varie forme delle piastrelle: triangolo equilatero, rombo (con due angoli di 60 gradi), esagono regolare.

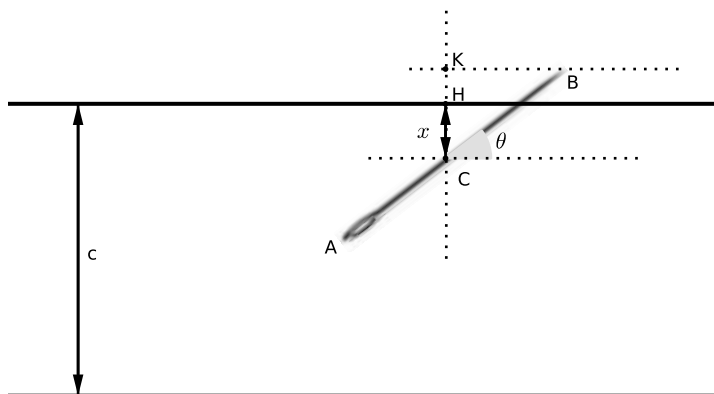
F.2.1 L ’ago sul parquet

Nello stesso saggio, Buffon prosegue: “D’altra parte, se invece di lanciare in aria una moneta rotonda, come uno scudo, si lasciasse cadere un oggetto piccolo e di forma differente, come una pistola di Spagna quadrata, o un ago. Il problema richiederebbe una miglior conoscenza della geometria, sebbene, in generale, sia sempre possibile trovarne la soluzione tramite confronti fra spazi”.

Buffon propone quindi il problema dell’ago: in una stanza, il parquet è diviso semplicemente da scanalature parallele, poste a distanza c l’una dall’altra. Si lancia in aria un ago di lunghezza

$d \leq c$ in modo che cada sul parquet, e si calcola la probabilità che esso intersechi una delle scanalature.

La posizione dell'ago AB è specificata dalla distanza x fra il suo centro C e la scanalatura più vicina e dall'angolo θ che esso forma con quest'ultima. Come accade spesso in matematica, conviene impostare il problema in un sistema di riferimento cartesiano: associamo alla posizione dell'ago il punto M di coordinate θ e x , tali che $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq x \leq \frac{c}{2}$. Osservando l'illustrazione, si vede



che l'ago interseca la scanalatura se CK è maggiore di CH , cioè se $\frac{d}{2} \sin \theta > x$. In altre parole, il punto M deve appartenere alla regione del piano delimitata dalla sinusoide di equazione $x = \frac{d}{2} \sin \theta$ e dall'asse delle ascisse. La probabilità richiesta è data dal rapporto fra l'area sottesa dalla curva e l'area totale del rettangolo in cui può cadere il punto M ; quest'ultima è $\frac{\pi c}{2} = \frac{c\pi}{4}$ e si può ricavare che la prima vale $\frac{d}{2}$ ⁽²⁾ la probabilità che l'ago intersechi la scanalatura è allora $p = \frac{2d}{c\pi}$. Se la lunghezza dell'ago è uguale alla distanza fra due bordi consecutivi, cioè se $d = c$, si trova $p = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366$.

F.2.2 Sperimentare il caso

Il problema di Buffon ha suscitato una grande risonanza, dovuta senza dubbio alla semplicità dell'enunciato e all'irruzione, quasi magica, del meraviglioso numero π nella soluzione. Il carattere rudimentale e di facile reperibilità del materiale necessario ha indotto generazioni di curiosi a cercare verifiche sperimentali.

²Questo risultato, per chi conosce il calcolo integrale, è molto semplice.

Chi non possiede questo strumento può rifarsi a 18.1.2, oppure utilizzare Maxima.

F.3 Ancora probabilità “geometrica”

F.3.1 Risolviamo il seguente quesito

Dato un segmento, di lunghezza ℓ , lo si divide in tre parti di lunghezza x , y e z tali che $x+y+z = \ell$. Qual è la probabilità che x , y , z siano i lati di un triangolo?

Soluzione geometrica. Affinché si possa costruire un triangolo devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y > z \\ x+z > y \\ y+z > x \\ x+y+z = \ell \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \ell - (x+y) \\ x+y > \frac{\ell}{2} \\ x < \frac{\ell}{2} \\ y < \frac{\ell}{2} \end{array} \right. \quad (\text{F.1})$$

□

F.3.2 Facciamoci aiutare da una simulazione con Python

Prendiamo un primo punto $a \in (0, \ell)$ ed un secondo punto $b \in (0, \ell)$ se $a > b$ chiamiamo a b ($a \leftarrow b$) e se $b > a$ lasciamo a e b invariati. I tre segmenti sono a , $b-a$ e $\ell-b$

Utilizziamo qui il primo sistema per la verifica.

$$\left\{ \begin{array}{l} a + (b-a) > \ell-b \\ a + \ell-b > b-a \\ (b-a) + \ell-b > a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell - (\ell-b) > \ell-b \\ b-a < \frac{\ell}{2} \\ a < \frac{\ell}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell-b < \frac{\ell}{2} \\ b-a < \frac{\ell}{2} \\ a < \frac{\ell}{2} \end{array} \right. \quad (\text{F.2})$$

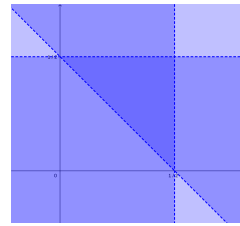
```
[2]: n = 10000000
l = 1.0
conta = 0
for k in range(n):
    a = random.uniform(0.0,1)
    b = random.uniform(0.0,1)
    # se a > b li scambio
    if (a > b):
        sponda = a
        a = b
        b = sponda
    if (a < 1/2 and b-a < 1/2 and 1-b < 1/2): #condizioni affinché si possa
        ➔ costruire il triangolo
        conta += 1
print(conta/n)
```

0.2499698

Soluzione. Calcolo della probabilità per via “geometrica”: rapporto di aree

Il sistema (che rappresenta i casi favorevoli): può essere così rappresentato:

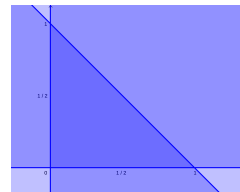
$$\begin{cases} x + y > \frac{\ell}{2} \\ 0 \leq x < \frac{\ell}{2} \\ 0 \leq y < \frac{\ell}{2} \end{cases}$$



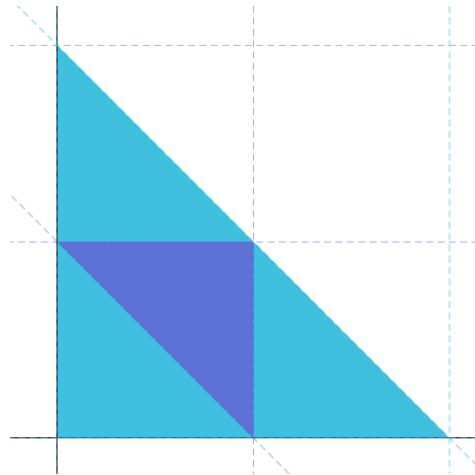
che può essere così rappresentato:

Mentre i casi possibili si ottengono dal sistema:

$$\begin{cases} x + y \leq \ell \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Che raccolto in una sola figura:



ci permette di calcolare la probabilità come rapporto delle aree quindi $\frac{1}{4}$

□

F.3.3 Mappiamo ora la “simulazione”

```
[3]: def mappaEstrazione(n):
    l = 1.0 # normalizziamo il segmento
    conta = 0
    puntoX = []
    puntoY = []
    ilcolore = []
    dentro = 'r.'
    fuori = 'b.'
    for k in range(n):
        x = random.uniform(0.0,1)
```

```

y = random.uniform(0.0,1)
if (x>y):
    sponda = x
    x = y
    y = sponda
puntoX.append(x)
puntoY.append(y-x)
if (x < 1/2 and y-x < 1/2 and 1-y < 1/2):
    conta += 1
    ilcolore.append(dentro)
else:
    ilcolore.append(fuori)

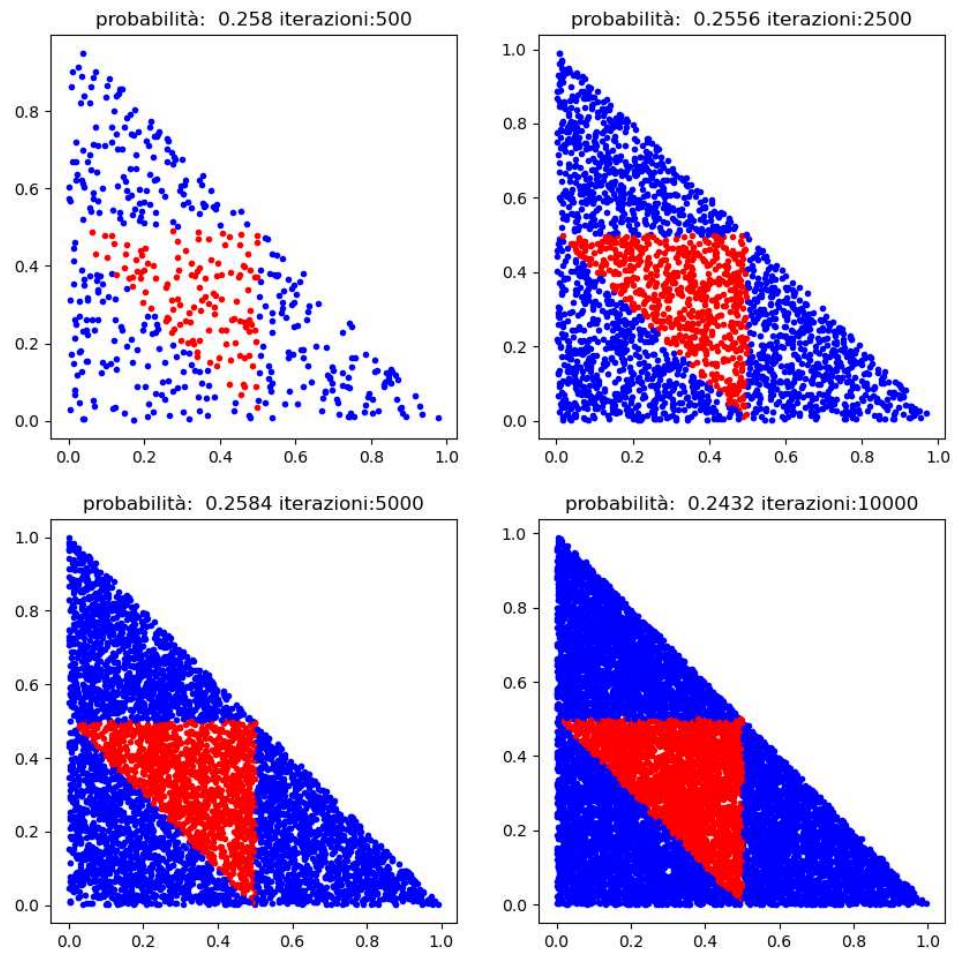
puntoX = np.array(puntoX, dtype=np.float64)
puntoY = np.array(puntoY, dtype=np.float64)
p = conta/n
return puntoX, puntoY, ilcolore, p

```

```

[4]: m = 500
figura, riquadro = plt.subplots(nrows=2, ncols=2, figsize=(10, 10))
#
puntoX0, puntoY0, ilcolore0, prob0 = mappaEstrazione(m)
for k in range(0,m):
    riquadro[0,0].plot(puntoX0[k], puntoY0[k], ilcolore0[k])
stringa = 'probabilità: '+str(prob0) + ' iterazioni: ' + str(m)
riquadro[0,0].title.set_text(stringa)
#
m = 2500
puntoX1, puntoY1, ilcolore1, prob1 = mappaEstrazione(m)
for k in range(0,m):
    riquadro[0,1].plot(puntoX1[k], puntoY1[k], ilcolore1[k])
stringa = 'probabilità: '+str(prob1) + ' iterazioni: ' + str(m)
riquadro[0,1].title.set_text(stringa)
#
m = 5000
puntoX2, puntoY2, ilcolore2, prob2 = mappaEstrazione(m)
for k in range(0,m):
    riquadro[1,0].plot(puntoX2[k], puntoY2[k], ilcolore2[k])
stringa = 'probabilità: '+str(prob2) + ' iterazioni: ' + str(m)
riquadro[1,0].title.set_text(stringa)
#
m = 10000
puntoX3, puntoY3, ilcolore3, prob3 = mappaEstrazione(m)
for k in range(0,m):
    riquadro[1,1].plot(puntoX3[k], puntoY3[k], ilcolore3[k])
stringa = 'probabilità: '+str(prob3) + ' iterazioni: ' + str(m)
riquadro[1,1].title.set_text(stringa)
plt.show()

```



Appendice G

Un esercizio storico

G.1 La «furbizia» delle api

Dörrie 2013

Tratto da: La vita delle api di Maurice Maeterlinck⁽¹⁾

Come è noto le api costruiscono quattro tipi di cellette. Prima di tutto le celle reali, eccezionali, che assomigliano alle ghiande della quercia; poi le grandi celle destinate ad allevare i maschi e ad accogliere le provviste dei periodi di fioritura sovrabbondante, e le cellette che fanno da culla alle operaie e da deposito ordinario, disposte in genere sugli otto decimi circa della superficie edificata dell'alveare. Infine, per raccordare con ordine le grandi e le piccole celle, ne costruiscono una certa quantità di transizione.

Se si trascurasse l'irregolarità di queste ultime, le celle del secondo e del terzo tipo presentano dimensioni calcolate con tale precisione, che quando si stava stabilendo il sistema metrico decimale, e si cercava in natura una misura fissa come punto di partenza e incontestabile prototipo, Réaumur ⁽²⁾ propose l'alveolo delle api.

Ognuno di tali alveoli è costituito da un esagono posato su una base piramidale, ed ogni favo è formato da due facce intessute di tali tubi esagonali, fronteggianti sulle basi secondo un disegno tale per cui ciascuna delle terne di rombi o losanghe costituenti la base piramidale della cella del lato rovescio del favo venga a fornire la base, sempre piramidale, di tre celle del lato opposto. È cosa risaputa dai geometri, dice il dottor E. Reid, che vi sono soltanto tre tipi di figure che consentono di suddividere una superficie in piccole parti equivalenti, di forma regolare, ugual grandezza, senza interstizi. Si tratta del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare per il quale, per quel che riguarda la costruzione delle celle, batte le altre due figure quanto a comodità e resistenza. Ed ecco che le api adottano proprio la forma esagonale, come se ne comprendessero i vantaggi. Lo stesso vale per il fondo delle cellette. Esso si compone di tre piani confluenti in un punto, ed è stato dimostrato che questo modo di costruire consente la realizzazione di considerevoli economie per ciò che riguarda lo sforzo lavorativo ed il materiale.

Restava da scoprire quale angolo di inclinazione dei piani corrispondesse al massimo di economia.

È un problema di alta matematica, risolto da alcuni studiosi, e tra gli altri da McLaurin, la cui proposta di soluzione si può trovare nei resoconti della Società Reale di Londra. L'angolo determinato in base a tali calcoli corrisponde a quello che si trova misurando il fondo delle cellette. (vedi G.1.2)

¹Il conte Maurice Polydore Marie Bernard Maeterlinck (Gand, 29 agosto 1862 – Nizza, 6 maggio 1949) è stato un poeta, commediografo e saggista belga, vincitore del Premio Nobel per la Letteratura nel 1911.

²René-Antoine Ferchault de Réaumur (La Rochelle, 28 febbraio 1683 – Saint-Julien-du-Terroux, 17 ottobre 1757) è stato uno scienziato e fisico francese, noto per i suoi studi sulla temperatura: da lui prende il nome la scala Réaumur di temperatura. Venne educato agli studi filosofici nel collegio gesuita di Poitiers, e nel 1699 si trasferì a Bourges per seguire lo studio di legge, matematica e fisica, dietro la tutela di uno zio canonico a La Sainte-Chapelle. Nel 1703 si trasferì a Parigi dove continuò gli studi matematici di fisica e nel 1708 all'età di 24 anni divenne membro

Non credo naturalmente che le api si dedichino a simili complesse operazioni di calcolo, ma nemmeno penso che bastino il caso o la pura forza delle cose a creare risultati così stupefacenti.

Identico ad esempio era il problema per le vespe, che come le api costruiscono favi a celle esagonali, ma in modo assai meno ingegnoso. I loro favi non possiedono che uno strato di celle, e mancano di quel fondo comune che serve contemporaneamente ai due strati contrapposti del favo delle api. Da ciò una minor solidità, maggior perdita di tempo e irregolarità spreco di materia e spazio: un quarto dello sforzo ed un terzo dello spazio necessari in più.

Allo stesso modo le trigone e le melipone, vere e proprie api domestiche, ma ad un più basso gradino evolutivo, costruiscono le loro cellette per l'allevamento su una sola fila, e mettono i loro favi in orizzontale, appoggiandoli sovrapposti su colonne di cera informi e dispendiose.

Quanto alle loro celle magazzino, sono grandi otri affastellati alla rinfusa, e laddove sarebbe possibile farle intersecare, ottenendo lo stesso risparmio di sostanza e spazio di cui usufruiscono le nostre api, le melipone, senza sospettare tale possibilità di economia, inseriscono in modo maldestro delle celle a pareti piane tra le sfere delle cellette.

Nello stesso modo, quando si fa il confronto tra i loro nidi e le città matematizzate delle nostre api, è come se si osservasse una borgata di capanne primitive di fronte a una di quelle implacabilmente regolari città che sono il frutto, magari sgraziato ma coerente, del genio dell'uomo, che più aspramente di una volta è in lotta col tempo, lo spazio e la materia.

La celletta del miele delle api è costituita da un prisma che ha per base un esagono regolare ed è chiusa da tre rombi inclinati in modo tale che la superficie del prisma, a parità di volume, sia minima.

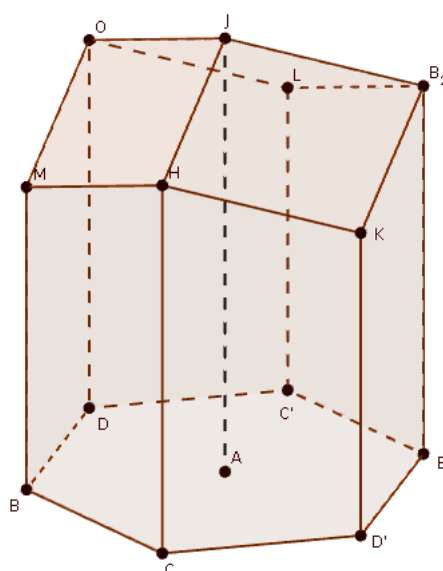


Figura G.1: Il prisma del miele

Veniamo ora al

Problema 52. Come devono essere inclinati i tre rombi affinché, a parità di volume, la superficie del prisma risulti minima.

G.1.1 Soluzione del problema di minimo

Qualunque sia l'inclinazione dei rombi il volume si mantiene costante, per costruzione si ha che

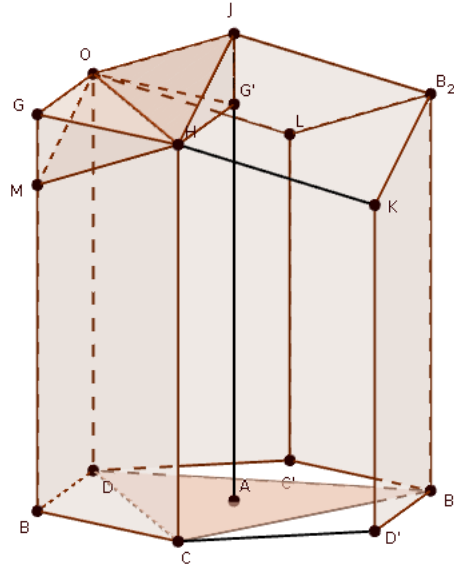


Figura G.2: Al variare della posizione di J il volume del prisma non cambia

$GHO = HG'O$ e $GM = G'J$, quindi le piramidi $GHOM$ e $HG'OJ$ sono equivalenti, pertanto il volume del prisma è pari al volume del prisma retto avente per base gli esagono regolari. Sia $\overline{AD} = \overline{SK} = 2\ell$ e allora $\overline{CB'} = \overline{HB_2} = 2\ell\sqrt{3}$; detti $\overline{JK} = 2y$, $\overline{JG} = x$ (e quindi $\overline{JS} = 2x$); applicando Pitagora al triangolo SKJ rettangolo in K , si ottiene: $y^2 = \ell^2 + x^2$. Passiamo ora al calcolo dell'area del prisma: $Area_{JHKB_2} = \frac{2\ell\sqrt{3}2y}{2} = 2\sqrt{3}(\ell^2 + x^2)$, $Area_{CD'KH} = \frac{2\ell(4\ell + 4\ell - x)}{2} = \ell(8\ell - x)$ per cui si ottiene:

$$Area_{honeybee} = 6\ell(8\ell - x) + 6\ell\sqrt{3(\ell^2 + x^2)} = A(x)$$

Si può ora procedere al calcolo del minimo utilizzando la funzione:

$$\underline{A}(x) = \frac{A(x)}{6\ell}$$

Che ammette minimo nel punto $x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$.

G.1.2 Soluzione inclinazione dei rombi

Ricaviamo ora l'ampiezza dell'angolo diedro formato dal piano contenente ciascun romboide con il piano di base. L'angolo cercato figura G.3 è $\widehat{JKS}$ che si ottiene applicando $\overline{JS} = \overline{SK} \operatorname{tg}(\widehat{JKS})$ da cui $\operatorname{tg}(\widehat{JKS}) = \sqrt{2}/2$.

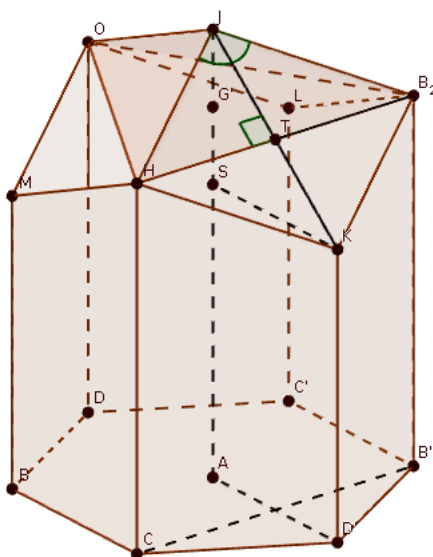


Figura G.3: Calcolo della superficie del prisma

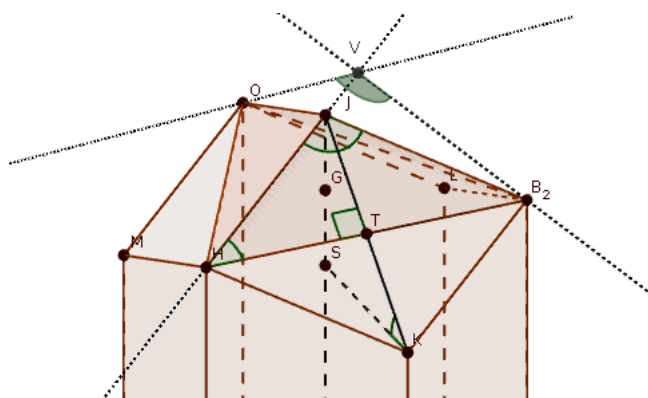


Figura G.4: Calcolo ampiezza angoli diedri

Ben più interessante risulta il calcolo dell'angolo diedro fra due rombi adiacenti (come $JHKB_2$ e $JOMH$, vedi figura G.4). Questo angolo diedro è quello formato dalle facce JOH e JHB_2 del tetraedro JHB_2O . Per calcolarlo è utile costruire le perpendicolari per O e B_2 alla retta HJ . Essendo $OH = HB_2$ le perpendicolari si incontrano nello stesso punto V . Calcoliamo ora $\sin(\widehat{JHT})$, sfruttando il triangolo rettangolo JHT si ricava $\sin(\widehat{JHT}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ora considerando il triangolo rettangolo HB_2V si ricava: $\overline{B_2V} = \overline{HB_2} \sin(\widehat{JHT}) = 2\ell$. Il triangolo isoscele VOB_2 ha quindi l'angolo $B_2\widehat{VO} = 120^\circ$.

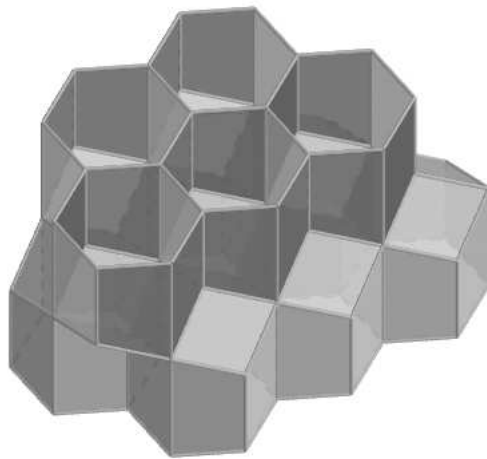


Figura G.5: Come si forma l'alveare

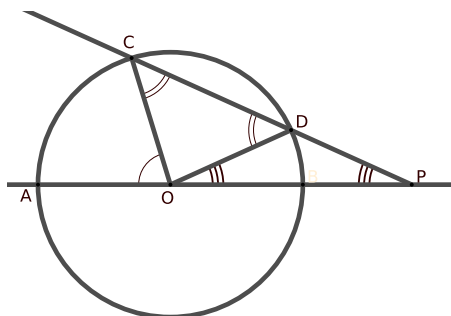
Appendice H

Le curve antiche

H.1 Incipit

Problema 53. Data una circonferenza Γ avente centro O e diametro $AB = 2R$, sia C un punto di Γ tale che $\widehat{AOC} = 3\alpha$ sia P un punto sul prolungamento del diametro AB , dalla parte di B , tale che $OD = DP$ (dove D è il punto d'intersezione tra PC e Γ compreso tra C e P). Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{APC}$?

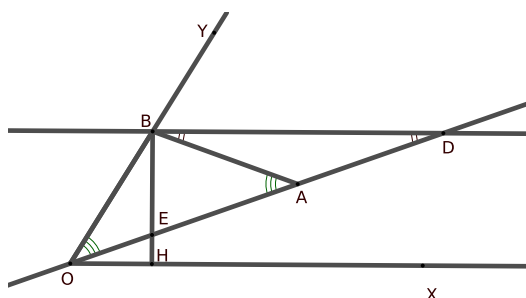
Soluzione. Dato che i triangoli ODC e PDO sono isosceli si ricava che $\widehat{AOC} = 3\widehat{OPD}$.



□

Problema 54. Sia $\widehat{XOY}$ un assegnato angolo acuto, scelto su OY un punto B , sia H la proiezione di B su OX e r la parallela ad OX per B . Sia E il punto di BH tale che detta s la semiretta OE e $D = s \cap r$ il segmento $ED = 2OB$. Si dimostri che $\widehat{DOX} = \frac{1}{3}\widehat{XOY}$.

Soluzione. Sia A il punto medio di ED , i triangoli BAD e ABO sono isosceli, Detto $\beta = \widehat{O\hat{D}B}$, si ha che $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\widehat{OAB} = \widehat{BOA} = 2\beta$, quindi $\widehat{BEA} = \frac{\pi}{2} + \beta$, per cui $\widehat{EOA} = \beta$. Cioè $\widehat{YOX} = 3\widehat{EOA}$.



□

H.2 Osservazione

In entrambi i precedenti due problemi è possibile ricavare un legame geometrico fra un angolo e la sua terza parte. Ma cercando troviamo (vedi L. Berzolari 2004):

I problemi classici

Impossibilità di risolverli elementarmente I problemi detti della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo e della quadratura del cerchio, oltre ad offrire un interesse teorico, hanno una particolare importanza dal punto di vista storico e delle applicazioni. Essi si possono enunciare così:

- a) ...
- b) dato un angolo qualunque, dividerlo in tre parti uguali;
- c) ...

...

il problema della duplicazione del cubo non è risolubile con costruzioni eseguibili solamente colla riga e col compasso. Sia φ l'angolo da trisecare; dalla trigonometria si ha:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{3 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \operatorname{tg}^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

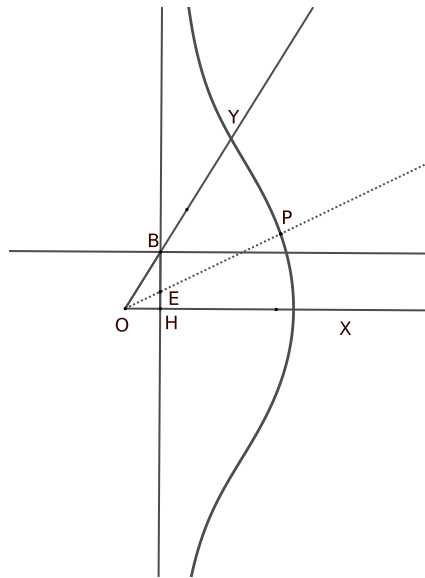
ponendo in questa equazione $\operatorname{tg}(\varphi) = m$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{3}\right) = x$ si ottiene la equazione cubica:

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$$

Questa equazione è, in generale irriducibile, quindi il problema della trisezione dell'angolo è, in generale, non risolubile elementarmente.

H.3 La costruzione

Partendo dal secondo problema notiamo che la difficoltà nel costruire la figura la troviamo nel determinare la posizione del punto E . Proviamo a costruire il luogo dei punti P che si trovano su OE e tali che $PE = 2AB$ con E appartenente alla retta BH , l'intersezione di questo luogo con la retta r ci fornisce il punto D cercato.



(Cresci 1998)Proclo (410-485 d.C) scrive: « Nicomede risolse il problema della trisezione dell'angolo rettilineo mediante le curve concoidi, delle quali scoprì le proprietà, e determinò la generazione, l'ufficio e le qualità caratteristiche. »

H.3.1 La concoide

Se s è una curva qualsiasi, e A è un punto fisso, su una retta da A , che interseca s in Q , si determinino i punti P e P' tali che $QP = P'Q = k$ con k costante. Il luogo dei punti P e P' si dice conoide di s rispetto A .

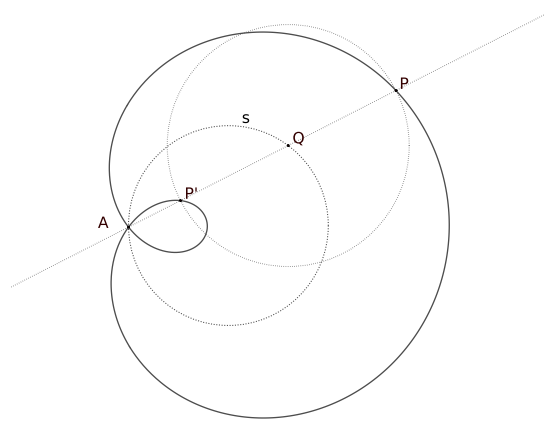


Figura H.1: s circonferenza, $A \in s$

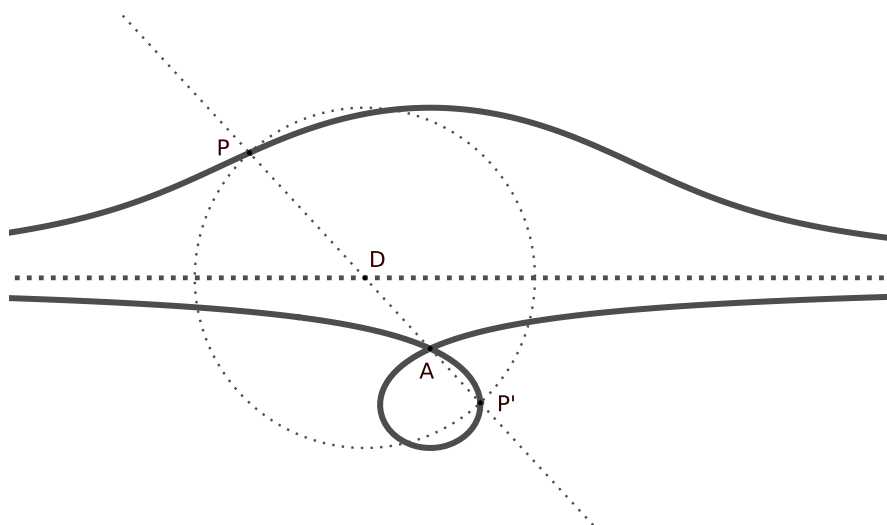


Figura H.2: s retta, $A \notin s$ k maggiore della distanza fra A ed s , detta anche *concloide*

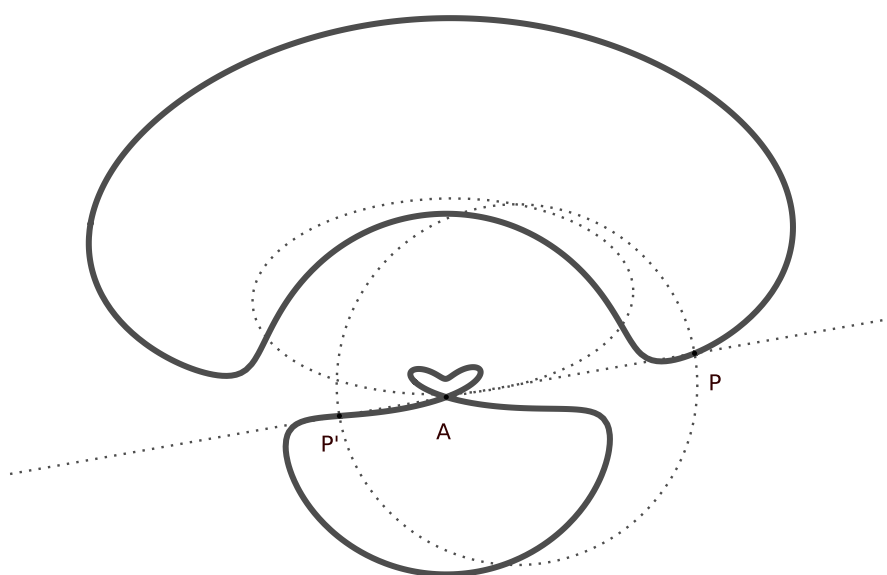


Figura H.3: s ellisse, $A \in s$

Appendice I

Costruzione geometrica di una parabola date sue quattro tangenti

Tratto da Dörrie 2013

Teorema 139 (prima proprietà delle tangenti). Siano t ed s le tangenti, rispettivamente, in A e B ad una data parabola $\mathcal{P}$ ($A \neq B$ e $A, B \in \mathcal{P}$), detti, F il fuoco della parabola ed S l'intersezione fra s e t ($S = t \cap s$).

Si dimostra che i triangoli SFA e BFS sono simili.

Dimostrazione. Siano AH e BK le distanze di A e B dalla direttrice della parabola, dalla definizione di parabola segue che $AH = AF$ e $BK = BF$ (vedi figura I.3), sappiamo, inoltre, che per costruzione t è l'asse di HF e s è l'asse di FK . La circonferenza Passante per KFH ha quindi centro in S (vedi figura I.2) per cui (vedi figura I.2) $\widehat{BSF}$ metà dell'angolo al centro che insiste sull'arco $\widehat{FB}$ e $\widehat{HKF}$ angolo alla circonferenza che insiste su $\widehat{FB}$ sono congruenti. Ragionando in modo analogo si ricava che anche $\widehat{ASF} = \widehat{HKF}$. Ora $\widehat{AHF}$ è complementare di $\widehat{HKF}$ ma $\widehat{HKF}$ è complementare di $\widehat{SAH} = \widehat{FAS}$ e quindi $\widehat{FAS} = \widehat{FSB}$, così pure per gli angoli $\widehat{FBS}$ e $\widehat{FHS}$ si ottiene che $\widehat{FBS} = \widehat{FAS}$ e quindi la tesi. $\square$

Aggiungiamo ora una terza tangente alla parabola, p , distinta da t ed s . Essa incontra, t in P ed s in Q

Teorema 140 (seconda proprietà delle tangenti). Il quadrilatero $FPSQ$ è ciclico. (Vedi figura I.4)

Dimostrazione. Dal teorema 139 si ha che: $\widehat{FAS} = \widehat{FSB}$ e $\widehat{FAP} = \widehat{FPC}$ e di conseguenza $\widehat{FSQ} = \widehat{FPQ}$, che è la tesi⁽¹⁾. $\square$

Il teorema 140 ci permette di affermare che il luogo dei fuochi delle parabole tangenti a tre rette è una circonferenza. I punti F' , F'' ed F''' simmetrici di F rispetto le rette t , p ed s appartengono alla direttrice della retta (vedi figura I.4). Quindi per ogni scelta di F si ha una parabola.

¹Ricordiamo che punti che vedono lo stesso segmento da angoli congruenti appartengono alla stessa circonferenza

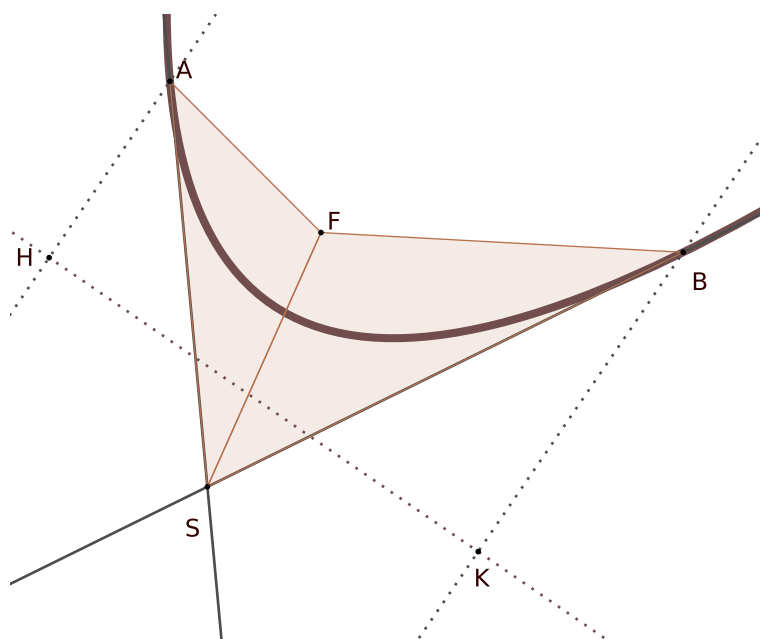


Figura I.1: Passo 1

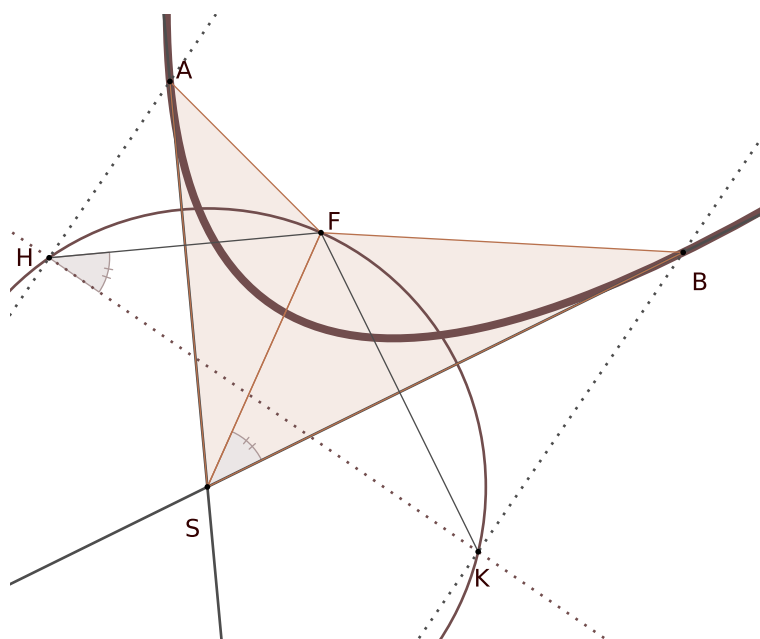


Figura I.2: Passo 2

Ora aggiungendo una quarta tangente, è possibile costruire quattro circonferenze: basta, infatti, prendere le quattro tangenti a gruppi di tre e utilizzare il teorema 140.

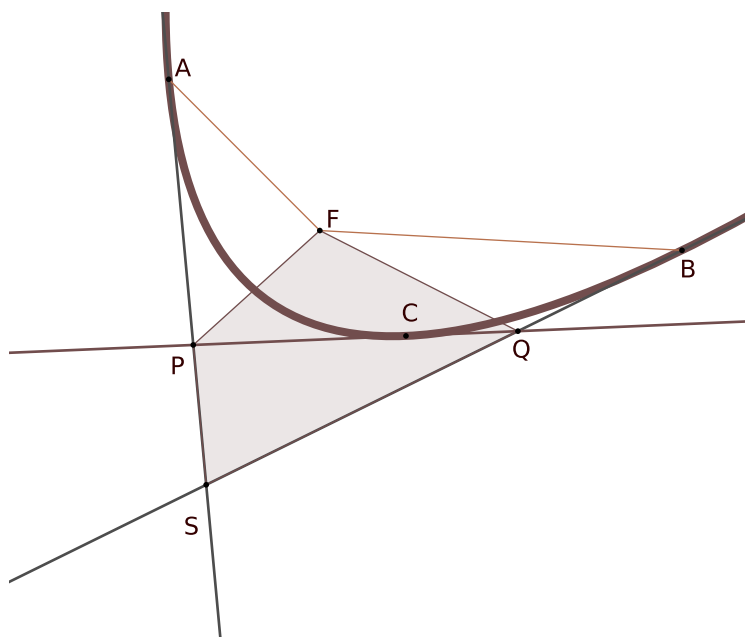


Figura I.3: Quadrilatero ciclico

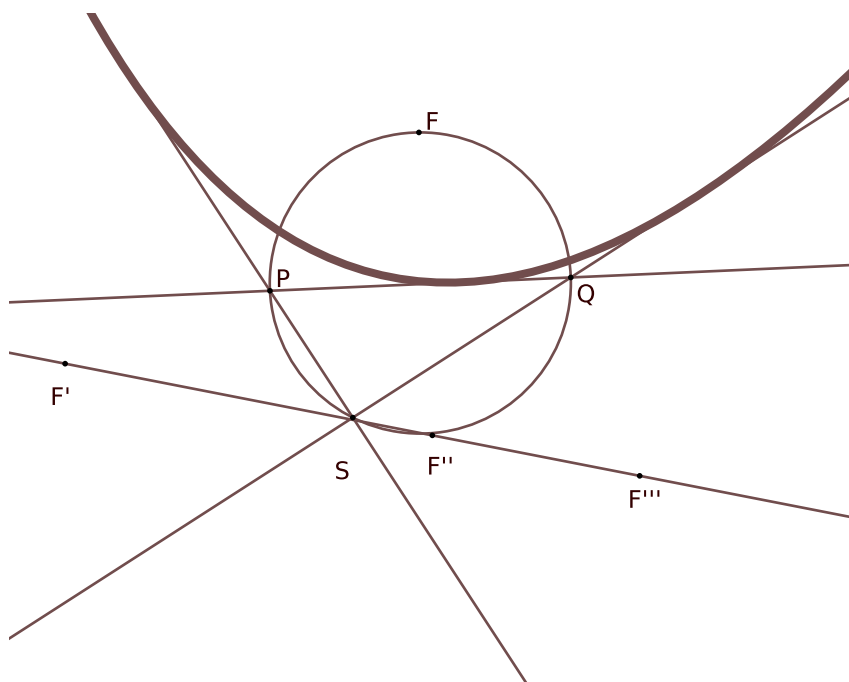


Figura I.4: Il luogo dei fuochi

Le circonferenze, costruite per i punti intersezione delle tre tangenti scelte, si incontrano nell'unico punto comune (vedi figura I.5), il fuoco della parabola.

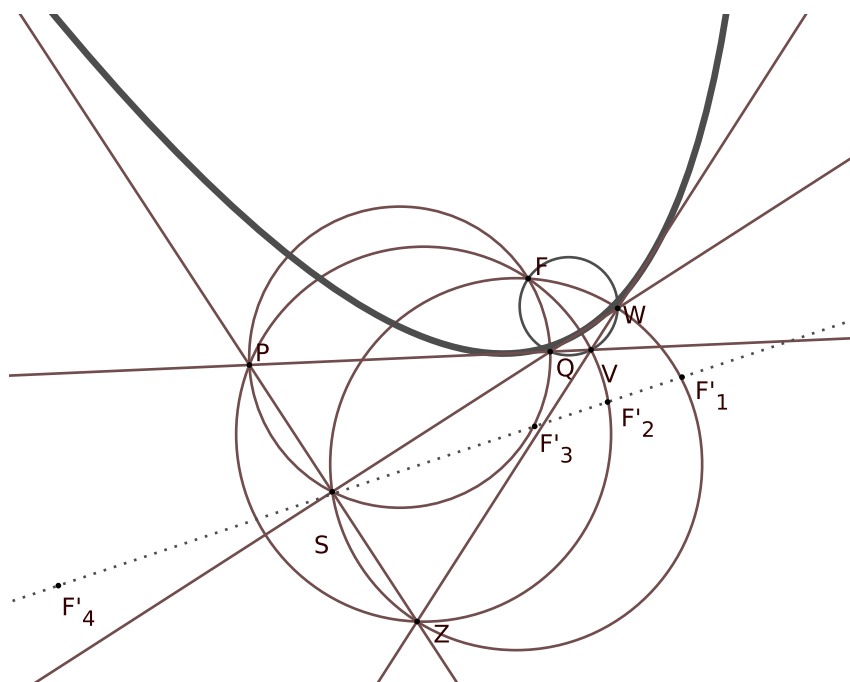


Figura I.5: Costruzione

Qui <https://www.geogebra.org/m/bavjbary> è possibile visualizzare la costruzione passo passo.

Appendice J

Quesiti “interessanti”

J.1 Quesiti proposti in simulazioni di seconda prova

Problema 55. In uno stabilimento un robot dispone lattine di pomodori pelati su un piano. Un giorno il robot impazzisce ed anziché disporre le lattine sul piano con la base orizzontale le poggia con la base inclinata in modo casuale rispetto al piano di appoggio; alcune si raddrizzano, altre no. Dopo che è stato deposto un grandissimo numero di lattine, si scopre che almeno $\frac{2}{3}$ di esse si sono raddrizzate.

Schematizzando una lattina come un cilindro omogeneo di raggio di base R ed altezza h , quanto deve essere, almeno, il rapporto $\frac{R}{h}$? (Motiva la risposta)

Soluzione. Si consideri la figura J.1 Dato che gli angoli $\widehat{MKJ}$ e $\widehat{JNM}$ sono retti, ne consegue

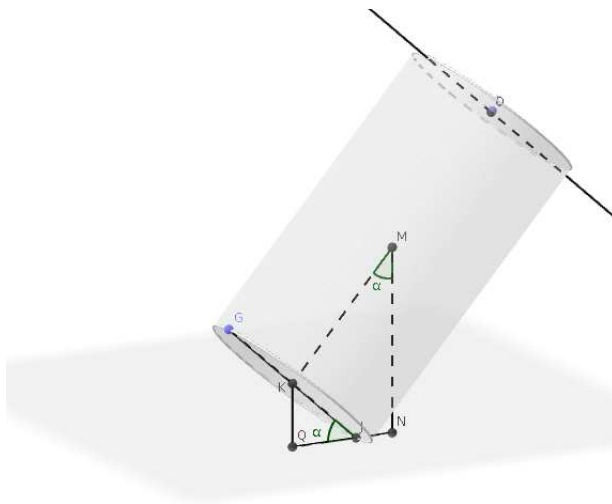


Figura J.1: Il barattolo di pomodori

che $\widehat{KMN} = \alpha$ e $\widehat{KJN}$ sono supplementari e quindi l'angolo $\widehat{QJK} = \alpha$. Il robot posiziona i barattoli con angoli che vanno da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, ora la condizione che permette al barattolo di restare in piedi è che la proiezione di M (N) cada nella proiezione della base. Considerando, data la simmetria del problema si può analizzare solo il caso $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ si ha che il barattolo rimane in piedi se $N \in QJ$, il caso limite si ha quando $N \equiv J$. In questo caso si ha che $\text{tg}(\alpha) = \frac{R}{\frac{h}{2}}$.

La condizione proposta dal problema si può scrivere: $\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$ Anche qui si fa uso di probabilità

geometrica: casi possibili arco di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ casi favorevoli arco di ampiezza α .

Nel caso in esame, si ricava $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e dato che $\text{tg}(\alpha) = \frac{R}{\frac{h}{2}}$ si ha: $\frac{2R}{h} = \sqrt{3}$ □

Nella raccolta di file Python (<http://www.joaogas.it/pagine/home.php?menu=9>) è proposta una simulazione.

Problema 56. Sia ABC un triangolo in cui $AB = CA = 6$ e $BC = 5$. Scelto all'interno di ABC il punto P , determinare la probabilità che P si trovi ad una distanza maggiore di 2 da ogni vertice.

Soluzione Geometrica. I punti P cercati devono trovarsi nella parte di triangolo che si ottiene eliminando i settori circolari di raggio 2 e ampiezza $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \alpha$ e $\widehat{BAC} = \beta$. I settori circolari così costruiti hanno area: settore di vertice A : $\frac{2 \cdot 2\beta}{2}$, settori di vertice C, B : $\frac{2 \cdot 2\alpha}{2}$.

La somma dei tre settori è $2\beta + 2(2\alpha)$, ma $\beta + 2\alpha = \pi$, per cui $\text{Area}_{\text{settori}} = 2\pi$.

Si può calcolare la probabilità come rapporto di aree $\frac{\text{Area}_{ABC} - \text{Area}_{\text{settori}}}{\text{Area}_{ABC}}$

Per i calcoli ci affidiamo a Python:

```
[2]: p = (5+6+6)/2
Atriangolo = sqrt(p*(p-6)*(p-6)*(p-5))
Ablu = pi*4/2
N(1-Ablu/Atriangolo,3)
```

[2]: 0.539

per “pigrizia” l’area di ABC è stata calcolata con Erone □

Questo problema si presta ad una simulazione ...

Simulazione. Costruiamo la funzione per verificare “dove” cade il punto:

```
[3]: def inTriangolo() :
    x = random.random()*5-2.5
    if x > 0 :
        r = B[1]+((C[1]-B[1])/(C[0]-B[0]))*(x-B[0])
```

```

        y = random.random()*r
    else :
        r = A[1]+((C[1]-A[1])/(C[0]-A[0]))*(x-A[0])
        y = random.random()*r
    P = Array([x,y])
    return P

```

```

[6]: A = Array([-2.5,0])
     B = Array([2.5,0])
     h = sqrt(6**2-B[0]**2)
     C = Array([0,h])

```

```

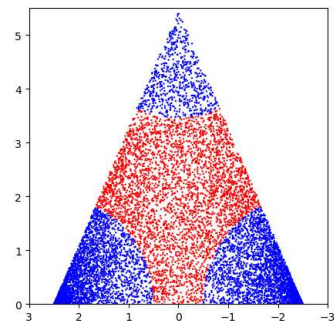
[7]: puntix = []
     puntiy = []
     colore = []
     conta = 0
     n = 10000
     for k in range(n) :
         P = inTriangolo()
         dPA = sqrt((P[0]-A[0])**2+(P[1]-A[1])**2)
         dPB = sqrt((P[0]-B[0])**2+(P[1]-B[1])**2)
         dPC = sqrt((P[0]-C[0])**2+(P[1]-C[1])**2)
         if dPA >= 2 and dPB >= 2 and dPC >= 2 :
             puntix.append(P[0])
             puntiy.append(P[1])
             colore.append([1,0,0,1])
             conta += 1
         else :
             puntix.append(P[0])
             puntiy.append(P[1])
             colore.append([0,0,1,1])

```

```

[8]: plt.figure(figsize=(5,5))
     plt.ylim(ymax = 5.5, ymin = 0)
     plt.xlim(xmax = -3, xmin = 3)
     plt.scatter(puntix, puntiy, 0.5,
                 ↪color = colore)
     plt.show()

```



```

[9]: N(conta/n,4)

```

```

[9]: 0.3804

```

...ops ...i conti non tornano ...come mai?

□

Appendice K

Il contenitore del latte anni sessanta

K.1 Vecchi ricordi ...il cartone del latte a forma di tetraedro

K.1.1 La storia

Storia di Tetra Pak

1943 Il lavoro di sviluppo inizia con la creazione di una confezione per il latte che richieda la minima quantità di materiale fornendo al contempo i massimi standard igienici.

1944 – 1951 Lo sviluppo continua. e riguarda, tra l'altro, l'introduzione di tecniche completamente nuove per rivestire la carta di plastica e per effettuare la sigillatura alla base per contenere il liquido.

1946 Il primo modello Tetra Pak per illustrare l'idea del dottor Ruben Rausing.

1951 A Lund, in Svezia, Ruben Rausing fonda la AB Tetra Pak come società controllata della Åkerlund & Rausing. Il 18 maggio, il nuovo sistema di confezionamento viene presentato alla stampa e attira molta attenzione.

...

<https://www.tetrapak.com/it/about/history>

K.2 Dato il rettangolo trovare il volume

Le dimensioni del rettangolo utilizzato sono base $b = 28.5 \text{ cm}$, altezza $a = 14.0 \text{ cm}$



utilizzando la costruzione "Tetra Pak[®]" si forma un solido le cui facce sono formate tutte da triangoli isosceli uguali, la cui base è $\frac{b}{2}$ e l'altezza h . Se si seziona il solido con un piano passante per le altezze delle facce si ottiene un triangolo isoscele di base $\frac{b}{2}$ e lati obliqui a . Applicando il teorema del coseno, si ottiene l'angolo al vertice.



```
[ ]: l1 = sqrt(a**2+(b/4)**2)
l1
```

```
[ ]: sqrt(A^2/16a^2 + a^2)
```

calcolo del coseno dell'angolo diedro: $\ell^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos(\vartheta)$

```
[ ]: eq1 = Eq((b/2)**2, (2*h**2-2*h**2*ctheta))
cosT = solve(eq1, ctheta)
```

```
[ ]: cT = cosT[0]
cT
```

```
[ ]: -A^2/8a^4 + 1
```

Calcoliamo il volume:

```
[33]: sinT =sqrt(1-cT**2)
      volume = ((b*h/4)*h*sinT)/3
      volume
```

$$\frac{Aa\sqrt{1 - \left(-\frac{A^2}{8a^4} + 1\right)^2}}{12}$$

K.3 Dato il volume trovare il rettangolo per costruire il tetraedro regolare

Qui il problema è un po' più semplice, infatti, sapendo che il volume del tetraedro regolare è

$$V_{tetraedro} = \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$$

si ricava facilmente lo spigolo ℓ e ricordando quanto svolto in precedenza si ha che la base del rettangolo $b = 2\ell$ mentre l'altezza $h = \ell \frac{\sqrt{3}}{2}$

```
[ ]: # dimensioni rettangolo b > a
      a,b = symbols('a,b', real = True, positive = True)
```

```
[ ]: # lato tetraedro
      l = b/2
      # altezza faccia
      h = sqrt(3)*l/2
      solve(Eq(a,h),b)
```

$$\left[\frac{4\sqrt{3}a}{3} \right]$$

```
[ ]: # capienza del contenitore 1/2 litro
      V = Rational(1,5) # dm^3
```

```
[ ]: # H altezza tetraedro
      H = sqrt(l**2-(Rational(2,3)*h)**2)
      H
```

$$\frac{\sqrt{6}b}{6}$$

Calcoliamo ora le dimensioni del rettangolo che ci permettono di costruire il “mitico” contenitore da $\frac{1}{2} \ell$

```
[ ]: dim1 = solve(Eq(l**2*(sqrt(3))/4*H/3,V),b)
      dim1[0], N(dim1[0],3), h.subs(b, dim1[0]), N(h.subs(b, dim1[0]),3)
```

$$\left(\frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{75}}{5}, 2.39, \frac{\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{5}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{10}, 1.03 \right)$$

Ecco il prodotto finito:



Figura K.1: Il contenitore da $\frac{1}{2}$ ℓ



Figura K.2: È passato un po' di tempo ...

Appendice L

Una particolare successione

L.1 La successione dei numeri di Fibonacci

Sia F_n la successione così definita:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \quad (\text{L.1})$$

Testiamo, la seguente relazione: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2$

```
[1]: from sympy import *  
init_printing()
```

```
[2]: def x(n) :  
    ris = fibonacci(n+1)*fibonacci(n-1)-(fibonacci(n))**2  
    return ris
```

```
[3]: n = symbols('n', integer = True, positive = True)
```

```
[8]: u = []  
for k in range(3,20) :  
    u.append(x(k))  
u
```

```
[8]: [-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1]
```

Possiamo ipotizzare la seguente congettura:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (\text{L.2})$$

Proviamo a dimostrarla per induzione:

come ricavato sopra si ha che se $n = 1$, $F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - (1)^2 = -1 = (-1)^1$; nota l'ipotesi induttiva: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, dobbiamo dimostrare che $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, ora $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2$ può essere scritto, utilizzando la (L.1) $(F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n+1}^2$,

sviluppando i calcoli si ottiene: $F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1} F_{n-1} - F_n F_{n-1} - F_{n+1}^2$ semplificando e raccogliendo si ha: $F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) - F_{n+1} F_{n-1}$ e ricordando che (sempre da (L.1)) si ha $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$ possiamo scrivere: $-(F_{n+1} F_{n-1}) + F_n^2$ che applicando l'ipotesi induttiva ci porta a $(-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

Come visto nel capitolo 39, una successione x_n è di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n, m > \bar{n} \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$, si può osservare che è sufficiente dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n > \bar{n} \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, infatti: nell'ipotesi che $m > n$ possiamo scrivere $m = n + p$ e quindi $|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_n|$ applicando più volte la disuguaglianza triangolare si ha:

$$|x_m - x_n| \leq \underbrace{|x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|}_p < p\varepsilon$$

Sia ora $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, x_n è di Cauchy:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right| &= \\ &= \left| \frac{F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2}{F_n F_{n-1}} \right| = \\ &= \left| \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}} \right| < \\ &< \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n > 5 \quad F_n > n \end{aligned}$$

x_n è definita positiva ed è di Cauchy, sia $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ allora esiste un $\underline{x}$ tale che $\lim x_n = \underline{x}$.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{F_{n+1}}{F_n} = \\ &= \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \\ &= 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \end{aligned}$$

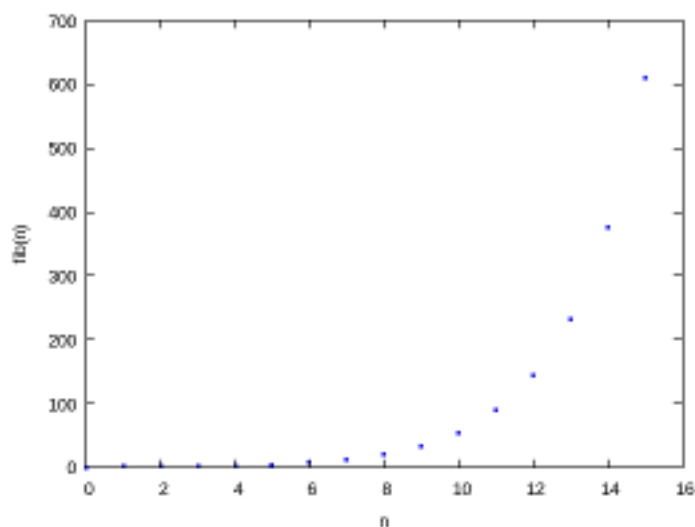
Passando al limite si ottiene la seguente equazione:

$$\underline{x} = 1 + \frac{1}{\underline{x}}$$

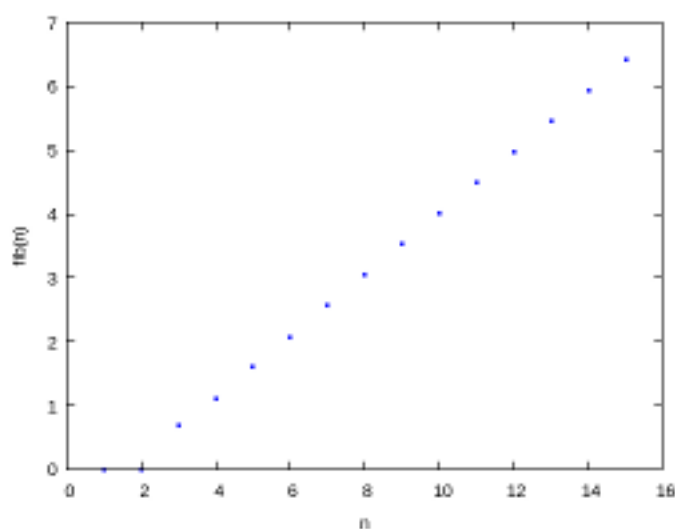
che risolta porta a: $\underline{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$.

L.2 Costruzione della funzione generatrice di F_n

Osservazione preliminare: se riportiamo in un grafico i valori di F_n otteniamo:



l'andamento sembra esponenziale, per convincerci tracciamo il grafico dei punti $(n, \log F_n)$:



essendo una retta ci convince l'ipotesi che F_n sia un esponenziale.

Scriviamo, ora, la regola ricorsiva per la costruzione di F_n nel seguente modo:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \quad (\text{L.3})$$

supponiamo che $F_n = a^n$ e quindi si ha:

$a^n - a^{n-1} - a^{n-2} = 0$, $a^{n-2}(a^2 - a - 1) = 0$ essendo a^n definita positiva, affinché l'uguaglianza possa essere vera si deve avere che $a^2 - a - 1 = 0$ che comporta, $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ora se a^n e b^n verificano (L.3) anche $Aa^n + Bb^n$ verifica (L.3) infatti $A(\underbrace{a^n - a^{n-1} - a^{n-2}}_{=0}) + B(\underbrace{b^n - b^{n-1} - b^{n-2}}_{=0}) = 0$.

Da quanto si è ricavato si ha che $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, basta calcolare A, B utilizzando le condizioni iniziali: $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Dato che:

$$F_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\begin{cases} F_0 = A + B = 0 \\ F_1 = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava: $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pertanto:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Appendice M

Una “bella” lezione di geometria

Appunti della lezione del prof. Giuseppe Bruno

sabato 7 febbraio 2009

Preparazione alle gare di matematica

M.1 I teoremi di Ceva

Giovanni Ceva: nasce il 7 dicembre 1647 a Milano fu educato a Milano in una scuola di gesuiti, frequentò gli studi universitari a Pisa, divenuto professore di matematica lavorò presso l'Università di Mantova. Si interessò di geometria, pubblicò nel 1678 un trattato “*De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*” in cui espone i teoremi qui riportati. Diede anche importanti contributi nello studio di problemi di idraulica. Morì a Mantova il 15 giugno 1734.

DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRUCTIO.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guaftallæ, &c.

AUCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanenfi.



MEDIOLANI

Ex Typographia Ludouici Montæ . MDCLXXVIII.
SUPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO MANTVÆ DVCI

FERDINANDO CAROLO.

Timerem, Serenissime Dux, præfigere tam splendida nomina exiguo huic libello, nisi publici iuris esset, præsidio Principum se, atque sua tueri. Scilicet Serenissimos hos Soles lucere omnibus voluit luminum Pater, & Moderator Deus, ut latè proijcerent beneficium iubar super vulgus

✱ 2

MONT-

IMPRIMATUR.

Fr. Antonius Maria Cruceius Sac. Th. Magister, & Commissarius Sancti Officii Mediolani.

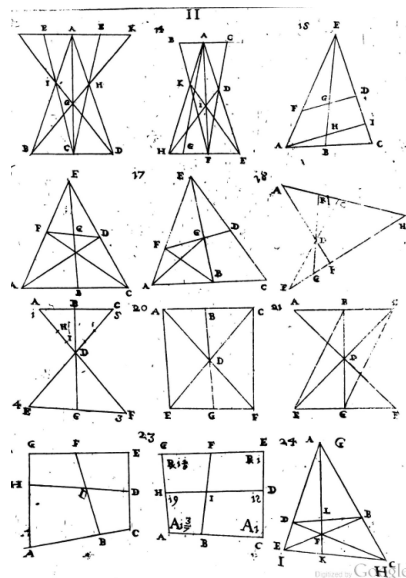
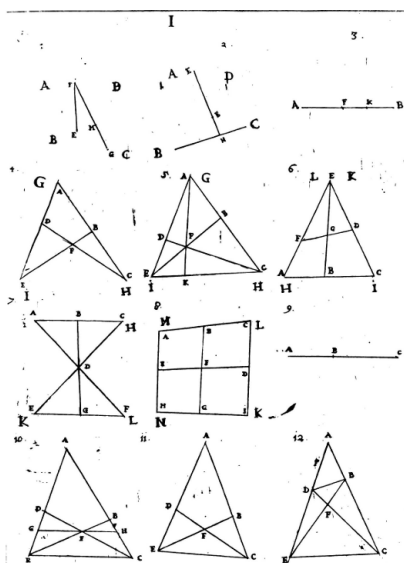
Iacobus Saita Canonicus Ambrosiana Basilica pro Eminentissimo D. D. Cardinali Archiepiscopo.

Franciscus Arbons pro Excellentissimo Senatu.



MEDIOLANI

Ex Typographia Ludouici Montia.
MDC LXXVIII.



Definizione 148 (Ceviana). Un segmento che congiunge un vertice di un triangolo con un punto qualsiasi del lato opposto è detto **segmento ceviano** o semplicemente **ceviana**.

Definizione 149 (Concorrenza). Tre rette o tre segmenti si dicono **concorrenti** se passano per lo stesso punto.

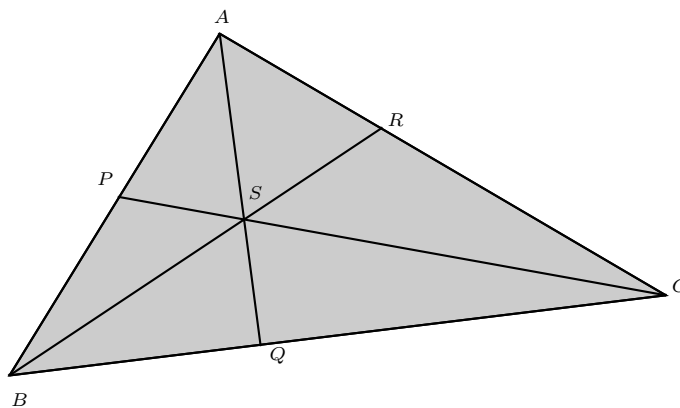


Figura M.1: Le ceviane

Teorema 141 (di Ceva). Sia ABC un generico triangolo, costruite le ceviane AQ, BR e CP, se le ceviane sono concorrenti si ha che: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$

Dimostrazione. si utilizza la seguente proprietà: le aree di triangoli con altezze congruenti sono proporzionali. Consideriamo il lato BC applicando la precedente proprietà si ha: $\frac{BQ}{QC} = \frac{Area_{ABQ}}{Area_{AQC}} = \frac{Area_{SBQ}}{Area_{SQC}} = \frac{Area_{ABQ} - Area_{SBQ}}{Area_{AQC} - Area_{SQC}} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}}$ procedendo in modo analogo sui lati CA e AB si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{CR}{RA} = \frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}},$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}}$$

Moltiplicando membro a membro le tre eguaglianze ricavate si ha:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}} \cdot \frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}} \cdot \frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}} = 1 \quad \square$$

Teorema 142 (di Ceva inverso). Se tre ceviane AQ, BR, CP soddisfano alla relazione: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ allora sono concorrenti.

Dimostrazione. Si ragiona per assurdo; supponiamo che esista un punto $P' \neq P$ tale che, se le prime due ceviane si intersecano in S, la ceviana CP passa per S. Si ha quindi: $\frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ ma essendo $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$ segue che $\frac{AP'}{P'B} = \frac{AP}{PB}$ da cui $P' = P$ assurdo. $\square$

M.1.1 Applicazioni dei teoremi di Ceva

In base al teorema di Ceva segue immediatamente che le **mediane di un triangolo sono concorrenti** in un punto (il baricentro). Infatti, essendo in questo caso P, Q ed R i punti medi dei lati del triangolo ABC, si ha: $AP=PB$, $BQ=QC$ e $CR=RA$ e quindi $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$

Teorema 143 (della concorrenza delle altezze di un triangolo). **Le altezze di un triangolo (pure loro ceviane) sono concorrenti** (ortocentro)

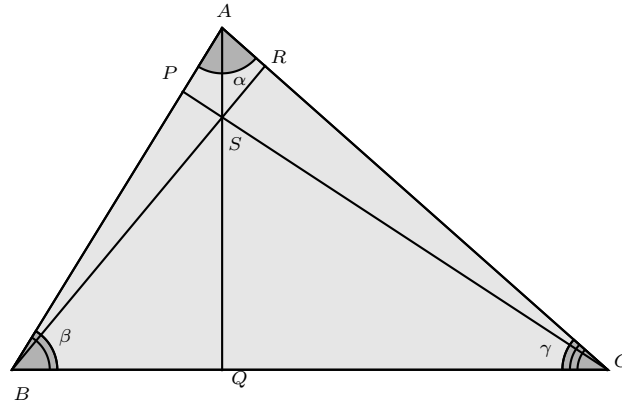


Figura M.2: Le altezze sono concorrenti

Dimostrazione. Come è noto risulta: $AP = AC \cos \alpha$, $PB = BC \cos \beta$, $BQ = AB \cos \beta$, $QC = AC \cos \gamma$, $CR = BC \cos \gamma$, $RA = AB \cos \alpha$ sostituendo quanto ricavato nel prodotto $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$ si ottiene: $\frac{AC \cos \alpha}{BC \cos \beta} \cdot \frac{AB \cos \beta}{AC \cos \gamma} \cdot \frac{BC \cos \gamma}{AB \cos \alpha} = 1$

Attenzione: poiché l'ortocentro può essere esterno al triangolo si segnala che il teorema di Ceva rimane valido anche quando le ceviane intersecano i prolungamenti dei lati del triangolo. $\square$

Anche le bisettrici di un triangolo sono concorrenti (nell’incentro). Per dimostrarlo utilizzando il teorema di Ceva, sono necessari i seguenti teoremi:

Teorema 144 (delle bisettrici degli angoli interni). La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC}$$

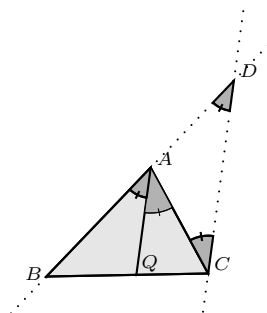


Figura M.3: Proprietà delle bisettrici degli angoli interni

Dimostrazione. DC parallela a ad AQ, si ricava $AD=AC$ si applica Talete per giungere alla tesi $\square$

Teorema 145 (delle bisettrici degli angoli esterni). La bisettrice di un angolo esterno di un triangolo interseca il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi di questo lato sono proporzionali agli altri due lati e viceversa.

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{AC}$$

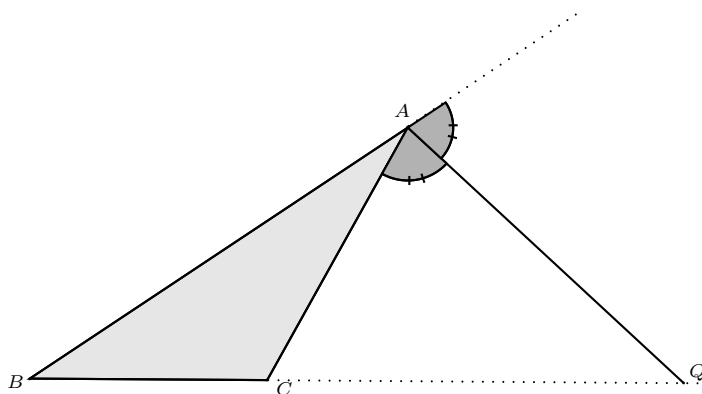


Figura M.4: Proprietà delle bisettrici degli angoli esterni

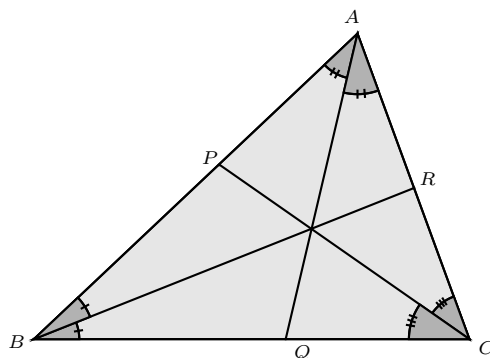


Figura M.5: Le bisettrici sono concorrenti

Dimostriamo ora che le **bisettrici sono concorrenti**. $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{CR}{RA} = \frac{BC}{AB}$
quindi $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$

Rapporto nel quale il punto di concorrenza divide ogni ceviana

Nel triangolo ABC, AQ, BR e CP sono ceviane, concorrenti in S, vedi (Figura M.1)

Da quanto visto nella dimostrazione del teorema di Ceva si sa che: $\frac{BQ}{QC} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}}$,

$$\frac{CR}{RA} = \frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}},$$

$\frac{AP}{PB} = \frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}}$ sapendo che le aree di segmenti con altezza congruente sono nello stesso rapporto

delle basi si ricava: $\frac{AS}{SQ} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{SBQ}}$,

$$\frac{AS}{SQ} = \frac{Area_{ASC}}{Area_{SQC}} \text{ quindi } \frac{AS}{SQ} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{SBQ}} = \frac{Area_{ASC}}{Area_{SQC}} \Rightarrow \frac{AS}{SQ} = \frac{Area_{ABS} + Area_{ASC}}{Area_{SBQ} + Area_{SQC}} = \frac{Area_{ABS} + Area_{ASC}}{Area_{BCS}} = \frac{Area_{ABS}}{Area_{BCS}} + \frac{Area_{ACS}}{Area_{BCS}} \text{ e quindi } \frac{AS}{SQ} = \frac{RA}{CR} + \frac{AP}{PB}$$

Attenzione: se i tre segmenti ceviani sono le mediane del triangolo, si ha $RA = CR$ e $AP = PB$
 $\frac{AS}{SQ} = \frac{RA}{CR} + \frac{AP}{PB} = 1 + 1 = 2$ come noto.

Teorema 146 (delle mediane). Dette m_A , m_B ed m_C le mediane uscenti dai vertici A, B e C. Risulta: $m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_B = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$, $m_C = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$ essendo $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$

Dimostrazione. Utilizzando il teorema del coseno si ottiene: $m_A^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_A \frac{a}{2} \cos \alpha = c^2$ e anche $m_A^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_A \frac{a}{2} \cos(\pi - \alpha) = b^2$ sommando membro a membro si ottiene la tesi. $\square$

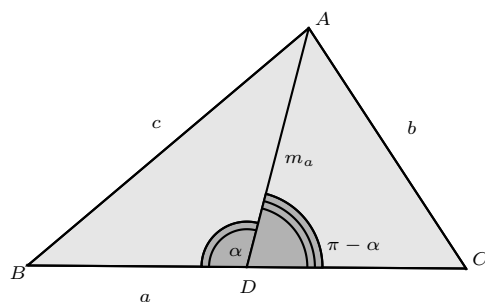


Figura M.6: Teorema delle mediane

Teorema 147 (di Eulero). Sia ABCD un quadrilatero, siano M ed N i punti medi delle diagonali AC e BD. Allora: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2$

Dimostrazione. Applicando il teorema delle mediane ai triangoli ABC, ACD e BDM:

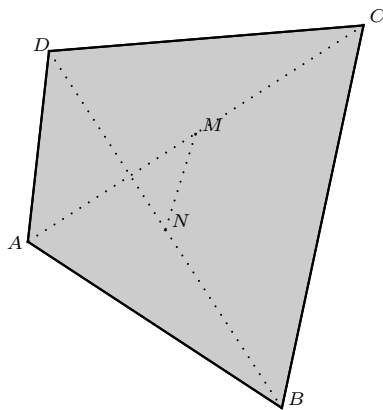


Figura M.7: Teorema di Eulero

$$4\overline{BM}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) - \overline{AC}^2$$

$$4\overline{DM}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2) - \overline{AC}^2$$

$$4\overline{MN}^2 = 2(\overline{DM}^2 + \overline{BM}^2) - \overline{BD}^2$$

$$4\overline{MN}^2 = 2\overline{DM}^2 + 2\overline{BM}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 \text{ da cui la tesi. } \square$$

Appendice N

Gli involuppi

Definizione 150 (Inviluppo). Con riferimento a una famiglia di curve, l'inviluppo è la curva tangente a tutte le curve della famiglia.

N.1 Una definizione “operativa”

L'inviluppo di una famiglia di linee, ottenute al variare di una linea base, è una curva che in ogni suo punto risulta tangente ad una linea della famiglia. In pratica, quando l'intervallo di variazione della linea origine è piccolo, e cioè graficamente le linee della famiglia sono ravvicinate, la curva involuppo appare evidente. Ecco alcuni esempi:

N.1.1 La nefroide

Data una circonferenza Γ ed un suo diametro AB , si cerca la curva tangente a tutte le circonferenze aventi centro su Γ e tangenti ad AB .

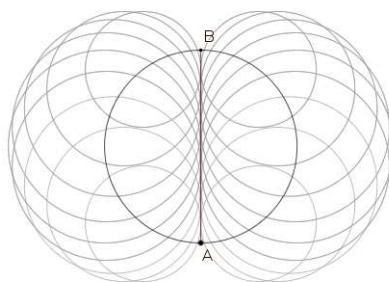


Figura N.1: In pratica, quando l'intervallo di variazione della linea origine è piccolo, e cioè graficamente le linee della famiglia sono ravvicinate, la curva involuppo appare evidente.

N.1.2 Lumache di Pascal

Data nel piano π una circonferenza Γ e un punto O , si cerca la curva tangente a tutte le circonferenze il cui centro C appartiene a Γ ed aventi raggio CO .

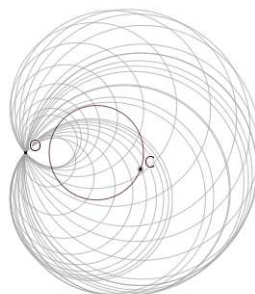


Figura N.2: In pratica, quando l'intervallo di variazione della linea origine è piccolo, e cioè graficamente le linee della famiglia sono ravvicinate, la curva involuppo appare evidente.

In GeoGebra troviamo un interessante comando: `Involuppo()`, se proviamo con le due curve precedenti troviamo:

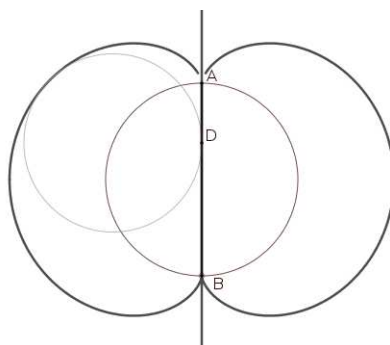


Figura N.3: Comando: `Involuppo(d, C)` dove d è la circonferenza di raggio CO e C è il punto che si "muove su Γ "

GeoGebra calcola l'equazione degli involuppi, quindi, proviamo a costruire una tecnica che ci permetta di calcolare l'equazione della curva involuppo.

N.2 Primo passo, un esempio

Riprendiamo la costruzione della parabola come luogo dei punti equidistanti da una retta data r e da un fissato punto F . Sia $r : y = 0$ e $F = (0, f)$. Nella costruzione si può vedere che gli assi dei segmenti FH sono le tangenti alla parabola.

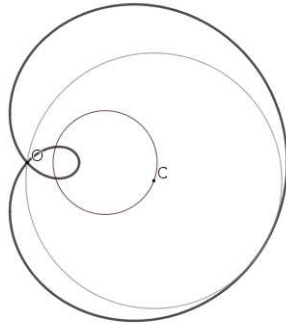
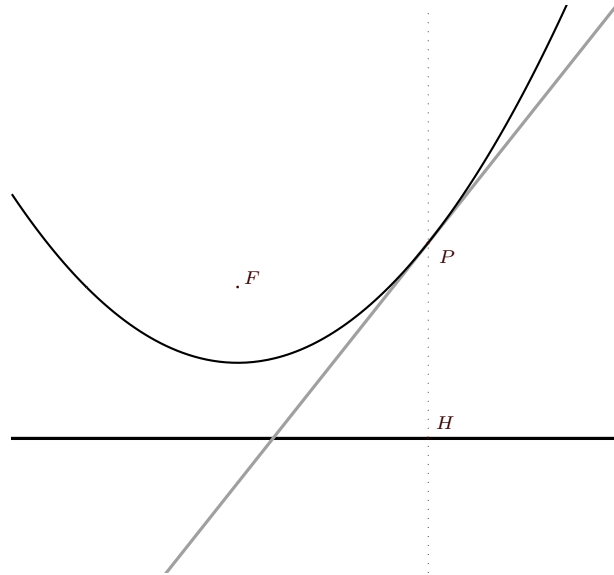


Figura N.4: Comando: Inviluppo(d, D) dove d è la circonferenza di centro un punto di Γ e tangente ad AB , D è il punto che si “muove” su AB



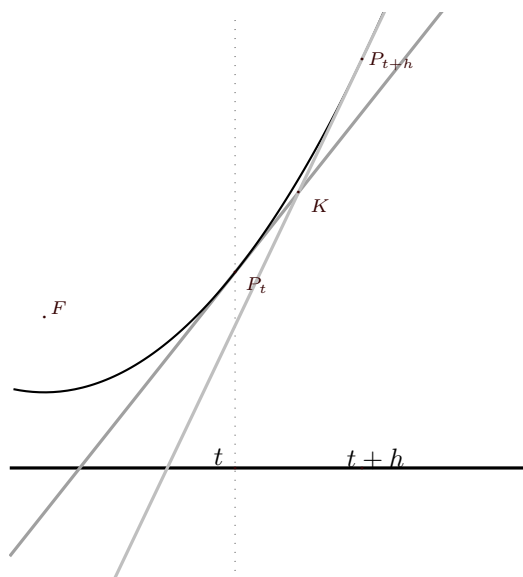
Possiamo quindi definire la parabola come l’inviluppo degli assi dei segmenti FH al variare di H .

N.2.1 Alla ricerca dell’equazione

Per iniziare ricaviamo l’equazione del generico asse del segmento FH , per fare questo imponiamo $H = (t, 0)$ dove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro. Ricordiamo che l’asse è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi, quindi, detto $A = (x, y)$ il generico punto dell’asse:

$$\underbrace{(x - t)^2 + y^2}_{AH^2} = \underbrace{x^2 + (y - f)^2}_{AF^2}$$

che semplificata ci dà: $a : 2yf - 2tx + t^2 - f^2 = 0$, il generico punto P dell’inviluppo evidentemente appartiene ad a . Possiamo dire $F(x, y, t) = 0$ questa equazione esprime, al variare di t , la famiglia di rette tangenti. Consideriamo ora due rette qualsiasi di questa famiglia, la prima corrispondente al parametro t , la seconda al parametro $t + h$.



entrambe le rette sono tangenti all'involuppo: la prima retta tocca la parabola nel punto P_t mentre la seconda nel punto P_{t+h} . Queste due rette si intersecano nel punto K che, da come appare nella figura, non appartiene all'involuppo. Se però riduciamo il valore di h facendolo tendere allo zero possiamo aspettarci che questo punto debba, appartenere alla curva involuppo. Per confermare queste osservazioni evidentemente intuitive determiniamo le coordinate di K e quindi studiamo il loro comportamento per $h \rightarrow 0$. Otteniamo, pertanto il sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ F(x, y, t+h) = 0 \end{cases}$$

Nel nostro esempio otteniamo: $\begin{cases} 2yf - 2tx + t^2 - f^2 = 0 \\ 2yf - 2(t+h)x + (t+h)^2 - f^2 = 0 \end{cases}$ che possiamo scri-

vere: $\begin{cases} 2yf - 2tx + t^2 - f^2 = 0 \\ \underbrace{2yf - 2tx + t^2 - f^2}_{=0} + 2hx - 2th + h^2 = 0 \end{cases}$ se facciamo tendere $h \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} 2yf - 2tx + t^2 - f^2 = 0 \\ 2hx - 2th + h^2 = 0 \quad x = t \end{cases} \text{ eliminando } t \text{ otteniamo } 2yf - 2x^2 + x^2 - f^2 = 0 \text{ cioè } y = \frac{x^2 + f^2}{2f}.^{(1)}$$

N.2.2 Cosa abbiamo fatto

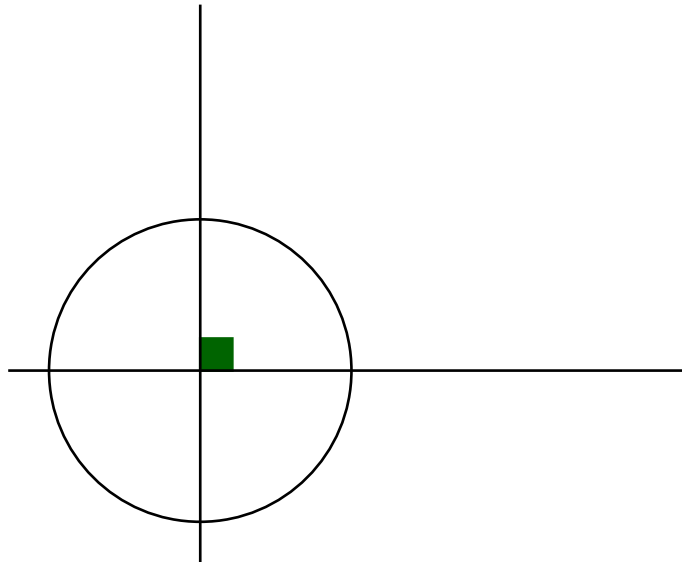
In pratica abbiamo derivato la funzione $F(x, y, t) = 0$ rispetto alla variabile t . Cioè abbiamo calcolato la derivata parziale di F abbiamo "lavorato" così: $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial (2yf - 2tx + t^2 - f^2)}{\partial t} = 0$, applicando la linearità si ha $\frac{\partial(2yf)}{\partial t} - \frac{\partial(2tx)}{\partial t} + \frac{\partial(t^2)}{\partial t} - \frac{\partial(f^2)}{\partial t} = 0$, dato che deriviamo rispetto a t ci rimane solo: $-2x + 2t = 0$, cioè quanto abbiamo in precedenza ricavato.

¹Se utilizziamo la costruzione classica otteniamo la stessa equazione!

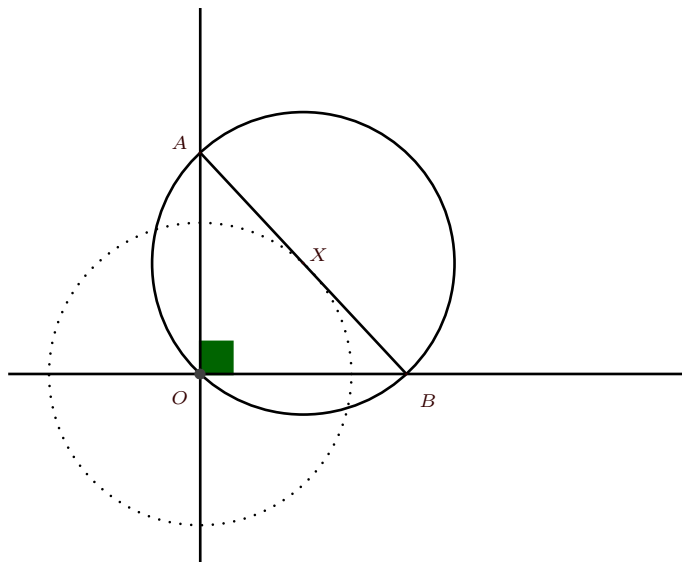
N.3 Le verifiche

N.3.1 L'Asteroide

Ci poniamo ora il problema di ricavare l'equazione dell'involuppo dei segmenti di lunghezza data ℓ i cui estremi sono vincolati ai lati di un angolo retto. Costruiamo la figura passo a passo: partiamo da una circonferenza di raggio $\frac{\ell}{2}$ il cui centro O coincide con il vertice di un angolo retto.



prendiamo ora un generico punto X sulla circonferenza e costruiamo una nuova circonferenza di centro X passante per O .



Il diametro AB di lunghezza ℓ è il segmento vincolato ai lati dell'angolo retto. Costruiamo l'e-

quazione della retta contenente il segmento AB . $X = (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta)$ $R = \frac{\ell}{2}$. La circonferenza Γ di centro X e raggio R ha equazione: $(x - R \cos \vartheta)^2 + (y - R \sin \vartheta)^2 = R^2$, Γ incontra gli assi, oltre che nell'origine nei punti $A = (0, 2R \sin \vartheta)$ e $B = (2R \cos \vartheta, 0)$, la retta r_{AB} ha equazione: $\frac{y}{2R \sin \vartheta} = \frac{x - 2R \cos \vartheta}{2R \cos \vartheta}$, cioè: $x \sin \vartheta + y \cos \vartheta - R \sin 2\vartheta = 0$.

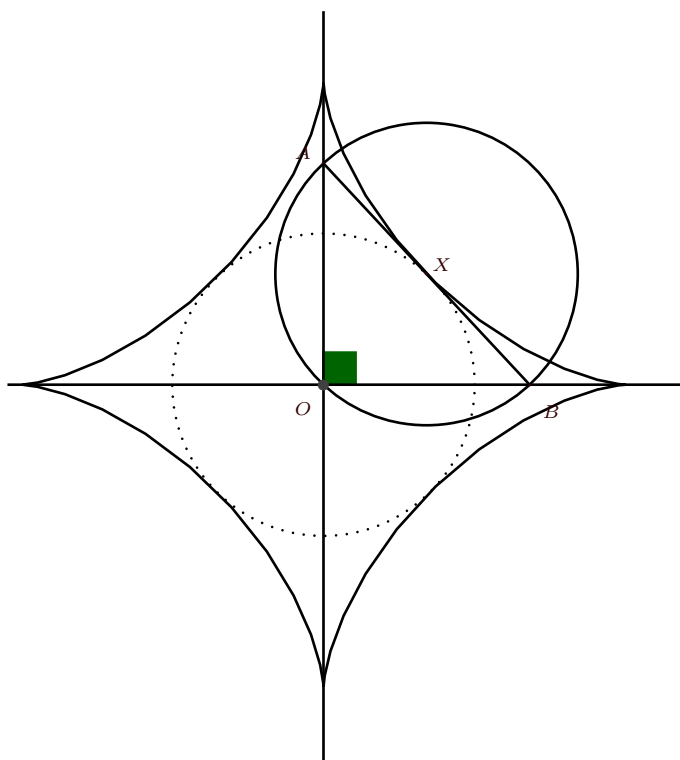
Applicando quanto visto in precedenza ricaviamo che l'equazione dell'involuppo e la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x \sin \vartheta + y \cos \vartheta - R \sin 2\vartheta = 0 \\ x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - 2R \cos 2\vartheta = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x da entrambe le equazioni, e sotto le opportune condizioni, si ottiene:

$$\begin{cases} y = \ell \sin^3 \vartheta \\ x = \ell \cos^3 \vartheta \end{cases}$$

Utilizzando in GeoGebra il comando *Curva* $(\ell \cos^3(t), \ell \sin^3(t), t, 0, 2\pi)$



N.3.2 La Nefroide

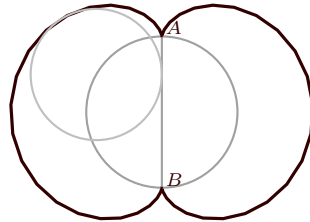
Scegliamo la circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (circonferenza goniometrica, il suo generico punto $P = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ la generica circonferenza che genera l'involuppo avrà equazione: $(x - \cos \vartheta)^2 + (y - \sin \vartheta)^2 = \sin^2 \vartheta$. Quindi per quanto appreso sopra il sistema che permette di ricavare l'equazione dell'involuppo è:

$$\begin{cases} (x - \cos \vartheta)^2 + (y - \sin \vartheta)^2 = \sin^2 \vartheta \\ x \sin \vartheta - y \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

che opportunamente semplificata ci permette di ottenere l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3 \cos \vartheta - 2 \cos^3 \vartheta \\ y = 2 \sin^3 \vartheta \end{cases}$$

Utilizzando GeoGebra (comando Curva) si ottiene:



N.3.3 La Cardioide

La cardioide è un particolare tipo di Lumaca di Pascal, in cui, O appartiene a Γ .

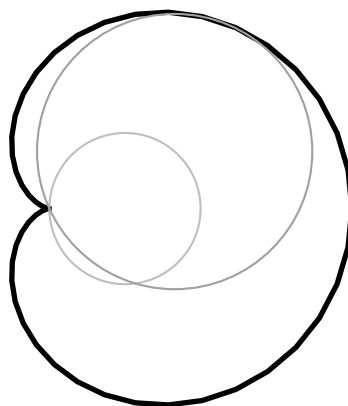
Scegliamo la circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (circonferenza goniometrica e $O = (-1, 0)$), il generico punto $P = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ di Γ . La generica circonferenza che genera l'involuppo avrà equazione: $(x - \cos \vartheta)^2 + (y - \sin \vartheta)^2 = (\cos \vartheta + 1)^2 + \sin^2 \vartheta$. Quindi per quanto appreso, il sistema che permette di ricavare l'equazione dell'involuppo è:

$$\begin{cases} (x - \cos \vartheta)^2 + (y - \sin \vartheta)^2 = (\cos \vartheta + 1)^2 + \sin^2 \vartheta \\ x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = -\sin \vartheta \end{cases}$$

che opportunamente semplificato ci permette di ottenere l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta - 1 \\ y = 2 \sin \vartheta (\cos \vartheta + 1) \end{cases}$$

Utilizzando GeoGebra (comando Curva) si ottiene:



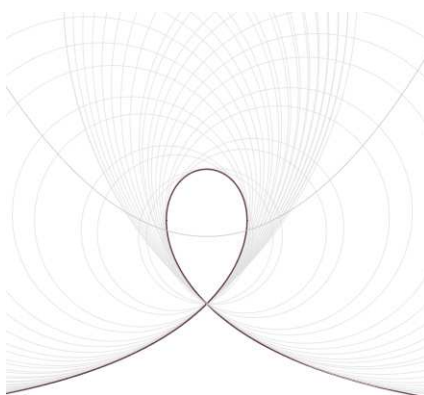
N.3.4 La Strofoide

La Strofoide è l'involuppo delle circonferenze il cui centro O appartiene ad una fissata parabola $\mathcal{P}$ e il raggio OA è la distanza fra O e il simmetrico rispetto al vertice della parabola del fuoco.

Sia $y = \frac{x^2}{2} + 1$ l'equazione di $\mathcal{P}$, con questa scelta le coordinate di A sono $(0, 0)$. Pertanto la ricerca dell'involuppo si riduce a risolvere il sistema:

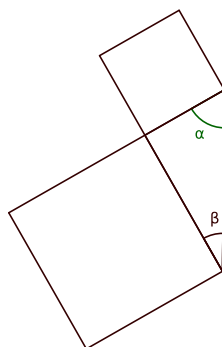
$$\begin{cases} (x-t)^2 + \left(y - \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\right)^2 = t^2 + \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2 \\ x - yt = 0 \end{cases}$$

Dove t è l'ascissa di $O = \left(t, \frac{t^2}{2} + 1\right)$. Eliminando t dal sistema si ottiene l'equazione algebrica della Strofoide: $x^2y + y^3 + x^2 - y^2 = 0$.

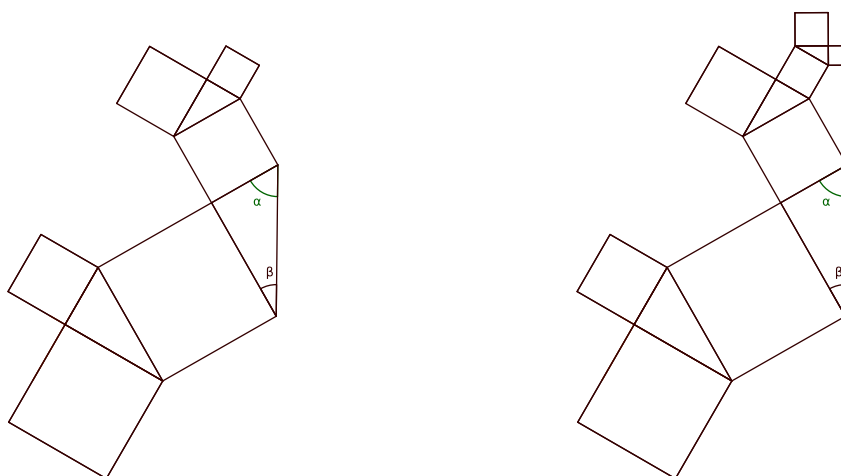


O.2 Indicazioni per la costruzione

Si parte disegnando nel piano un triangolo rettangolo sui cui cateti si costruiscono due quadrati:

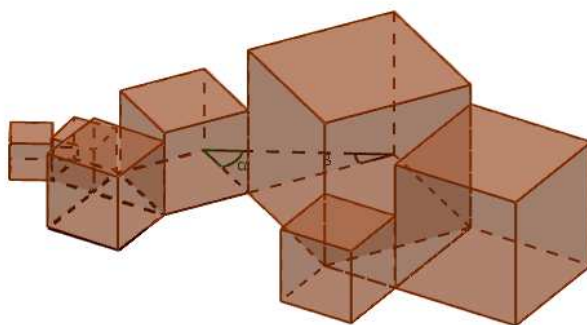


e poi in modo ricorsivo triangoli e quadrati:

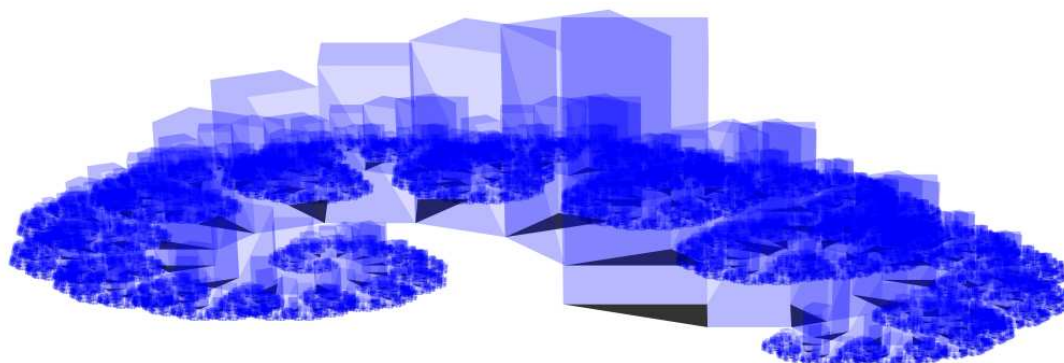


Qui <http://www.joaogas.it/pagine/covid19/logoJ2D.html> potete trovare la costruzione della figura in linguaggio Python⁽²⁾ Si porta poi tutto nello spazio:

²la forzata “finta” sospensione delle attività nel 2020 a causa della pandemia mi ha spinto a cambiare ancora linguaggio di programmazione, sono approdato a Python utilizzando prima PyCharm(*PyCharm* 2020) e poi jupyter notebook(*Jupyter* 2024)



Utilizzando gli opportuni “trucchi” si giunge a:



Appendice P

Funzioni e simboli: pratiche d'uso

Tabella P.1: Le lettere greche più usate in matematica e fisica

	minuscole	Maiuscole	L ^A T _E X
alpha	α		<code>\alpha</code>
beta	β		<code>\beta</code>
gamma	γ	Γ	<code>\gamma</code> , <code>\Gamma</code>
delta	δ	Δ	<code>\delta</code> , <code>\Delta</code>
epsilon	ε		<code>\varepsilon</code>
zeta	ζ		<code>\zeta</code>
eta	η		<code>\eta</code>
teta	θ, ϑ	Θ	<code>\theta</code> , <code>\vartheta</code> , <code>\Theta</code>
iota	ι		<code>\iota</code>
kappa	κ		<code>\kappa</code>
lambda	λ	Λ	<code>\lambda</code> , <code>\Lambda</code>
mu	μ		<code>\mu</code>
nu	ν		<code>\nu</code>
xi	ξ	Ξ	<code>\xi</code> , <code>\Xi</code>
pi	π	Π	<code>\pi</code> , <code>\Pi</code>
ro	ρ		<code>\rho</code>
sigma	σ	Σ	<code>\sigma</code> , <code>\Sigma</code>
tau	τ		<code>\tau</code>
upsilon	υ	Υ	<code>\upsilon</code> , <code>\Upsilon</code>
fi	ϕ, φ	Φ	<code>\phi</code> , <code>\varphi</code> , <code>\Phi</code>
chi	χ		<code>\chi</code>
psi	ψ	Ψ	<code>\psi</code> , <code>\Psi</code>
omega	ω	Ω	<code>\omega</code> , <code>\Omega</code>

Tabella P.2: Funzioni e operazioni istruzioni per l'uso

operazione funzione	L ^A T _E X	Geogebra	Maxima
Addizione	+	+	+
Sottrazione	-	-	-
Moltiplicazione		* oppure Spazio	*
Prodotto scalare	\cdot	* oppure Spazio	.
Prodotto vettoriale	\wedge, \times	⊗	
Divisione	/	/	/
Esponente	{ }^{{ }}	^	^
Fattoriale	!	!	!
Valore assoluto	\left x \right	abs(x)	abs(x)
Segno	\sgn()	sgn(), sign()	signum()
Radice quadrata	\sqrt{{ }}	sqrt()	sqrt()
Radice cubica	\sqrt[3]{{ }}	cbrt()	x^(1/3)
Funzione esponenziale	e^x	exp()	exp()
Logaritmo (naturale, in base e)	\log()	log()	log()
Coseno	\cos()	cos()	cos()
Seno	\sin()	sin()	sin()
Tangente	\tg()	tan()	tan()
Secante	\sec()	sec()	sec()
Cosecante	\cosec()	cosec()	
Cotangente	\cotg()	cot()	
ArcoCoseno	\arccos()	acos()	acos()
ArcoSeno	\arcsin()	asin()	asin()
ArcoTangente	\arctg()	atan()	atan()

Non tutte i nomi di funzione indicati nella colonna L^AT_EX sono standard, è sufficiente inserire nel preambolo il codice:

```
\newcommand{\nomefunzione}{\mathop{\mathrm{\nomefunzione}}}
```

Testi di riferimento

- Abate, Marco (1996). *Geometria*. Milano: McGraw Hill.
- Acerbi, Fabio (2007). *Euclide Tutte le Opere*. Milano: Bompiani.
- (2010). *Il silenzio delle sirene*. Roma: Carocci.
- Andreatta, Marco (2019). *La forma delle cose. L'alfabeto della geometria*. Bologna: il Mulino.
- Bottazzini, Umberto, Paolo Freguglia e Laura Toti Rigatelli (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Firenze: Sansoni.
- Boyer, Carl (2009). *Storia della matematica*. Milano: Oscar Mondadori.
- Cateni, L., R. Fortini e Claudio Bernardi (2001). *Il nuovo pensiero geometrico 1*. Milano: Le Monnier.
- C.D. Pagani, S. Salsa (2010). *Analisi Matematica*. Milano: Zanichelli.
- Cresci, L. (1998). *Le curve celebri*. Padova: Franco Muzzio.
- D'Amore, Bruno (2015). *Arte e matematica*. Bari: Dedalo.
- Dolcher, Mario (1972). *Analisi matematica*. Trieste: Tipografia Moderna.
- Dörrie, Heinrich (2013). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover.
- Enriques, Federico (1987). *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Bologna: Zanichelli.
- Grossman, Israel e Wilhelm Magnus (1975). *I gruppi e i loro grafi*. Torino: Zanichelli.
- Hardy, Godfrey (2002). *Apologia di un matematico*. Milano: Garzanti.
- Keisler, H. Jerome (2009). *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Madison, Wisconsin, USA: Department of Mathematics University of Wisconsin.
- L. Berzolari G. Vivanti, D. Gigli (2004). *Enciclopedia delle matematiche elementari*. Roma: Pagine.
- L'Hôpital, Guillaume Francois de (1715). *Analyse des infiniment petit*.
- M.Apostol, Tom (1987). *Calcolo*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Prodi, Giovanni (1977). *Analisi Matematica*. Torino: Boringhieri.
- (1992). *Metodi matematici e statistici*. Milano: McGraw Hill.
- Rostagni, Antonio (1973). *Fisica Generale*. Torino: UTET.
- Stoer, Josef (1974). *Introduzione all'analisi numerica 1*. Bologna: Zanichelli.
- Waismann, Friedrich (2004). *Introduzione al pensiero matematico*. Torino: Universale Bollati Boringhieri.

DATI GENERALI DELL'AUTORE

