

Problema 1. Risolvi, in un opportuno insieme $\mathbb{D}$ da indicare, le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x-1}};$

c) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0;$

b) $\frac{\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{x+3}{|x|+1};$

d) $\frac{2\sin(x)+1}{(2+\sin(x))^2} > 0.$

Problema 2. Sia $\tau : \begin{cases} \underline{x} = bx + ay \\ \underline{y} = -3x - \frac{a}{3}y \end{cases}$

a) ricava i valori dei parametri a, b che rendono τ una similitudine.

Fissati $a = 3$ e $b = 5$ ⁽¹⁾:

b) ricava τ^{-1} ;

Detta $\mathcal{C}$ la regione di piano individuata da $\{(x, y) : (x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 25\}$,

c) calcola l'area di $\tau(\mathcal{C})$.

Problema 3. Sono date due circonferenze di medesimo centro O . Da un punto P esterno ad entrambe si conducano le tangenti PA e PB all'una e PC e PD all'altra (con A e C dalla stessa parte rispetto alla retta PO).

Dimostra che il quadrilatero $ACBD$ è un trapezio isoscele.

Quesito 1. Dato il triangolo ABC in cui, $AB = 4$ $AC = 6$ e $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$. Calcola :

i) perimetro e area;

ii) raggio delle circonferenza circoscritta.

Quesito 2. Per quali valori dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la trasformazione:

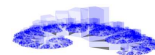
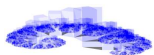
$$\phi : \begin{cases} \underline{x} = ax + by \\ \underline{y} = cx + dy \end{cases}$$

i) è una affinità;

ii) ha l'origine come punto unito;

iii) ha come retta unita $r : y = x$.

¹non fatevi ingannare, non è una delle soluzioni del punto precedente



Quesito 3. Dimostra che la seguente proposizione:

“I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono tali che $AB = A'B'$, $CA = C'A'$ e $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ allora i due triangoli sono uguali.”

è falsa.

Quesito 4. Dimostra che $\forall k \in \mathbb{N} : n \geq 1$ vale:

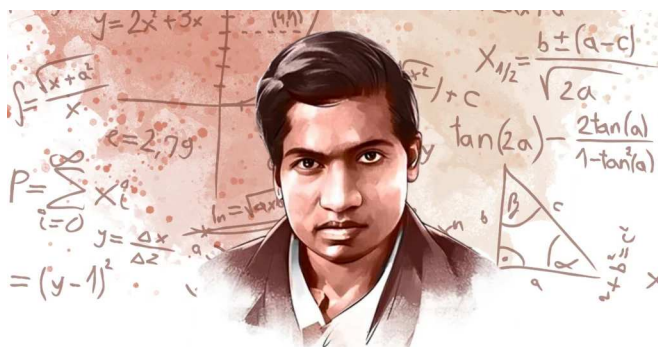
$$\sum_{k=1}^n \frac{2k^3 - 2k + 1}{k(k+1)} = \frac{n^3}{n+1}$$

Quesito 5. Disegna la funzione: $f(x) = ||x - 3| - 2| - 1|$.

Phi (Φ) is the Greek letter that represents the golden number, which is $1.618034\dots$. The reciprocal of this number is $0.618034\dots$ or, by rounding down, 0.618 , which in month and day notation equates to June 18.

$$\sqrt{\Phi + 2} - \Phi = \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1 + \dots}}}} = 0.2840\dots$$

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

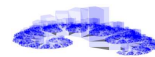
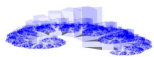


Per verificare che questa formula ha come risultato il valore approssimato scritto, è un mero gioco numerico, dimostrare che è vera, è matematica!

Esercizi con ✓ da svolgere assolutamente, gli altri esercizi da svolgere **solo** dopo aver risolto gli esercizi con ✓

Problema 1. Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme di definizione⁽¹⁾.

¹nel caso di disequazione goniometria scegli un periodo



1) $\sqrt{1-x} \geq x+2 \checkmark$

4) $\frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)} \leq 0 \checkmark$

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x} - 5\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \leq 6 \checkmark$

5) $\sqrt{(\log_3 x)^2 - 9} \geq 1 + \log_3 x \checkmark$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) \geq -2 \checkmark$

6) $|2\cos x - 1| \leq \sin x$

7) $x^{\log(\sin x)} \geq 1$

Problema 2 ($\checkmark$). Calcola l'equazione della parabola che interseca l'asse delle ascisse in $x = -1$ ed è tangente nel punto $A = (1, 1)$ alla circonferenza Γ di centro l'origine.

Problema 3. Calcola $a, b > 0$ dell'ellisse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$. Sapendo che la trasformazione:

$$\tau : \begin{cases} X = 2x \\ Y = \frac{y}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ è tale che } \tau(\mathcal{E}) = \Upsilon, \text{ dove } \Upsilon : X^2 + Y^2 = 5$$

Problema 4 ($\checkmark$). Dato un triangolo ABC , per un punto D del lato AB si conducano i segmenti DM e DN paralleli rispettivamente ai lati BC e AC . ($M \in AC$ e $N \in BC$).

$$\text{Dimostra che } \frac{DM}{BC} + \frac{DN}{AC} = k^{(2)}$$

Problema 5. In una circonferenza è inscritto un triangolo ABC con il lato AB parallelo ad una corda data MN (con A ed M dalla stessa parte rispetto all'asse del segmento AB); le rette AB e CN si intersecano in un punto P .

a) Costruisci la figura;

b) dimostra che $\frac{CA}{CM} = \frac{CP}{CB}$.

Problema 6 ($\checkmark$). Una macchina termica a gas perfetto, operante tra due sorgenti a temperatura $T_1 = 500 \text{ K}$ e $T_2 = 200 \text{ K}$, esegue il ciclo in cui la trasformazione $A \rightarrow B$ è un'isoterma reversibile a temperatura T_1 , la $B \rightarrow C$ è un'adiabatica irreversibile, la $C \rightarrow D$ un'isoterma reversibile a temperatura T_2 e la $D \rightarrow A$ un'adiabatica reversibile.

Il fluido termodinamico è costituito da una mole di gas monoatomico $C_V = \frac{3}{2}R$. Sapendo che $\frac{V_B}{V_A} = 2$ e che $\frac{V_C}{V_D} = 2.3$:

1) rappresenta nel piano pV il ciclo;

2) calcola il rendimento della macchina termica.

Problema 7. A uniform disc of radius $R = 20 \text{ cm}$ has a round cut as shown in Fig. 1. The mass of the remaining (shaded) portion of the disc equals $m = 7.3 \text{ kg}$. Find the moment of inertia of such a disc relative to the axis passing through its centre of inertia and perpendicular to the plane of the disc.

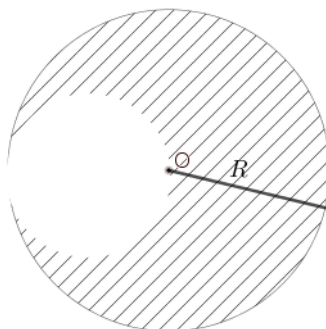
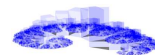
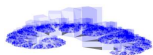


Figura 1: A uniform disc

² k è una costante



Problema 8 (✓). Una massa m viene lanciata lungo un piano inclinato (inclinazione $\alpha = \frac{\pi}{6}$). Il lancio della massa viene eseguito da una molla di costante elastica k compressa di x_0 cm. Calcola:

- 1) il lavoro svolto da un agente esterno per comprimere la molla;
- 2) a che altezza si ferma la massa (piano scabro coefficiente di attrito μ)

Quesito 1 (✓). Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale la pendenza di un pendio inclinato di 55° (rispetto all'orizzontale)?

Quesito 2. Disegna nel piano di Gauss la rappresentazione delle $z = x + iy$ tali che:

$$zz^* - z^* + iz + \operatorname{Re}(z + 2) - \operatorname{Im}(z + 3i) = 0$$

Quesito 3 (✓). In Italia il 44.99 % della popolazione maschile soffre di una qualche malattia cronica. Sapendo che il 48.54 % della popolazione italiana è maschile e che il 49.75 % della popolazione soffre di una malattia cronica, qual è la probabilità che un malato cronico sia donna?

Quesito 4. Della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(e^{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}}\right)\right)$ indica il dominio, il segno e traccia il grafico.

Quesito 5. Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

Funzione 1.

$$f_1(x) = \log\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) \quad \checkmark$$

Funzione 2.

$$f_2(x) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right) + \frac{\pi}{2}$$

costante universale dei gas	$R = 8.31 \frac{J}{K \cdot mole} = 0.082 \frac{dm^3 \cdot atm}{K \cdot mole}$
costante di Boltzmann	$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
fattore di conversione da cal a J	$1 cal = 4.186 J$
fattore di conversione da $\frac{N}{m^2}$ a atm	$1 \frac{N}{m^2} = 9.869 \cdot 10^{-6} atm$

1 Ho lavorato ... certo che sì

Problema 1. Risolvi in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

- i) $\frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}}$
- iii) $\operatorname{tg}^2(x) - (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg}(x) - \sqrt{3} < 0;$
- ii) $\log_4 x^2 > \log_4(2 - x);$
- iv) $\log(x - \sqrt{1 - x^2}) < 0;$

Problema 2. Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto fra la distanza dal punto $F = (2, 4)$ e dalla retta $d: 2x + y + 2 = 0$ vale 1.

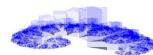
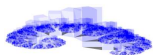
Spiega perché si tratta di una parabola. Verifica che la parabola trovata è tangente alle rette $r: 2x + 1 = 0$ e $s: y + 1 = 0$ e trova i punti di tangenza A e B . Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC (dove $C = r \cap s$)

Problema 3. Ricava le $z \in \mathbb{C}$ tali che:

- i) $\operatorname{Im}(z^2) = (\operatorname{Im}(z))^2;$
- ii) $\arg(z^2) = (\arg(z))^2.$

Problema 4. Disegna il grafico di: $j(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x + 2}$

Problema 5. Calcola l'incremento: $k(x) = \sin(\sqrt{x + x^4})$



1.1 Aiutino 1

Esercizio 1. In una “famosa” classe C , 10 alunni suonano uno strumento A , 10 praticano sport B , 15 giocano con i videogiochi C , inoltre si ha che: $|A \cap B| = 10$, $|A \cap C| = 4$, $|C \cap B| = 8$ e $|A \cap B \cap C| = 5$.

Quanti sono gli alunni della classe?

Soluzione.

$$|C| = \underbrace{|A| + |B| + |C|}_{10+10+15=35} - \left(\underbrace{|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|}_{10+4+8=22} \right) + \underbrace{|A \cap B \cap C|}_5 = 18$$

□

2 Ho pensato ...certo che sì

Problema 6. È assegnato un alfabeto composto da 13 simboli diversi.

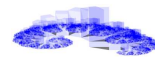
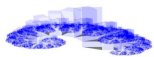
Se scelgo, a caso, una parola di otto lettere, qual è la probabilità che contenga almeno un simbolo ripetuto esattamente 3 volte?

2.1 Aiutino 2

```
def duplicati(testo) :  
    preso = False  
    t = 0  
    for k in range(1,14) :  
        rip = testo.count(k)  
        # conteggio una volta sola le triple  
        # in quanto nel testo troviamo almeno  
        if rip == 3 :  
            preso = True  
    if preso :  
        t = 1  
    return t
```

```
prove = 50000  
n = 0  
for k in range(prove) :  
    parola = []  
    for k in range(8) :  
        x = random.randint(1,13)  
        parola.append(x)  
    n += duplicati(parola)  
p = n/prove  
N(p,4)
```

0.2158



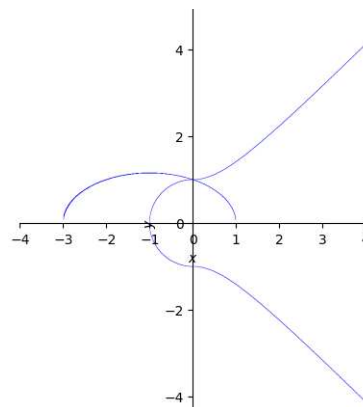
3.1 Aiutino 3

3 Ho analizzato con cura ... certo che sì

Problema 7. Sono date le seguenti relazioni: $x|x| - y^2 = -1$ e

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3 - x^2 - 2x}.$$

- Determinato il dominio e il codominio di ciascuna di esse, indica se sono funzioni?
- Verifica che le curve si incontrano solo nel punto $A = (0, 1)$.



4 Ho studiato geometria ... certo che sì

Problema 8. Le lunule di Ippocrate, sono ottenute a partire da un triangolo rettangolo ABC , le semicirconferenze di diametri i cateti e l'ipotenusa. Dimostra che l'unione delle due lunule è equivalente al triangolo ABC .

5 Non presenti nel pacchetto feste-24-25, quindi ... in più

Problema 9. Dimostrare che in un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stanno come i quadrati costruiti sui cateti.

Problema 10. Determina il luogo $\mathcal{C}$ delle $z \in \mathbb{C}$ tali che la distanza di z da $w_1 = -3$ sia pari alla metà della distanza di z da $w_2 = 3$. Rappresenta $\mathcal{C}$ nel piano di Gauss.

6 Mate

Problema 1. Sia $f(x) = x^3 e^{-x^2}$,

- dimostra che $f(x)$ è dispari;
- se x_1 è soluzione dell'equazione $f(x) = \frac{1}{5}x$ quale fra le seguenti è sicuramente soluzione?

i) $1 - x_1$;

iii) $-x_1$;

ii) $-f(x_1)$;

iv) $-\frac{f(x_1)}{x_1}$

- $f(x)$ può assumere valori molto grandi (leggi ∞)?

Indica un ()procedimento che ti permetta di trovare le intersezioni, se esistono, fra il grafico $\mathcal{G}_f$ di $f(x)$ e la retta di equazione $y = \frac{1}{5}x$.

Considera ora la parte di piano in grigio $\mathcal{A}$ della figura 2, racchiusa nell'intervallo $I^2 = [0, 3] \times [0, 1]$, dove la curva rappresentata è una funzione nota $f(x)$. Indica un ()procedimento che ti permetta di calcolare l'area di $\mathcal{A}$.

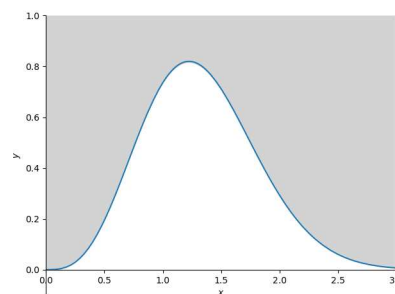
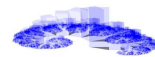
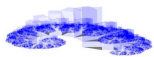


Figura 2: Area da stimare



7 Fis python

Problema 2. Una massa m è avvitata su una lunga barra filettata (asta), l'asta è libera di oscillare vincolata ad un estremo.

Dati

- Asta: lunghezza ℓ , massa M , passo filetto dh (se il dado fa un giro completo si sposta in “su” rotazione antioraria, o in “giù”, rotazione oraria) di dh
- Dado: si può pensare punto materiale, massa m .

Il periodo di oscillazione dell'asta con il dado è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_{tot}g\ell_{cm}}} \quad (1)$$



a) cosa rappresentano in (1) I , ℓ_{cm} ed M_{tot} ;

b) per diminuire il periodo quale fra le seguenti strategie è corretta?

- | | |
|---|--|
| i) avvitare il dado (rotazione antioraria); | iii) aumentare l'ampiezza di oscillazione; |
| ii) svitare il dado (rotazione oraria) | iv) diminuire l'ampiezza di oscillazione. |

Indica un procedimento che ti permetta di calcolare la posizione del centro di massa ogni rotazione completa del dado. Puoi decidere tu la posizione iniziale del dado.

Se in questo “rustico” pendolo sono presenti attriti, che si possono riassumere in una forza opposta alla velocità (“solito” $F = -bv$). Costruisci un procedimento in grado di rappresentare un diagramma orario tempo spazio.