**Chi recupera**obbligatorio solo $\textcircled{R}$

Quesito 1. $\textcircled{R}$ Dopo aver scritto la legge del moto uniformemente accelerato, rappresenta il diagramma (s, t) della legge, ricava, poi, la legge oraria della velocità.

Quesito 1. $\textcircled{C}$ Descrivi il moto circolare uniforme.

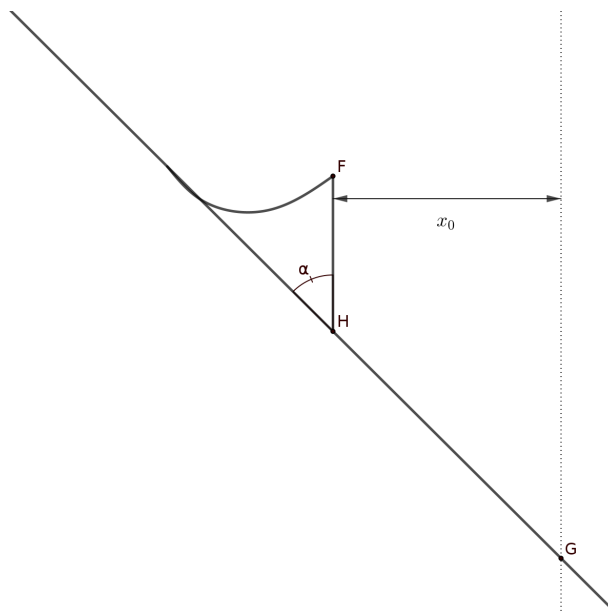
Quesito 2. $\textcircled{R}$ In un piano liscio, inclinato di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale, è posizionata una massa m . Indica le componenti nella direzione del moto delle forze agenti su m . Scrivi il modulo delle forze.

Quesito 2. $\textcircled{C}$ Una pallina di massa m ruota con velocità costante $|\vec{u}|$, su un piano verticale. Nell'istante $t_0 = 0$ il filo, che la trattiene sulla traiettoria circolare, si spezza. Descrivi il moto della pallina in funzione delle posizione in cui si trova nell'istante t_0 .

Problema 1. $\textcircled{R}$ Una massa m viene lanciata con velocità $|\vec{v}| = v$, sapendo che $v_y = \frac{v}{2}$:

- calcola la massima altezza raggiunta da m ;
- se la massa si trova inizialmente ad una altezza h rispetto al suolo, calcola la distanza orizzontale di impatto con il suolo di m e il modulo della velocità $|\vec{v}_{imp}|$ nel punto di impatto.

Problema 1. $\textcircled{C}$ Un ragazzo su uno snowboard dopo aver disceso un pendio sale lungo un trampolino e atterra ad una distanza orizzontale x_0 dal bordo del trampolino. Noti x_0 , α , FH e l'angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con cui esce dal trampolino, calcola l'altezza da cui è partito.



$\textcircled{R}$ problemi e quesiti che concorrono al superamento del debito.

1 Da sapere assolutamente

Problema 1. $\textcircled{R}$ Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^2 - 2x - 7}{x^3 - 27} \leq 0;$

b) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-2} \geq \frac{1}{2-x};$

c) $x^5(x^3 - 8)(x^2 - 3x - 4) \leq 0.$

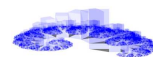
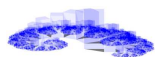
Problema 2. $\textcircled{R}$ Siano $A = (-2, 3)$ e $B = (-1, 1)$:

- calcola l'equazione della retta AB ;
- calcola l'equazione della retta per A perpendicolare ad AB .

Problema 3. $\textcircled{R}$ Calcola i tre lati di un triangolo rettangolo ABC , dati il perimetro $2p = 40$ e la differenza dei due cateti $AC - AB = 7$.

Problema 4. $\textcircled{R}$ Sia ABC un triangolo rettangolo (ipotenusa BC). Detto M il punto medio di BC , dimostra che $AM = MC$.

Problema 5. $\textcircled{R}$ Data in $\mathbb{R}$ l'equazione parametrica: $(k-1)x^2 + 2(k-2)x + k+1 = 0$, individua, se esistono, i valori di k per cui:



- a) l'equazione ammette radici reali; b) la somma delle radici è 5; c) il prodotto delle radici è -2.

Quesito 1. Dimostra che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Quesito 2. [®] In un contenitore ci sono 20 palline 10 gialle 7 rosse e le restanti verdi. Se estraggo contemporaneamente 3 palline, qual è la probabilità che:

- i) le palline siano di tre colori diversi; ii) le palline siano 2 gialle e una verde; iii) ci sia almeno una pallina verde.

Quesito 3. Quali sono le proprietà di una metrica in $\mathbb{R}^2$?
Come è definita la metrica Taxi?

2 ...e poi ...di tutto un po'

Problema 6. Nel trapezio rettangolo $ABCD$ detto M il punto medio del lato AD , perpendicolare alle basi, si ha che l'angolo $\widehat{CMB} = \frac{\pi}{2}$.

Dimostra che la metà dell'altezza è media proporzionale fra le basi e che la circonferenza di centro M e raggio MA è tangente a BC .

Problema 7. Di un triangolo ABC si sa che $AB = 4$, $BC = 6$ e $CA = 5$. Detto M il punto medio di BC , sia P un punto interno al segmento BM ; si poi $A'B'C'$ il triangolo simmetrico di ABC rispetto al punto P .

Determina la misura di PB sapendo che il poligono concavo unione di ABC e $A'B'C'$ ha perimetro 26.

Problema 8. Siano $A = (3, 2)$ e $B = (-1, 0)$.

- a) Scrivi l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti P per cui la Taxi-distanza da A è doppia della Taxi-distanza da B ;
b) disegna $\mathcal{L}$.

Quesito 4. Come si può scrivere in Python una funzione che permetta di calcolare la Taxi-distanza fra il punto A :

```
A = Array([random.randint(-6,4), random.randint(-4,6)])
```

e la retta r :

```
m = Rational(random.randint(-5,5), random.randint(1,3))
```

```
s = random.randint(0,1)
```

```
pm = 1
```

```
if s == 0 :
```

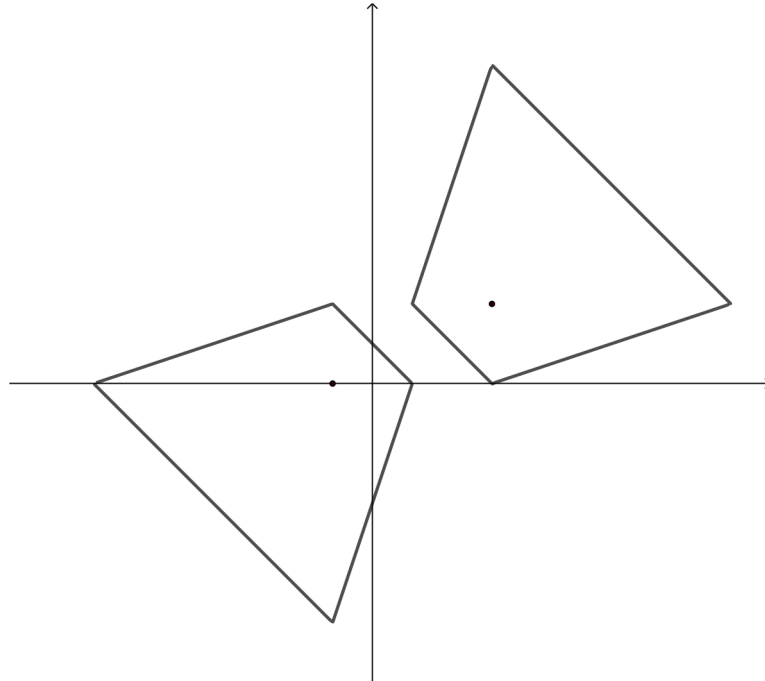
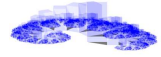
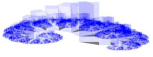
```
    pm = -1
```

```
q = random.randint(1,4)*pm
```

```
x,y = symbols('x,y', real = True)
```

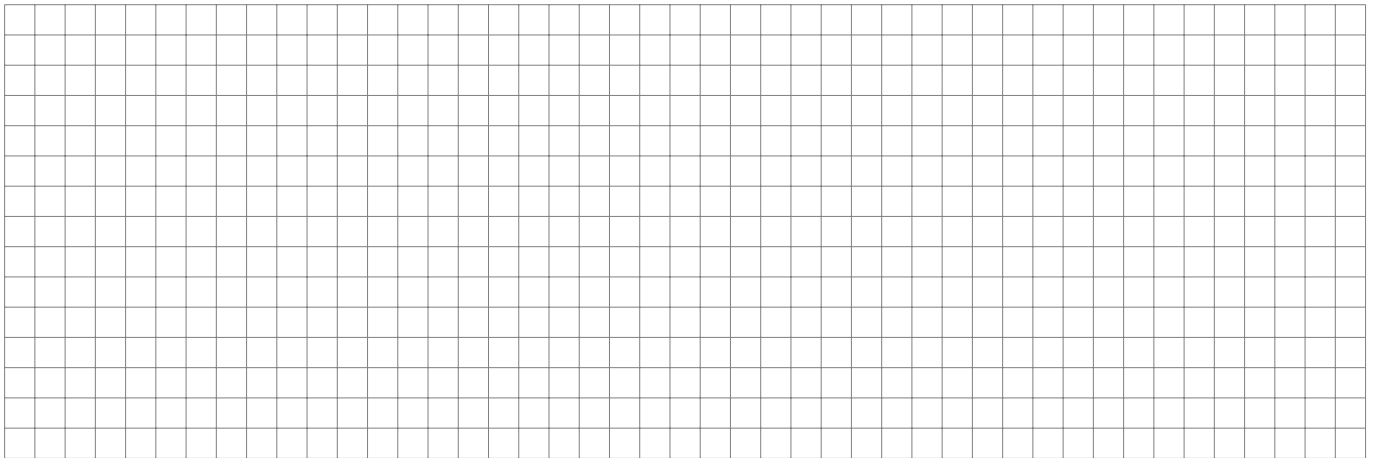
```
r = Eq(y,m*x+q)
```

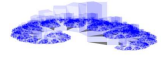
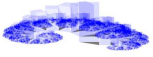
Problema 9. Sia ABC un triangolo isoscele di base BC e $\widehat{CAB} = \frac{2}{3}\pi$. Se la base BC viene divisa in tre parti uguali $CE = ED = DB$. Dimostra che il triangolo ADE è equilatero.



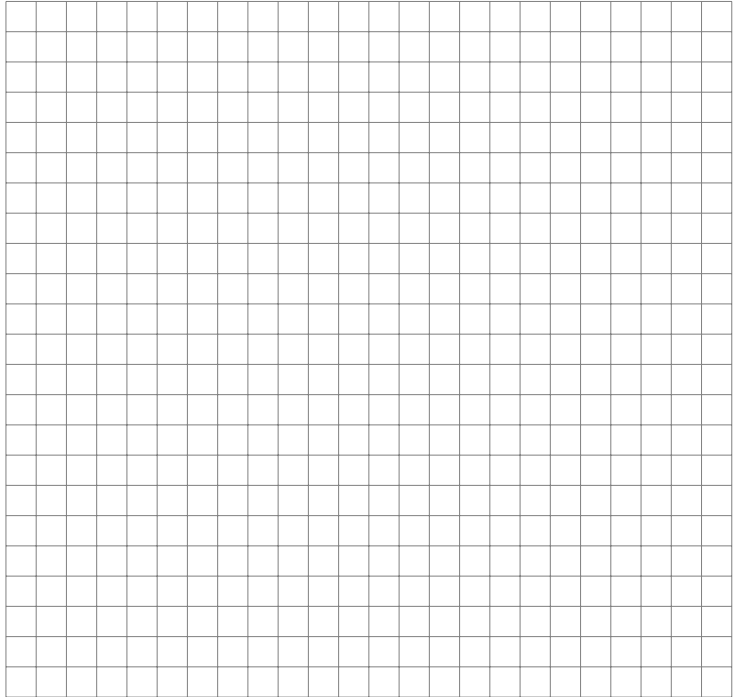
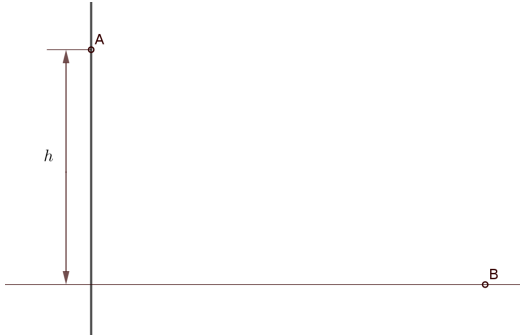
Quesito 1. Considera la seguente equazione: $x^2 + 6xy + 9y^2 - x + 3y = 0$,

1. spiega perché è l'equazione di una parabola;
2. calcola la direzione dell'asse della parabola.

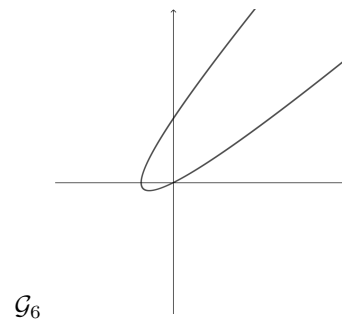
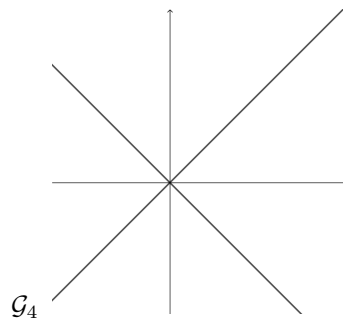
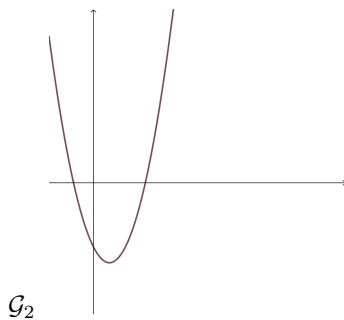
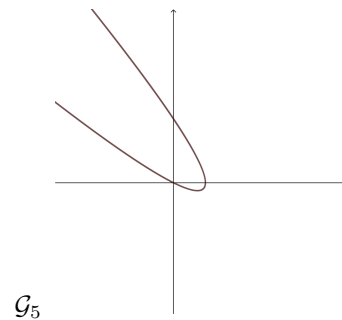
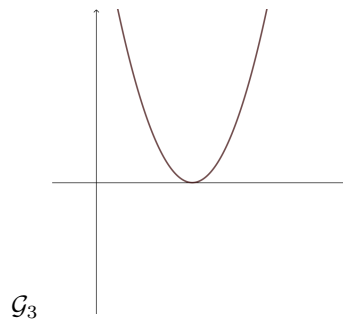
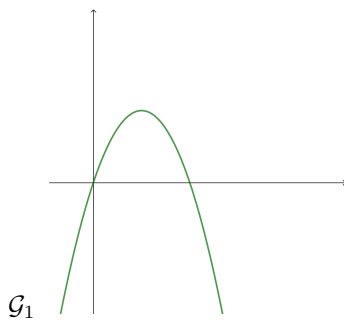




Quesito 2. Abbiamo ricavato che, in condizioni di assenza di attrito, un oggetto che parte dal punto A e arriva nel punto B , avrà in B una velocità, in modulo, pari a $v_B = \sqrt{2gh}$. Descrivi come siamo giunti a questo risultato.



Problema 1. Ad ognuno dei sei grafici corrisponde una sola fra le dieci equazioni. Associa ad ogni grafico la corrispondente equazione motivando la risposta.



$$\mathcal{F}_a) y^2 - x^2 = 0$$

$$\mathcal{F}_e) y^2 - 2xy + x^2 + x - 2y = 0$$

$$\mathcal{F}_i) y - x^2 + 3x = 0$$

$$\mathcal{F}_b) y^2 - 2x^2 = 1$$

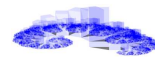
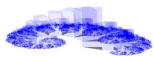
$$\mathcal{F}_f) y + x^2 - 3x = 0$$

$$\mathcal{F}_j) y = -2x^2 + 3$$

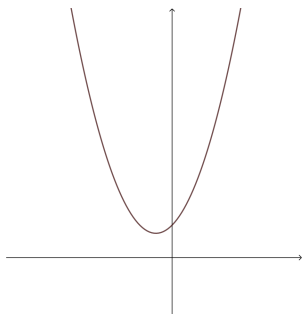
$$\mathcal{F}_c) y^2 - 2xy + x^2 - x - 3y + 1 = 0 \quad \mathcal{F}_g) y - (x - 3)^2 = 0$$

$$\mathcal{F}_d) y^2 + 2xy + x^2 - x - 2y = 0 \quad \mathcal{F}_h) y = -(x - 3)^2$$

Vedi 3: $\mathcal{G}_7 \Leftarrow \mathcal{F}_z$ perché $\Delta < 0$ e quindi ...



3 Esempio



$$\mathcal{G}_7 \quad \mathcal{F}_z \quad y - (x^2 + x + 1) = 0.$$

Problema 1. 1) Data l'equazione:

i) $\frac{5(a+x)}{2}a - \frac{4(b+x)}{3}b = 5\frac{b}{a} + \frac{6b-4a}{b}$ si verifichi che $2b+3a$ è una soluzione.

ii) $x = 2b + 3a$ è soluzione $\forall a, b \in \mathbb{Q}$? (motivare le risposte)

2) Quale valore si deve attribuire alla lettera b affinché l'equazione: $(x-2b)^2 + (bx+1)(x+2) + 4x = 0$ risulti di primo grado in x ?

3) Risolvi in $\mathbb{Q}$ le seguenti equazioni:

i) $3\left(x - \frac{1}{4}\right) - 4\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}(x+1) - \frac{1}{2}(x+3)$

ii) $\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1-6x}{3} = x + \frac{1}{3}(2x+5)$

4) Semplifica le seguenti espressioni:

$$5x - 2 + \frac{25x^2 + 12}{5x + 2}$$

$$5\frac{x}{5x-2} - \frac{2}{5x+2} + \frac{25x^2+4}{25x^2-4}$$

$$\frac{\frac{6b-4a}{a^2-b^2}}{\frac{4a^2+9b^2-12ab}{a^3-2a^2b+ab^2}}$$

$$\frac{3ab-2a^2}{a^3-a^2b}$$

5) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\frac{16-x^2}{x^2(x+1)} \geq 0$$

$$x-3 \leq \frac{5}{3-x}$$

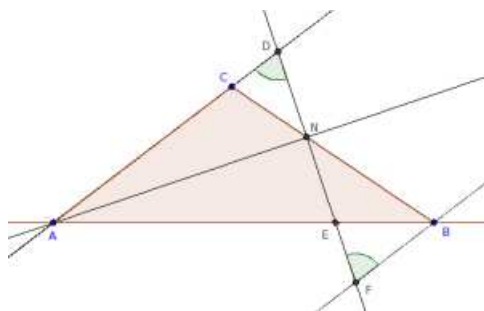
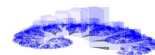
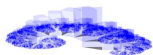
$$\frac{4x^2-x^4}{x(x^2-1)} \geq 0$$

$$\frac{27-x^3}{x^2-4x-3} \leq 0$$

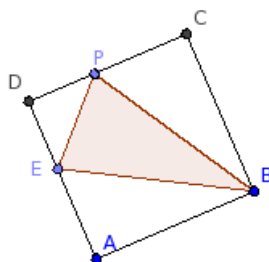
6) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.

7) Dato un triangolo ABC, sia D l'intersezione della bisettrice dell'angolo B con la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C. Dimostrare che la circonferenza di centro D e tangente alla retta AC è tangente anche alle rette BA e BC.

8) Sia AN la bisettrice relativa all'angolo A del triangolo ABC. Per N si conduca la perpendicolare ad AN e siano D, E, F rispettivamente le sue intersezioni con AC, con la retta AB e con la parallela ad AC per B. Dimostrare che i triangoli ADE, BEF sono isosceli e che i loro angoli sono a due a due congruenti.



- 9) Dimostrare che congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo, esso viene scomposto in quattro triangoli fra loro congruenti.



- 10) Dato il quadrato ABCD sia $\overline{DE} = b$ e $\overline{DA} = a$. Determinare la posizione di P affinché l'area del triangolo PEB sia metà dell'area del quadrato ABCD

Problema 2. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto ad $a \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $3 \frac{x}{3-a} = \frac{a-x+2}{3a-a^2} - \frac{x}{a}$

b) $\frac{3x+a}{a^2-4} + \frac{6x}{a-2} = 5 \frac{x}{a+2}$

- 2) Trova tre numeri naturali consecutivi sapendo che, aggiungendo al doppio del primo metà del secondo si ottiene il triplo del terzo diminuito di $\frac{25}{2}$

- 3) Un ipermercato ha acquistato lo scorso anno una certa quantità di jeans. Ne ha venduti ogni mese, per i primi quattro mesi dell'anno, il 15%; nei mesi successivi ne ha venduti 140 ogni mese e alla fine dell'anno ha avuto una rimanenza di $\frac{2}{19}$ dei jeans acquistati. Quanti erano i jeans in tutto?

- 4) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $\left(\frac{x}{4} + 1\right)^2 - \frac{x}{2}(x+4) + \frac{7x^2}{16} \leq \frac{3}{2}(x+4) + 7$

b) $2x + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < x \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x-1}{2}$

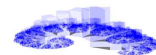
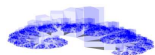
c) $\frac{a-x}{b} - \frac{x-b}{a} \geq \frac{(a-b)^2}{ab}$ con $a > b > 0$

d) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} \geq \frac{a}{b^3} - \frac{b}{a^3}$ $a > b > 0$

e) $\frac{(x-1)(3-x)}{3+x} \leq 0$

f) $\frac{(x-2)(2-x)}{(3+x)(3-x)} \geq 0$

- 5) Due circonferenze sono secanti nei punti A e B. Dimostrare che, condotti i loro diametri AC e AD, i tre punti C, B, D sono allineati.



- 8) Quanti sono gli “anagrammi” distinti della parola JOAOGAS. Se ordiniamo tutti gli “anagrammi” in ordine alfabetico crescente (A-B...G...I-J...N-O...R-S...) quale posizione occupa l’anagramma GAASOJO

Problema 4. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$

b) $3x^2 - 5x + 10 = 0$

- 2) Determina i valori di $m \in \mathbb{R}$ per cui l’equazione $mx^2 + 2mx + 1 = 0$:

a) ammette una soluzione doppia

b) ammette soluzioni reali distinte

- 3) Disegna nel piano cartesiano le seguenti leggi:

a) $y = \frac{|x^2 + 2x|}{x} - x$

b) $y = |x - 1| + |x + 1|$

- 4) Risolvi i seguenti sistemi indicando per quali valori del parametro reale a il sistema ammette soluzioni oppure non ammette soluzioni:

(a) $\begin{cases} ax - ay = -1 \\ x - y = a \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ (a - 1)x - ay = a + 1 \end{cases}$

- 5) Ci sono 5 contenitori indistinguibili: quattro contengono monete eque (mostrano T e C con la stessa probabilità), nel quinto monete truccate (hanno entrambe le facce T). Viene scelto a caso un contenitore, si estrae una moneta, viene lanciata 2 volte. Si ottiene 2 volte testa.

a) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia equa?

b) Qual è la probabilità che la moneta estratta sia truccata?

- 6) Semplifica le seguenti espressioni:

a) $\frac{\frac{4x}{y^2}}{\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}}$ dove $x > y > 0$

b) $\sqrt{x^2a + x^2b}$ dove $a > 0 \wedge b > 0$

- 7) In un triangolo equilatero ABC costruisci il baricentro G. Disegna l’asse del segmento AG e l’asse del segmento BG. Dimostra che il lato AB è diviso dai due assi in tre parti congruenti.

- 8) Traccia una retta r , un suo punto P e un punto A non appartenente ad essa. Indica con H il punto medio del segmento AP. Costruisci l’asse s del segmento AP, che interseca la retta r nel punto M. Sulla retta s determina il punto M’, tale che MH=M’H. Qual è il luogo dei punti M’ al variare di P su r , fissato A?

- 9) Dimostra la seguente uguaglianza: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

- 10) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^2 è congruo 0 o 1 modulo 4

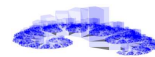
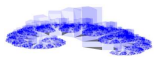
Problema 5. 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$ Sapendo che $4x - y = 6$

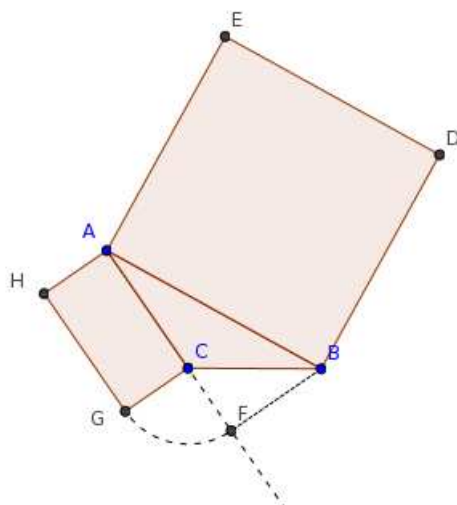
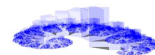
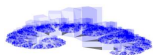
b) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 4$ sapendo che $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{2}{10}y = \frac{3}{5}$

- 2) Risolvi il seguente sistema:

a) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{6} = \sqrt{2} \\ y\sqrt{2} - 3x = \sqrt{3} \end{cases}$



- 3) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $kx^2 + 2(k-1)x + 1 + k = 0$:
- ammette due soluzioni la cui somma vale -4
 - ammette due soluzioni il cui prodotto vale $\frac{3}{2}$
- 4) Disegna nel piano cartesiano la seguente legge:
- $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{1 + x + x^2} - |x + 1|$
- 5) In un sacchetto ci sono 15 palline rosse e 5 gialle; quante palline gialle occorre aggiungere perché la probabilità di estrarre per due volte consecutive (senza rimettere la pallina nel contenitore) una pallina rossa sia $\frac{21}{65}$?
- 6) Un dado viene lanciato 3 volte.
- Qual è la probabilità p di ottenere 6 **almeno** una volta?
 - Quante volte si deve lanciare il dado perché la probabilità di ottenere 6 **almeno** una volta sia maggiore o uguale al 90%. (*scrivere le formule risolutive senza sviluppare i calcoli*)
- 7) Dopo aver indicato le condizioni di esistenza, semplifica le seguenti espressioni:
- $\sqrt{\frac{y^3 + 4y^2 + 4y}{4b^3 + 12b^2 + 9b}}$
 - $\sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)a^4}{x^3}}$
- 8) Dimostra che due corde equidistanti dal centro della circonferenza sono congruenti
- 9) Dimostrare che le diagonali AE, AC, DF e DB di un esagono regolare ABCDEF, delimitano un rombo.
- 10) Indica due numeri razionali che:
- possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
 - non possano essere scritti nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (*motiva la risposta, spiegando il procedimento seguito*)
- 11) Sia $n \in \mathbb{N}$ dimostra che n^4 è congruo 0 o 1 modulo 16
- Problema 6.** 1) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$ e discuti rispetto al parametro $h \in \mathbb{R}$ la seguente equazione:
- $(1-h)x^2 - 2(h+1)x + 1 = 0$
 - $\frac{2x-k}{x-k+3} = 1$
- 2) Risolvi in $x \in \mathbb{R}$:
- $1 + \frac{x}{x+1} + \frac{2x^2-4}{4-x^2} = 0$
 - $\frac{2x-1}{2x^2+x+1} + \frac{x-1}{x+1} = 1$
- 3) In un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Dimostrare che il quadrato costruito sulla base maggiore è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.
- 4) Dimostrare che il quadrato costruito sul lato maggiore (in figura ABDE) di un triangolo ottusangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati e del doppio del rettangolo avente per dimensioni uno dei lati minori e la proiezione del secondo sulla retta su cui giace il primo (in figura ACGH).



- a) Cosa si può dire se il triangolo è acutangolo? (motiva la risposta)
- 5) Descrivi il luogo geometrico dei punti medi M, delle corde uscenti da un punto P di una fissata circonferenza.
- 6) Ci sono due contenitori indistinguibili (A e B) ciascuno contenente 50 palline, in A ci sono 30 palline rosse e 20 bianche, in B 10 rosse e 40 bianche.
- a) Scelgo a caso un contenitore e estraggo 4 palline:
- i) qual è la probabilità di pescare 4 palline bianche?
- ii) qual è la probabilità di pescare almeno 1 pallina bianca?
- b) se ho estratto 5 palline rosse:
- i. qual è la probabilità che il contenitore scelto sia B
- 7) Disegna la seguente funzione: $y = \frac{|x^4 - 4x^2 + x - 4|}{x^2 + 1}$
- Problema 7.** (risolvere in beata solitudine!!!)

1) **Risolvi in $\mathbb{R}$**

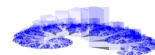
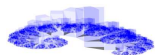
- a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} > 0$
- b) $\frac{x^4 - 1}{(1 - x)(x^3 - 4x)} \leq 0$
- c) $\frac{x}{2 - x} + \frac{1}{x^2 - 4} < 1$
- d) $\sqrt{2x + 11} < x + 4$

2) **Risolvi il seguente problema:**

- a) In un triangolo rettangolo con i cateti di $2\sqrt{5} \text{ cm}$ e $\sqrt{5} \text{ cm}$ inscrivere un rettangolo con un lato sull'ipotenusa e con la diagonale di 2 cm. Calcolare le dimensioni del rettangolo.

3) **Risolvi i seguenti problemi:**

- a) Dato un triangolo isoscele ABC di base AB, si determini un punto D della retta CB tale che la circonferenza di centro D e raggio DA sia tangente in A alla retta AC. Sia E l'ulteriore intersezione della retta AB con tale circonferenza. Dimostrare che l'angolo CDE è retto.
- b) Dato un triangolo ABC, rettangolo in A, si tracci la circonferenza di centro A e tangente all'ipotenusa BC. Da B e C si conducano le ulteriori tangenti alla circonferenza e siano M ed N, rispettivamente, i punti di contatto.
- i) Dimostrare che il quadrilatero BCNM è un trapezio rettangolo.
- ii) Dimostrare che A è allineato con M ed N.



- c) Dato un triangolo ABC, si prolunghi la bisettrice CD fino ad incontrare in E la circonferenza circoscritta. Dimostra che i triangoli ACD, EBD, ECB sono simili.

4) **Risolvi il seguente problema:**

- a) Dati i punti A(-2,1) e B(2,-1), trovare le coordinate di C vertice del triangolo ABC di base AB avente area 3

5) **Risolvi il seguente problema:**

- a) Dieci urne contengono tutte 4 palline rosse e un numero variabile di palline bianche. Più precisamente l'urna i-esima contiene 4 palline rosse e i bianche. (L'urna 7 contiene 4 rosse e 7 bianche). Viene scelta a caso un'urna:

- i) qual è la probabilità che estraendo due palline siano una bianca e una rossa?

Problema 8. 1) **Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni :**

(a)
$$\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - 2 \right)} < \frac{2}{x}$$

(b)
$$\frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{x+3}$$

(c)
$$\frac{3x-2}{x} - 4 \leq 0$$

(d)
$$x+2 > \sqrt{x^2 - 6x}$$

2) **Geometria Analitica :**

- a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-3,1), B(3,-1):

- i) calcolare l'equazione della retta per O(0,0) perpendicolare alla retta AB

- ii) si determinino le coordinate del punto C, vertice del triangolo isoscele ABC di base AB la cui area vale 10

3) **Geometria Sintetica:**

- a) Dato un triangolo isoscele ABC, si prolunghi la base AB dalla parte di B, di un segmento BD tale che $C\hat{D}B = C\hat{B}D - \frac{\pi}{2}$. Dimostrare che l'altezza CH è media proporzionale fra HB e HD

- b) Dimostrare che inscrivendo in un triangolo rettangolo un quadrato con un lato sull'ipotenusa, questa (l'ipotenusa) rimane divisa in tre parti delle quali una è media proporzionale fra le altre due.

4) **Problemi di secondo grado:**

- a) In un rettangolo avente le dimensioni di 6 e 8 si riporta sui lati maggiori, a partire dagli estremi A e C di una diagonale un segmento di lunghezza x e sui lati minori, sempre partendo da A e C, un segmento di lunghezza 2x. Congiungendo gli estremi (distinti da A e C) dei quattro segmenti, si ottiene un quadrilatero. Determinare x in modo che il quadrilatero abbia area 28.

5) **Probabilità e Combinatorio:**

- a) Un'urna contiene due palline rosse e quattro nere. Due giocatori A e B giocano nel seguente modo: le palline vengono estratte ad una ad una e messe da parte. A vince se l'ultima pallina estratta è rossa, altrimenti vince B.

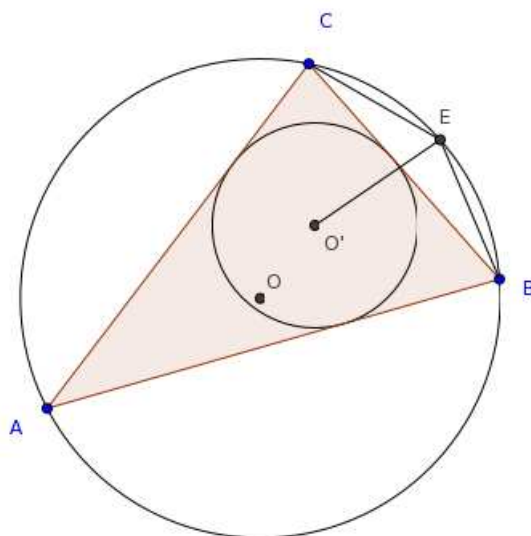
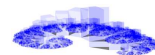
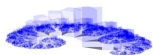
- i) Qual è la probabilità che vinca A

- ii) Qual è la probabilità che vinca A sapendo che la prima pallina estratta è rossa.

- b) Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Ne vengono estratte 5 con reimbussolamento, Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

6) **se avanza tempo e ... comunque per casa**

- a) Sia ABC un triangolo con O' centro del cerchio inscritto, e sia E il punto medio dell'arco BC (che non contiene A) del cerchio circoscritto ad ABC. Si dimostri che $EB = EO' = EC$



Problema 9. 1) Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni :

a) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x^2} \leq 0$

c) $\sqrt{x^2 - 4} + 1 < 2x$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2$

d) $\sqrt{x^2 - 4x} > \frac{1}{2}x - 6$

2) **Geometria Analitica:**

a) Siano dati nel piano xOy i punti A(-2,1), B(2,-1):

b) determinare le coordinate dei punti C per cui il triangolo ABC è rettangolo in C e isoscele di base AB

3) **Geometria Sintetica:**

a) Si proiettano i quattro vertici di un rettangolo ABCD sulle diagonali di questo. Dimostrare che le quattro proiezioni sono i vertici di un rettangolo simile a quello dato.

b) In una circonferenza è inscritto un triangolo ABC con il lato AB parallelo ad una corda MN (con A ed M dalla stessa parte rispetto all'asse del segmento AB); le rette AB e CN si intersecano in un punto P. Dimostrare che $CA:CM=CP:CB$

4) **Probabilità e Combinatorio:**

a) Un'urna contiene 100 palline numerate nel seguente modo: una pallina con il numero 1, 2 palline con il numero 2, 1 pallina con il numero 3, 2 con il numero 4 ... (pari doppie, dispari singole).

i) Qual è la probabilità di estrarre il 100?

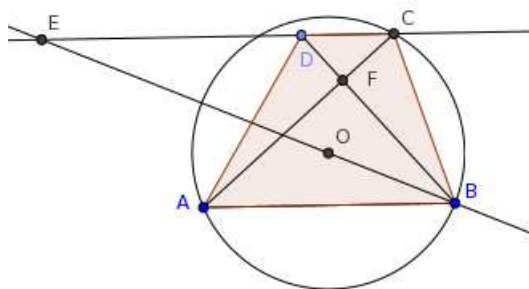
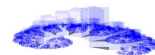
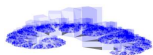
ii) Qual è la probabilità di estrarre il 2?

iii) Ne estraggo contemporaneamente 5. Qual è la probabilità che tra le palline estratte ve ne siano almeno due uguali?

5) **se avanza tempo e ... comunque per casa**

a) Dimostrare che in un trapezio, le diagonali e i prolungamenti dei lati obliqui si incontrano sulla retta che unisce i punti medi delle basi.

b) Sia ABCD un trapezio con base maggiore AB tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari. Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD: Dimostrare che $\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$



Parte II

4 Attività individuale

4.1 Teoria I

Molti testi di storia della matematica affermano che la geometria ha iniziato a svilupparsi per risolvere problemi di equa spartizione di terreni fertili. Apparentemente, questo è accaduto inizialmente in Egitto ed in Mesopotamia. Il particolare tipo di geometria sviluppatasi è stato fortemente influenzato dal fatto che le regioni da coltivare erano pianeggianti. Ancora oggi, la gran parte della geometria che studiamo a scuola è geometria piana.

Potremmo chiederci che tipo di geometria avremmo avuto se l'ambiente originario fosse stato un ambiente urbano. Probabilmente, non sarebbe stato necessario cambiare gli oggetti elementari sui quali vengono costruiti definizioni e teoremi: punti, rette, piani. Invece è verosimile che il calcolo delle distanze non sarebbe stato effettuato come su un terreno pianeggiante, sul quale è possibile ogni spostamento, in qualsiasi direzione, perché in città non si può passare attraverso le costruzioni.

Se ci muoviamo in automobile in una città disegnata come un accampamento romano, con strade orientate nelle due direzioni cardinali, nord-sud ed est-ovest, gli unici movimenti possibili sono nelle due direzioni NS e EO. Quindi è naturale calcolare le distanze, per tutto ciò che riguarda la gestione dei consumi automobilistici o per i tempi di percorrenza di un tratto urbano, usando un approccio diverso da quello scelto alcuni millenni fa in Egitto.

Per esempio, un conducente di taxi che deve organizzare il proprio lavoro e calcolare tempi e costi troverà più realistico questo calcolo delle distanze di quello euclideo. Giocando con le parole, chiamiamo “taxidistanza” la distanza calcolata muovendosi solo parallelamente alle due direzioni fondamentali. D’ora in poi parleremo di geometria del taxi per descrivere le proprietà relative alla “taxidistanza”, e di geometria euclidea per quelle tradizionali.

Gli oggetti fondamentali delle due geometrie sono gli stessi, punti e rette, quindi tutte le proprietà della geometria euclidea relative a questioni di appartenenza o intersezione vengono ereditate senza modifiche dalla geometria del taxi. Invece cambiano, a volte in modo sorprendente, le proprietà dipendenti dalla distanza.

Quando si studia la geometria euclidea nel piano cartesiano (ortogonale) i punti del piano sono determinati da una coppia ordinata di numeri reali. Per esempio in figura 1 è $P = (-2, -1)$ e $Q = (1, 3)$. È intuitivo ciò che si intende per retta PQ ; inoltre la distanza tra P e Q è determinata mediante l'applicazione del teorema di Pitagora.⁽¹⁾ Per la distanza tra P e Q (assunta come unità di misura il lato di un quadratino disegnato in figura 1) scriveremo:

$$d_E(P, Q) = 5$$

(essendo $\overline{PQ} = \sqrt{PH^2 + QH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$) e leggeremo: “la distanza euclidea tra P e Q è 5”.

La geometria del taxi presenta alcuni punti di contatto con la geometria euclidea. I punti sono i medesimi, le rette sono le stesse e gli angoli sono misurati nello stesso modo. Solo la “funzione” distanza è diversa. Nella 1

¹questi semplici concetti sono approfonditi in librapunti cap. 3

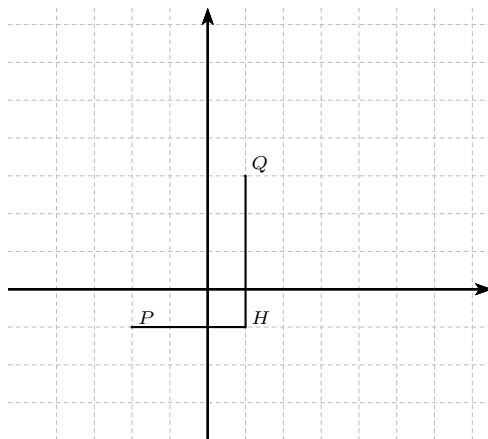
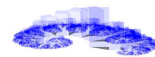
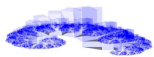


Figura 1

la distanza tra P e Q , $d_T(P, Q)$ è determinata non in linea retta ma come la intenderebbe un tassista (onesto) che vi conducesse da P a Q . Costui conterebbe quanti isolati dovrebbe percorrere orizzontalmente e quanti verticalmente per andare da P a Q (linea continua). Risulta allora

$$d_T(P, Q) = 7$$

e leggeremo “la taxidistanza da P a Q è 7”. La figura 2 ci avverte che non sempre i punti del piano sono espressi da coppie di numeri interi.

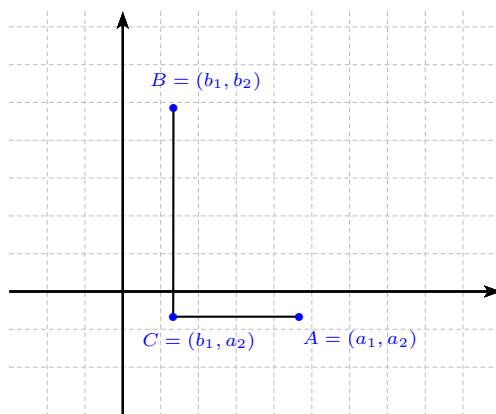


Figura 2

In 1 sono dati $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$. Le coordinate del punto C sono: (b_1, a_2) appare plausibile assumere come taxidistanza:

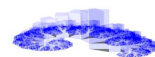
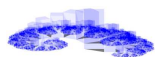
$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

4.2 esercizi

4.2.1) Ricerca $d_T(P_i, Q_i)$ e $d_E(P_i, Q_i)$ delle seguenti coppie di punti:

- a) $P_1 = (5, 4)$ $Q_1 = (1, 2)$;
- b) $P_2 = (-4, 3)$ $Q_2 = (3, 2)$;
- c) $P_3 = (-5, -4)$ $Q_3 = (1, 2)$;
- d) $P_4 = (3, -1)$ $Q_4 = (-2, 4)$;
- e) $P_5 = (4, -3)$ $Q_5 = (-2, -3)$;

4.2.2) Dati i punti $A = (5, 4)$ e $B = (1, 2)$, ricava l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti P tali che $d_T(P, A) = d_T(P, B)$.



4.2.3) Disegna $\mathcal{L}$.

4.2.4) Dati il punto $C = (-1, 3)$ e $r = 4$, ricava l'equazione del luogo $\mathcal{C}$ dei punti P tali che $d_T(P, C) = r$.

4.2.5) Disegna $\mathcal{C}$.

Per chi termina prima, può accedere a DB, cartella condivisa, libri, leggi: Gardner-Taxicab-Geometry.pdf

Parte III

5 A gruppi

(²)

5.1 esercizi

5.1.1) a) Se $d_T(A, B) = d_T(C, D)$ allora $d_E(A, B) = d_E(C, D)$?

b) Se $d_E(A, B) = d_E(C, D)$ allora $d_T(A, B) = d_T(C, D)$?

c) Quali sono le condizioni affinché $d_T(A, B) = d_E(A, B)$?

5.1.2) Sia $A = (-2, -1)$, per ciascun punto P sotto indicato si calcoli $d_T(P, A)$.

(a) $P = (1, -1)$

(c) $P = (-2, -4)$

(e) $P = (-1, -3)$

(g) $P = (0, 2)$

(b) $P = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

(d) $P = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

(f) $P = (0, 0)$

(h) $P = (-2, -2)$

5.1.3) a) Ricerca altri punti aventi taxidistanza 3 da A .

b) Traccia il grafico di tutti i punti P alla distanza 3 da A cioè il grafico dell'insieme $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 3\}$

c) Nella TaxiGeometria quale valore numerico dovrai attribuire a π ?

5.1.4) Siano dati i punti $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$; costruisci il grafico dei seguenti insiemi di punti:

a) La taxicirconferenza di centro A e raggio 2.

b) $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 1\}$

c) L'insieme di tutti i punti alla taxidistanza $\frac{3}{2}$ da A .

d) $\left\{P \in \pi : d_T(P, A) = \frac{5}{2}\right\}$

5.1.5) Dati $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$,

a) Calcola $d_T(A, B)$.

b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 3 \text{ e } d_T(P, B) = 5\}$.

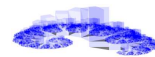
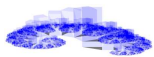
c) Rappresenta il grafico dell'insieme $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 0 \text{ e } d_T(P, B) = 8\}$.

d) Traccia il grafico di $\left\{P \in \pi : d_T(P, A) = \frac{3}{2} \text{ e } d_T(P, B) = \frac{13}{2}\right\}$.

e) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 4 \text{ e } d_T(P, B) = 4\}$.

f) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 5 \text{ e } d_T(P, B) = 3\}$.

² ... quanto non svolto costituisce esercizio individuale per casa



g) Costruisci il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)\}$ (utilizzando in questo caso $d_T(A, B) = 8$).

5.1.6) Fissate nel piano cartesiano ciascuna delle coppie di punti A e B , traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = d_T(A, B)\}$

a) $A = (-2, 3) \quad B = (1, -1)$

c) $A = (2, 1) \quad B = (6, 1)$

b) $A = (1, -3) \quad B = (4, 0)$

d) $A = (1, 1) \quad B = (1, 1)$

5.1.7) Dati $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$

a) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 5 \text{ e } d_T(P, B) = 5\}$

b) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 7 \text{ e } d_T(P, B) = 7\}$

c) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 4 \text{ e } d_T(P, B) = 4\}$

d) Traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = d_T(P, B)\}$

5.1.8) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.

5.1.9) Per ciascuna delle seguenti coppie di punti A, B traccia il grafico di $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 2d_T(P, B)\}$

a) $A = (0, 0) \quad B = (4, 2);$

c) $A = (0, 0) \quad B = (3, 3);$

b) $A = (0, 0) \quad B = (2, 4);$

d) $A = (-1, 1) \quad B = (4, 1);$

5.1.10) Fissati nel piano i punti $A = (-3, 0)$ e $B = (1, 2)$, traccia il grafico dei punti $\{P \in \pi : d_T(P, A) = 2d_T(P, B)\}$.

5.1.11) Ripeti l'esercizio precedente usando la distanza euclidea al posto della taxidistanza.

Parte IV

Lunedì 13 gennaio

6 Attività a gruppi

6.1 Svolgerne uno a testa e poi confrontare

1) $e^{-x} - e^{-3x} \leq 0$

2) $\sin 2x - \cos x \geq 0$

3) $\sqrt{x^2 - x} - x \leq 1$

4) $\log(x + 3) - \log(x - 3) \leq \log(x - 1)$

1) $5^{-x} - 5^{-3x} \leq 0$

2) $\cos 2x - \sin x \geq 0$

3) $\sqrt{x^2 + x} + x \leq 1$

4) $\log(x + 4) - \log(x - 4) \leq \log(x + 2)$

1) $3^{-x} - 5^x \leq 0$

2) $\cos^2 x - \sin x \geq 0$

3) $\sqrt{x^2 - 4x} - 2x \leq 2$

4) $\log(x^2 - 4) - \log(x + 4) \leq \log(x)$

1) $9^x + 3^{x+1} \leq 4$

2) $\cos^2 x - \sin^2 x \geq \sin x$

3) $\sqrt{5x^2 - 3x} - x \geq 1$

4) $\log(9 - x^2) - \log(x - 3) \leq \log(x + 3)$

1) $5^{-x} - 3^x \leq 0$

2) $\cos^2 x - 2 \sin x \geq 0$

3) $\sqrt{4x - x^2} - x \leq 1$

4) $\log(9 - x^2) - \log(x + 1) \leq \log(x)$

1) $3^{-2x} - 25^x \leq 0$

2) $\cos^2 x + \sin x \geq 0$

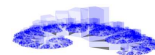
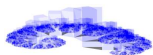
3) $\sqrt{x^2 + 4x} + 2x \leq 2$

4) $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) \leq \log(x)$

6.2 esercizi

6.2.1) Si disegni la taxiellisse $\{P \in \pi : d_T(P, A) + d_T(P, B) = 10\}$ dove $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 1)$.

6.2.2) Alice e Bruno non hanno ancora trovato casa (Alice lavora al $L_A = (-3, -1)$ e Bruno al $L_B = (-3, 1)$). Essi hanno deciso che la somma delle distanze da percorrere per andare al lavoro sia minore o uguale a 14 Dove cercheranno casa?



- 6.2.3) La A.I.C. vuole costruire una fabbrica nella Città Ideale in una località dove la somma delle distanze dalla stazione $S = (-5, -3)$ e dall'aeroporto $A = (5, -1)$ sia di 16. Al fine di un controllo del rumore una ordinanza municipale vieta la costruzione di fabbriche entro 3 unità dalla biblioteca pubblica $B = (-4, 2)$. Dove A.I.C. può costruire?
- 6.2.4) Si disegnino i punti $A = (-3, -1)$ e $B = (2, 2)$ e si tracci la taxiiperbole $\{P \in \pi : |d_T(P, A) - d_T(P, B)| = 3\}$
- 6.2.5) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (-3, 1)$ e $B = (5, 1)$.
- 6.2.6) Analizzare la famiglia di taxiiperboli con fuochi in $A = (0, 0)$ e $B = (4, 4)$.
- 6.2.7) Alice e Bruno non hanno ancora trovato un appartamento. Il loro ultimo accordo consiste nel fatto che né l'uno né l'altro (per recarsi al lavoro) dovrebbe camminare 4 più dell'altro. Dove cercheranno? (Si ricordi che $L_A = (-3, -1)$ $L_B = (3, 3)$).

Parte V

6.3 Teoria II

6.3.1 Distanza punto retta

Nella geometria euclidea c'è un metodo standard per determinare la distanza di un punto da una retta. Si traccia la perpendicolare r' passante per A alla retta data r ; indicato con B il punto di intersezione di r' con r si indica come “distanza del punto A dalla retta r ” la distanza tra A e B .

6.3.2 Ripasso

Utilizzando la costruzione precedente, calcola la distanza punto retta nel caso della figura 3. (Calcola la retta perpendicolare, trova le coordinate di B e poi calcola AB .) Verifica la correttezza dei calcoli usando la formula.

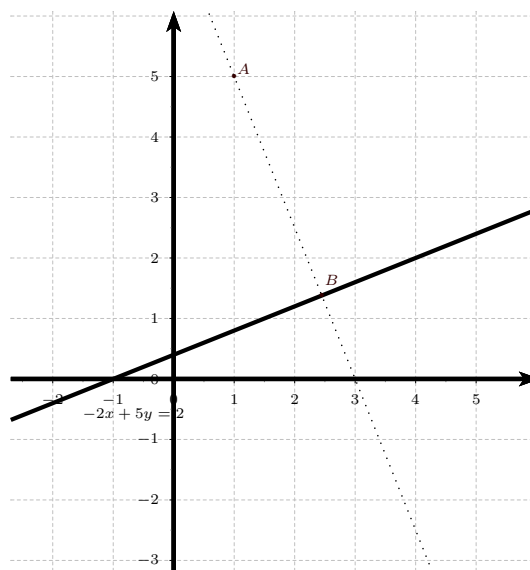
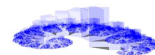
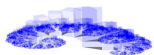


Figura 3

$$d_E(A, r) = d_E(A, B)$$



6.3.3 Primi esercizi

- 1) Nella figura 4 si consideri il punto A e la retta r .
 - a) si trovi $d_T(A, B)$;
 - b) si trovi $d_T(A, C)$;
 - c) si trovi $d_T(A, D)$;
 - d) si trovi un punto E su r che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria (E è situato sulla perpendicolare per A ?);
 - e) Si può ragionevolmente concludere che la taxidistanza da A ad r sia uguale a 13.

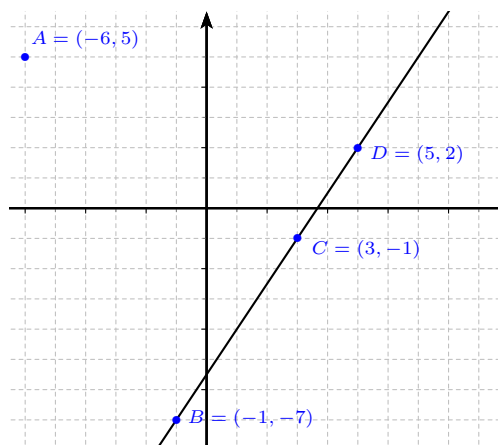


Figura 4

- 2) Sia $A = (-3, 2)$ e r la retta passante per $(-6, 8)$ e $(0, 0)$
 - a) Si trovi un punto $P \in r$ che sia il più vicino possibile ad A nella taxigeometria.
 - b) Si calcoli $d_T(A, r)$.
- 3) Si ripeta l'esercizio precedente con $A = (-3, 2)$ ed r passante per $(-2, -1)$ e $(2, 3)$

Fin qui si sono considerate delle procedure per trovare la distanza di un punto da una retta nella taxigeometria. Ma non è stata formulata alcuna definizione per la distanza.

Gli esercizi precedenti suggeriscono la seguente definizione di distanza nella taxigeometria

$$d_T(A, r) = \min_{P \in r} d_T(A, P)$$

6.3.4 Suggerimento

Un altro modo operativo per trovare $d_E(A, r)$ è suggerito dalla figura 5

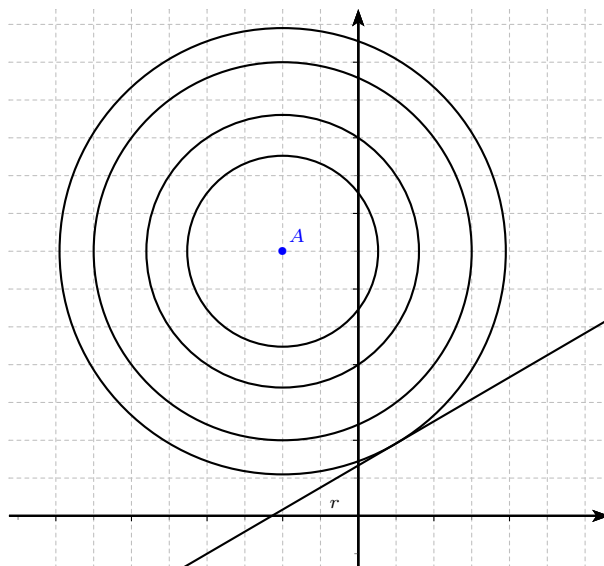
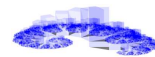
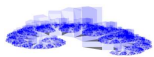


Figura 5

- 4) Ricava la formula della distanza $d_E(P, r)$ ⁽³⁾ utilizzando il metodo suggerito.

³Costruisci una circonferenza di centro P e raggio variabile R , metti a sistema con la retta r ed imponi la condizione di tangenza. Utilizza: $r: y = mx + q$ $P = (x_0, y_0)$



- 5) Costruire un metodo per calcolare $d_T(P, r)$.
- 6) Si ricerchi una retta r per cui $\{P : d_T(P, r) = 2\} = \{P : d_E(P, r) = 2\}$.

Parte VI

6.4 Premessa

Teorema 1. La taxidistanza $d_T(P, r)$ di $P = (x_0, y_0)$ dalla retta $r : ax + by + c = 0$ è data da:

$$d_T(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

Dimostrazione. ... buon lavoro

□

6.4.1 Ancora esercizi

- 7) La figura 6 mostra un punto F e la retta r .
- disegna $\{P : d_T(P, r) = 2\}$;
 - disegna $\{P : d_T(P, F) = 2\}$;
 - disegna $\{P : d_T(P, r) = 2 \text{ e } d_T(P, F) = 2\}$;
 - disegna $\{P : d_T(P, F) = d_T(P, r)\}$;
- (**attenzione:** svolgere i calcoli non “intuire” i risultati!!)

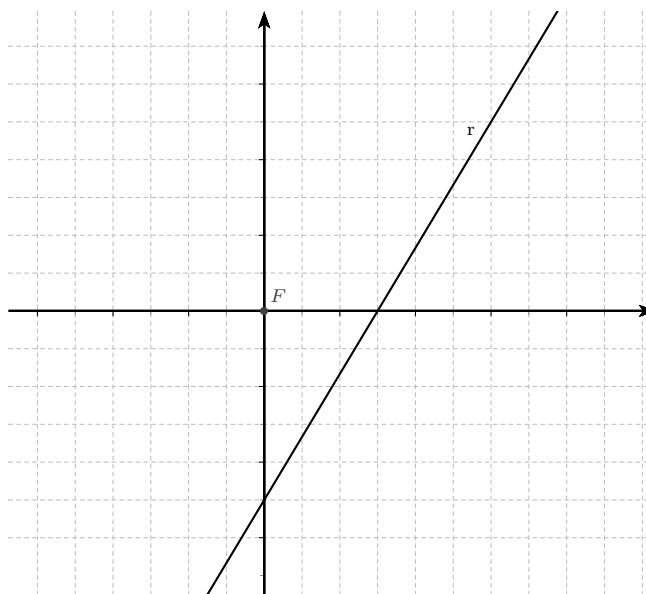
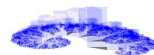
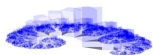


Figura 6

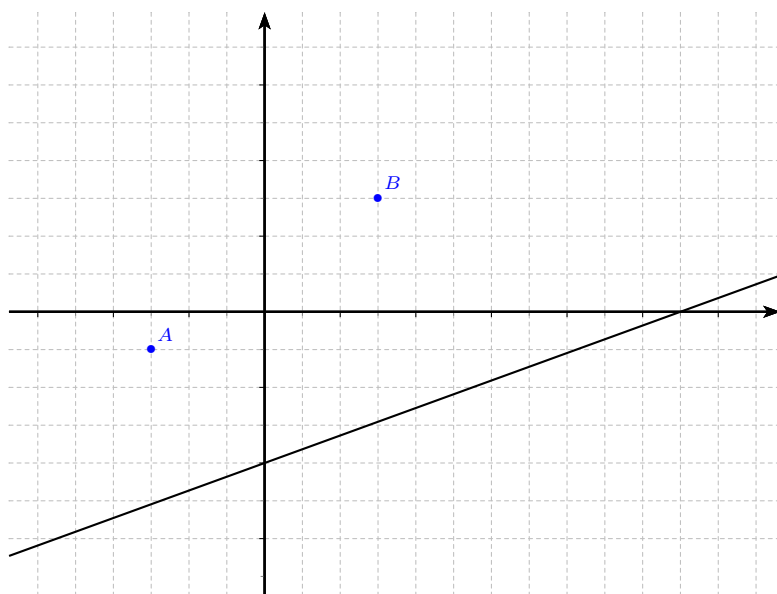
Si dirà TaxiParabola l'insieme dei punti del piano così definito:

$$\{P : d_T(P, F) = d_T(P, r)\}$$

- 8) Disegna le taxiparabole:
- con $F = (-2, 2)$ ed r passante per $(-2, -2)$ e $(2, 2)$;
 - con $F = (0, 4)$ ed r passante per $(0, 0)$ e $(2, 0)$;
- 9) Alice lavora come acrobata in $A = (-3, -1)$ ma Bruno ha un nuovo lavoro come autista di un autobus che corre lungo una linea passante per i punti $(3, 1)$ e $(0, 2)$. Uno dei privilegi di Bruno consiste nel fatto che quando torna dal lavoro può parcheggiare l'autobus nel punto più vicino a casa sua. Questo fatto costringe Alice e Bruno ad una nuova ricerca.
- Vogliono abitare in un luogo tale che la distanza di Alice dal lavoro più la distanza di Bruno dal suo sia minima. Dove cercheranno?
 - Poi cambiano propositi e decidono di vivere in un luogo dove entrambi abbiano la stessa distanza per recarsi al lavoro. Dove cercheranno?
 - Dove cercheranno se Alice vuole una distanza più breve di quella di Bruno per andare al lavoro?
 - Dove cercheranno se entrambi vogliono essere distanti 6 unità dal loro lavoro?
 - Dove cercheranno se la somma delle distanze per recarsi al lavoro deve essere al massimo di 6 unità?



- 10) In ricordo del passato Alice vuole camminare dal parco dei divertimenti sito in $A = (-3, -1)$ al panificio $B = (3, 3)$ ma gradirebbe fermarsi lungo la strada per vedere il treno merci sul binario (vedi figura). Dove si fermerà a guardare il treno se vuole minimizzare il suo cammino?



7 Biblio-Sitografia

- Eugene Krause, Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry (Dover Books on Mathematics)
- Martin Gardner, The Last Recreations: Hydras, Eggs, And Other Mathematical Mystifications