

1 Applica e Pensa

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni, per quelle goniometriche scegli un opportuno intervallo.

1) $3^x - 4 \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3;$

3) $\operatorname{tg}^2 x - (1 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3};$

4) $\cos x + \sin x \leq -1;$

2) $\sqrt{1-x^2} + x \leq 0;$

5) $\log_{\frac{1}{\pi}}^2(x) - 3 \log_{\frac{1}{\pi}}(x) \leq 0$

Problema 2. Dati $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$ e la retta $r : y = 2x$,

i) calcola l'equazione della parabola a cui appartengono A e B ed ha in B tangente r ;

ii) calcola l'equazione della circonferenza che passa per A e per B il cui diametro appartiene ad r .

Quesito 1. Calcola l'equazione della tangente al grafico della curva rappresentativa della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$ nel suo punto di ascissa 64.

Quesito 2. In un contenitore ci sono 30 gettoni numerati $(0, 1, 2, \dots, 29)$ ne estraggo contemporaneamente 5 quante sono le possibili cinquine che posso ottenere?

Quesito 3. Scrivi in forma trigonometrica le radici terze del numero complesso $w = \sqrt{2} \frac{4-4i}{|2-2i|} - 2$

2 Pensa e Applica

Problema 3. In un cerchio di centro O e raggio r conduci le corde AB ed AC , detti M_1 ed M_2 i punti, rispettivamente sugli archi AB ed AC , equidistanti dagli estremi degli archi stessi, traccia la corda M_1M_2 che incontra in H e K le corde AB ed AC . Dimostra che il triangolo AHK è isoscele.

Quesito 4. Determina i luoghi geometrici delle $z \in \mathbb{C}$ tali che:

$$\mathcal{L}_1 : \operatorname{Re}(7z - 8z^* - 3\operatorname{Im}(z) + z^2 + zz^*) = 0 \quad \mathcal{L}_2 : \begin{cases} |z(3+i)| \geq 2 \\ \operatorname{Re}(z^2 + 7i) - (\operatorname{Re}(z))^2 = 0. \end{cases}$$

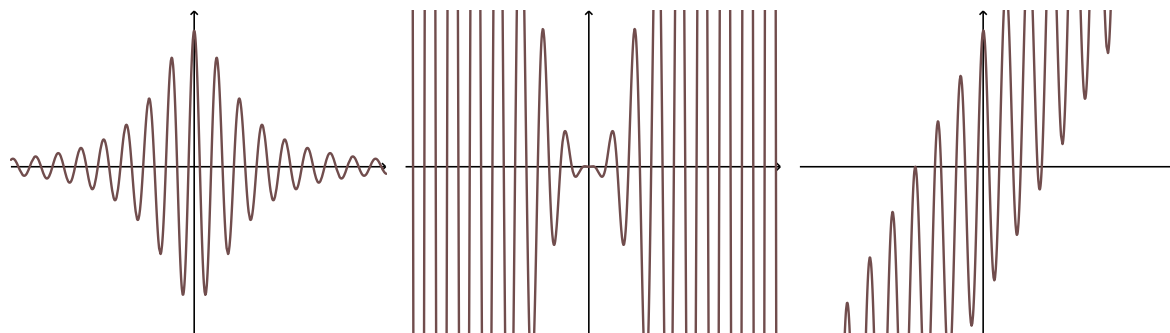
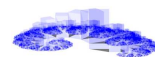
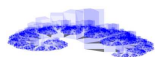
Quesito 5. Sapresti indicare cosa disegnano le seguenti linee di codice?

```
y = symbols('y')
GP = plot_implicit(y <= sqrt(x), (x, 0, 1), (y, 0, 1), show = False, line_color = '0.9')
GP1 = plot_implicit(y <= x**2, (x, 0, 1), (y, 0, 1), show = False, line_color = '1.0')
GP.append(GP1[0])
GP2 = plot(x**2, (x, 0, 1), show = False, line_color = '0.0')
GP.append(GP2[0])
GP3 = plot(sqrt(x), (x, 0, 1), show = False, line_color = '0.0')
GP.append(GP3[0])
GP.show()
```

3 Pensa

Quesito 6. Sia $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \cos(x)$.

i) Quale fra le seguenti curve è il grafico di f ? (motiva la risposta);



ii) f è periodica? (motiva la risposta);

3.1 Se avanza tempo e ... comunque per casa

Definizione 1. Si dice sezione aurea di un segmento la parte di esso che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte restante, φ è il rapporto fra l'intero segmento la sua sezione aurea.

Quesito 7. Ricava φ , verifica che $\varphi^2 = 1 + \varphi$ e poi scrivi una formula ricorsiva per φ^n .

Pensierino ... finale

$$\sqrt{\varphi + 2} - \varphi = \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \ddots}}}} = 0.2840 \dots$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Per verificare che questa formula ha come risultato il valore approssimato scritto, è un mero gioco numerico, dimostrare che è vera, è matematica!

4 Problemi MateFis

4.1 Mate

Problema 1. Rappresenta in (xOy) le regioni di piano individuate dai seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}x \leq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{1-x} < x+1$;

b) $|x+1| + x \geq \sqrt{4x-x^2}$;

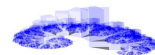
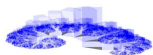
Risolvi in $[0, 2\pi]$ le seguenti disequazioni:

a) $\frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{\operatorname{tg}(x) - 1} \leq 0$;

b) $\sin(x) - \cos(x) \leq 1$;

Problema 2. La parabola $\mathcal{P}$ è tangente in $A = (0, 2)$ alla retta $2y + x - 4 = 0$ e passa per $B = (2, 4)$. Calcola l'equazione della parabola.

Problema 3. Dimostra che in ogni triangolo ABC , detta AM la mediana per A si ha che le distanze di C e B dalla retta AM sono fra loro uguali.



4.2 Fis

Problema 4. Una massa M si muove a velocità costante v su un piano orizzontale liscio, dopo un tempo t_1 urta in modo anelastico una massa $m = \frac{M}{20}$. Calcola lo spazio percorso dalle due masse dopo che è trascorso un tempo $t_2 = t_1$ dall'impatto.

Problema 5. Sopra un carrello di massa M si trova una massa $m : 50m = M$, nell'istante t_0 la massa m in seguito ad un esplosione si stacca orizzontalmente al piano del carrello con velocità v . Calcola la velocità del carrello dopo l'esplosione.

5 Quesiti MateFis

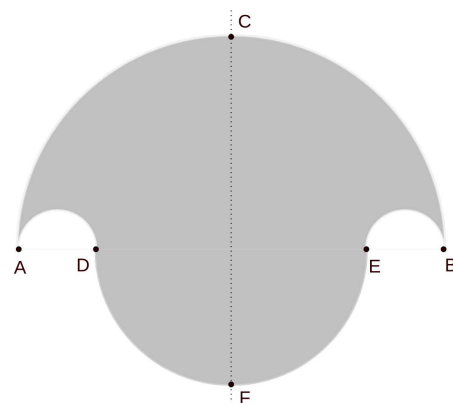
Quesito 1. Dimostra la seguente uguaglianza: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Quesito 2. Una pallina ruota a velocità angolare ω , in quanto è mantenuta in moto circolare uniforme da uno spago teso. Il piano in cui si muove la massa è parallelo al suolo.

Nell'istante t_{crash} si rompe il filo, descrivi il moto della massa nel tempo $t \geq t_{crash}$

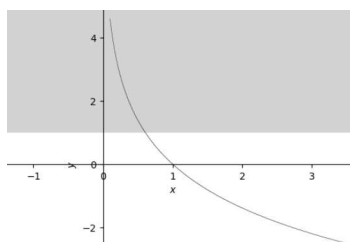
Quesito 3. Dimostra che $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Quesito 4. Sia AB un dato segmento e siano $D, E \in AB$, tali che $AD = EB$. Traccia il semicerchio Γ di diametro AB , ora con diametri AD ed EB traccia due semicerchi appartenenti al semipiano contenente Γ , infine, con diametro DE traccia un semicerchio non appartenente al semipiano contenente Γ . Dimostra che l'area della figura curvilinea qui di fianco rappresentata è uguale a quella del cerchio di diametro CF .



Quesito 5. Spiega i seguenti passaggi, aggiungendo, anche, eventuali passaggi mancanti:

$$\begin{aligned} \log_{e^{-1}}(x) - \log(x) &\geq 1 \\ \log_{e^{-1}}(x) + \log_{e^{-1}}(x) &\geq 1 \\ \log_{e^{-1}}(x^2) &\geq 1 \\ x^2 &\leq \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{e} \end{aligned}$$

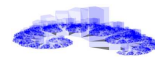
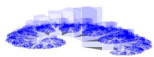


6 ...un po' di Python era prevedibile!

Quesito 6. Cosa restituisce questa sequenza di comandi?

```
def puntoesclamativo(n) :
    x = 1
    for k in range(1,n+1) :
        x = x*k
    return x

quesito3 = 0
for k in range(1,6) :
    quesito3 = quesito3 + k*puntoesclamativo(k)
quesito3
```



Problema 1. Risolvi le seguenti disequazioni:

- 1) $2 \sin^2(x) - \sin(x) < 0$; $x \in [0, 2\pi]$
- 2) $\operatorname{tg}^2(x) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(x) - \sqrt{3} < 0$; $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 3) $\frac{|x-2| + |x+3|}{x^2 - 3x + 1} < 0$
- 4) $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}}(4x+6) \right) < 0$
- 5) $64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x}$

Problema 2. Dato l'insieme $\Sigma_{\mathcal{P}_a}$ di parabole di equazione $ax^2 - 2(a-1)x - 2y + 1 + a = 0$:

- a) trova $\mathcal{P}_{-1} \in \Sigma_{\mathcal{P}_a}$ passante per il punto $A = (2, 2)$;
- b) determina le equazioni delle tangenti r ed s a $\mathcal{P}_{-1}$ nei punti O e B intersezione di $\mathcal{P}_{-1}$ con l'asse delle ascisse;
- c) scrivi l'equazione della circonferenza tangente alla parabola nei punti O e B ;

Problema 3. Nel triangolo ABC il vertice C è retto. Sia D il punto di AB per cui $BC = BD$ ed E il punto di AB per cui $AC = AE$.

Dimostra che DE è uguale alla somma dei segmenti di proiezione di D ed E rispettivamente su AC e BC

Quesito 1. Risolvi la seguente equazione $(z^*)^3 z^4 = -2z^2$ $z \in \mathbb{C}$.

Quesito 2. Dimostra che $|z^n| = |z|^n$.

Osservazione 1. $z = x + iy$, $z = |z|(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$, $z = (|z|, \vartheta)$.

Se $z, w \in \mathbb{C}$ si ha:

$$z \cdot w = (|z||w|, \vartheta + \varphi)$$

Quesito 3. Calcola il modulo e l'argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5}{(1-i)^7} \quad z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^6}{(1-i\sqrt{3})^4}$$

7 Allenamento ... forse qualcosa già visto ... *repetita* ...

Problema 1. Disequazioni

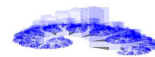
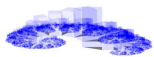
- 1) $2 \sin^2(x) - \sin(x) < 0$; $x \in [0, 2\pi]$
- 2) $9^{2x} - 5 \cdot 3^{2x} < 4$; $x \in [-\pi, \pi]$
- 3) $(*) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \geq 1$; $x \in \mathbb{R}$
- 4) $\frac{x^2 + |x-2|}{|2+x| - x^2} < 0$
- 5) $\sqrt{x} + x - 3 > 0$

Problema 2. Fra le parabole $\mathcal{P}_a$ di equazione $y = ax^2 + bx + c$ determina quelle tangenti alla retta $2x - y - 3 = 0$ nel punto di ordinata 3. Individua quella passante per il punto $(1, 3)$. Calcola, in questo caso ($\mathcal{P}_1 : y = x^2 - 4x + 6$), le equazioni delle tangenti r ed s alla parabola mandate dal punto P della direttrice avente ascissa $\frac{19}{8}$;

Problema 3 (*). È data la seguente relazione: $x|x| - y^2 = -1$: determina dominio e codominio e costruisci il grafico.

Problema 4. Dato un triangolo acutangolo ABC , siano U e V i piedi delle altezze uscenti dai vertici A e B . Dimostrare che l'asse del segmento UV passa per il punto medio M di AB .

Problema 5. Sono date due circonferenze: Γ di centro O e raggio $2R$; Γ' di centro O' e raggio R , tangenti internamente in un punto A . Dimostrare che ogni retta t passante per O di Γ individua due archi AP e AP' di uguale lunghezza ($P \in \Gamma$ $P' \in \Gamma'$).



Quesito 1 (*). Calcola l'incremento della funzione: $k_3(x) = \sqrt[4]{\sin(\sqrt[3]{x^3 - 1})}$

Quesito 2. Dimostra che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{k=1}^n (3k(k-1) + 1) = n^3$$

Quesito 3. Un collezionista ha già raccolto 60 delle 100 figurine di un album. Egli acquista una busta contenete 24 figurine (tutte diverse). Quante figurine nuove (non doppie), in media, troverà nella busta?

Quesito 4. Dimostra:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} (z^*)^* = z; & \text{iii)} (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*; & \text{v)} z z^* = |z|^2 \\ \text{ii)} (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*; & \text{iv)} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}; & \end{array}$$

Definizione 2. Un numero $n \in \mathbb{N}$ si dice perfetto se la somma dei suoi divisori (escluso il numero stesso) è uguale a n . O, in modo analogo, se la somma dei suoi divisori è $2n$.

6 è perfetto: i divisori di 6 sono 1, 2, 3, 6, $1 + 2 + 3 = 6$ o $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$.

Teorema 1. Sia $2^k - 1$ un numero primo¹) allora $n = (2^k - 1) \cdot 2^{k-1}$ è perfetto.

Quesito 5 (*). Dimostra il teorema.

Quesito 1. Calcola la velocità angolare delle lancette di un orologio: ore, minuti, secondi.

Quesito 2. Un vagone ferroviario di massa 1 t si muove su un binario alla velocità di $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Un secondo vagone di massa doppia si muove sullo stesso binario in senso opposto. A seguito dell'urto i due vagoni si arrestano. A che velocità procedeva il secondo vagone. (Trascura gli attriti fra ruote e rotaie)

Quesito 3. Si legge spesso che un astronauta in un satellite "non ha peso". Non dovrebbe invece sentire una forza centrifuga in un'orbita circolare?

Problema 1. Un punto materiale di massa $m = 2.5\text{ kg}$ è attaccato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e lunghezza a riposo $r_0 = 30\text{ cm}$; l'altro estremo della molla è fissato al punto O. Il sistema si trova su di un piano orizzontale e ruota con velocità angolare costante $\omega = 4\text{ s}^{-1}$ attorno a O. Calcolare il raggio r della circonferenza descritta da m .

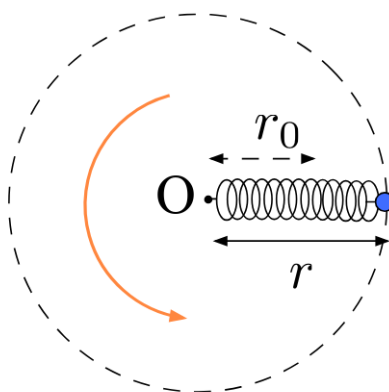


Figura 1

Problema 2. Due corpi (punti materiali) di massa $m_1 = 3\text{ kg}$ ed $m_2 = 5\text{ kg}$ sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola ideale di massa trascurabile. I corpi 1 e 2 poggiano, rispettivamente, su due piani inclinati di un angolo $\vartheta_1 = 65^\circ$ e $\vartheta_2 = 35^\circ$ rispetto alla direzione orizzontale, come rappresentato in Figura 2. I corpi si trovano entrambi ad una quota $h = 1.5\text{ m}$ da terra.

¹detto primo di Mersenne http://www.mersenne.org/report_milestones/

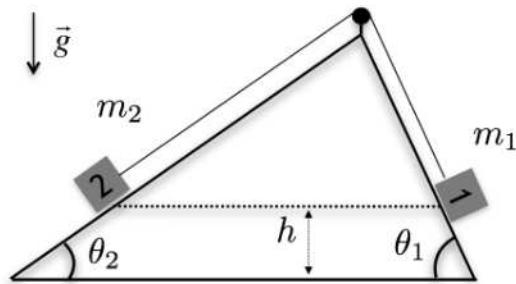
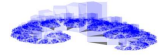
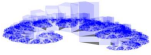


Figura 2

Determina il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s tra il corpo 2 ed il piano inclinato tale che il sistema resti fermo nella posizione iniziale.

Problema 3. Due bambini si trovano su due slitte poste su una superficie gelata (priva di attrito). Sono inizialmente fermi. Il primo bambino ha massa m_1 il secondo bambino ha massa m_2 , le due slitte sono identiche ed hanno massa m . Il primo bambino lancia, con velocità v una palla di massa m_3 verso il secondo bambino, il quale appena ricevuta la rilancia con la stessa velocità al primo bambino. Calcola le velocità dei due bambini.