

1 Problemi

1.1 Riscaldamento obbligatorio

Problema 1. Dopo aver calcolato il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

1) $f_1(x) = \log\left(\frac{1}{x-x^2} - 2x+1\right)$

4) $f_4(x) = \log(\arcsin(x^2))$

2) $f_2(x) = \log(\cos(\pi x) - \sin(\pi x) - 1)$

5) $f_5(x) = \arctg\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

3) $f_3(x) = 3^{\log(e^x-1)}$

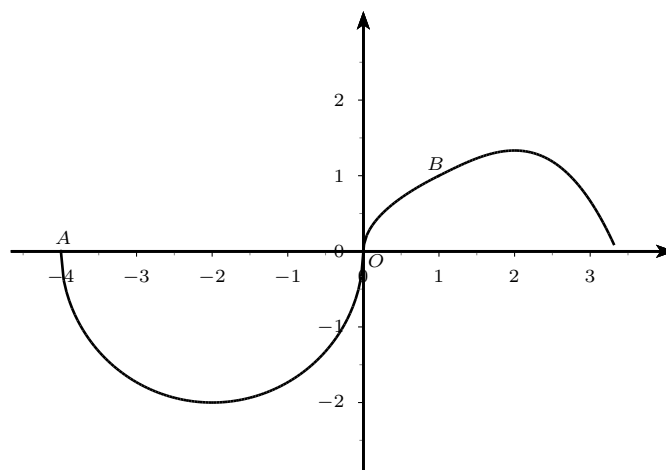
indica, motivando, quali funzioni sono limitate e quali non lo sono.

1.2 A scelta uno fra questi due

Problema 2. Considera la funzione $f(x) = x \log(x^2)$:

- dimostra che esiste una funzione g definita su $\mathbb{R}$ che coincide con f su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e vale 0 nello 0 ed è ovunque continua;
- dimostra che g è dispari;
- calcola l'equazione della tangente al grafico $\mathcal{G}_g$ di g in $O = (0, 0)$;
- verifica che O è flesso per g .

Problema 3. 1) Scrivi l'equazione algebrica della funzione continua f rappresentata in figura:



dove $A = (-4, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$. Nell'intervallo di estremi A e O la curva è una semicirconferenza, nell'intervallo di estremi O e B la curva è un arco parabolico con asse l'asse delle ascisse e vertice in O mentre nella parte finale la curva è una cubica $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ha un flesso in B e ammette punto di massimo relativo in $x = 2$, inoltre f è derivabile in $x = 1$.

- 2) Studia la derivabilità di f .
- 3) Stima le coordinate del punto in cui $\mathcal{C}$ interseca l'asse delle ascisse.

2 Quesiti

2.1 A scelta almeno due

Quesito 1. In una ditta i costi per la produzione sono suddivisi in costi fissi 1000 € e costi variabili secondo la quantità q di merce prodotta. I costi variabili seguono la legge $(C(q) = 12q^2 - 960q)$ €. Il ricavo rispetto alla merce venduta v è dato da $(R(v) = 10v^2)$ €.

Supponendo che la quantità di merce venduta sia pari alla quantità prodotta ($v = q$), calcola la quantità di merce che deve essere prodotta per avere massimo guadagno.

Quesito 2. Nel piano α è dato il triangolo AOB rettangolo in O con $AO = 2OB$. Sia β il piano passante per AB che forma con α un angolo la cui tangente vale $\frac{1}{5}$.

Detta h la perpendicolare ad α in O , sia C l'intersezione di h con β .

Calcola il volume del solido $AOBC$, nel caso $\overline{OB} = 1$

Quesito 3. Siano C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4 cinque contenitori indistinguibili: C_0 e C_1 contengono 10 palline rosa e 4 azzurre, mentre C_2, C_3 e C_4 contengono 4 palline rosa e 10 azzurre. Sapendo che estraendo contemporaneamente 5 palline da un contenitore scelto a caso ho ottenuto 3 rosa e 2 azzurre, qual è la probabilità che il contenitore scelto contenga 10 palline rosa e 4 azzurre?

Quesito 4. Sapendo che f è continua in x_0 e che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ dimostra che $\ell = f'(x_0)$.

3 Chi ... Domini

- | | |
|---|---|
| i) $\frac{5x^4}{x^2} - \frac{6x^2 + 2}{12x + 36}$ | v) $(\sin(x) - \cos(x))^{\log \sqrt[2]{2 \sin(x) - 1}} x \in [0, 2\pi]$; |
| ii) $5 - \sqrt[3]{x-2}$; | vi) $\frac{x^2 + 1 + \sqrt[3]{8 - x^3}}{3 - x + 3 - x}$; |
| iii) $\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^{\sin(x)}$; | vii) $\log_3(3 - x - 3 - x - 2j)$; |
| iv) $\sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt[3]{3 - x}}}$; | viii) $\sqrt{x+1 - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}}$. |

4 Chi ... non solo Funzione

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- | | |
|---|--|
| a) Traccia il grafico G_f ; | c) Spiega perché la funzione f non è invertibile nell'intervallo $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, mentre è invertibile nell'intervallo $I = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. |
| b) calcola l'equazione della tangente a G_f nel punto di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$. | d) Ricava la legge della funzione g inversa di $\tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1)$. |

Quesito 1. Ricava le dimensioni del cilindro retto di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R .

5 Per tutti, se avanza tempo

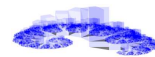
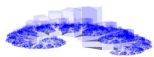
Problema 2. Calcola i seguenti integrali:

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------|
| i) $\int \frac{x+4}{x+5} dx$; | iii) $\int x \log(x) dx$; |
| ii) $\int \frac{x+4}{x^2+5} dx$; | iv) $\int x^2 e^{-x^3} dx$. |

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = xe^{-x}$.

- a) Traccia il grafico G_f ;
- b) calcola l'equazione della primitiva F di f tale che $F(0) = 0$

Problema 2. Calcola i seguenti integrali:



$$i) \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1} dx;$$

$$iii) \int \frac{\log(\frac{p}{x})}{\frac{p}{x}} dx;$$

$$ii) \int \frac{x + 4}{x^2 + 3x - 4} dx;$$

$$iv) \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

Quesito 1. In un contenitore ci sono 30 dadi (6 facce), 10 sono regolari, i restanti, hanno 3 facce con tre punti, 2 facce con sei punti e una faccia con 4 punti.

Pesco a caso un dado lo lancio qual è la probabilità di ottenere 3? Se ottengo 3 qual è la probabilità che il dado sia regolare?

Quesito 2. Alle seguenti funzioni è possibile applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo specificato?

$$i) l_0(x) = \frac{|\cos(x)|}{\cos(x)} x^2 \text{ su } [\pi, \pi]$$

$$iii) l_2 = x^4 \cdot \frac{p}{x} \text{ su } \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

$$ii) l_1 = x^3 \cdot \frac{p}{x} \text{ su } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$iv) l_3(x) = |\cos(x)| x^2 \text{ su } [1, 2]$$

$$v) l_4(x) = |\cos(x)| x^3 \text{ su } [-1, 1]$$

Per ogni funzione verifica se le ipotesi del teorema sono soddisfatte, e qualora lo siano calcola c .

Quesito 3. Dato il punto $P_0 = (-1, 0, 1)$ e il piano $\pi : x + y + z - 2 = 0$, determina:

a) Le equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e ortogonale a π .

b) La proiezione ortogonale di P_0 su π .

c) La distanza di P_0 da π .

Problema 3. Sia (u_n) la successione così definita:

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n \cdot \log(u_n^2 + 1) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i) Dimostra che, per ogni $n \geq 0$, $u_n \in [0, 1]$.

ii) Dimostra che la successione (u_n) è convergente e calcola il limite.

6 Una funzione per iniziare

Problema 1. Studia la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Analizza il comportamento della derivata prima nei punti di ascissa 0 e 1.

7 Un po' di integrali per continuare

Problema 2. Risolvi i seguenti integrali indefiniti:

$$i) \int \frac{x}{x^3 - 1} dx;$$

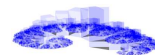
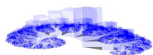
$$iv) \int \frac{\log x}{x} dx;$$

$$ii) \int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx;$$

$$v) \int \frac{e^x}{2025 + e^x} dx;$$

$$iii) \int x \sin(x) dx;$$

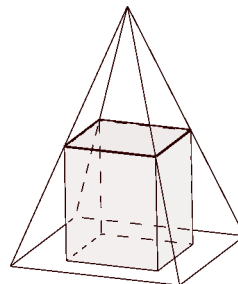
$$vi) \int x^3 e^{-x^2} dx.$$



8 Quesiti per finire

Quesito 1. Dimostra che una funzione monotona crescente è misurabile secondo Riemann-Stieltjes.

Quesito 2. Sia P la piramide retta avente per base il quadrato di lato ℓ e altezza $h = 2\ell$. Ricava le dimensioni del prisma inscritto nella piramide di volume massimo.



Quesito 3. Data la circonferenza di equazione: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$ calcola:

- la distanza fra il centro della circonferenza e il centro della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
- l'equazione parametrica della retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(0, 0, -2)$.

Problema 1. Nel riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le curve di equazione: $h(x) = \frac{4}{e^5}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$ ed $f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^{-x}$, i cui grafici sono rappresentati in figura 1

- associa, motivando con cura, il grafico all'equazione;
- esegui lo studio completo di $f(x)$;
- verifica che le due curve si incontrano nei punti di ascissa $x = 2$, $x = 3$, $x = \frac{5}{4}$;
- calcola l'area delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

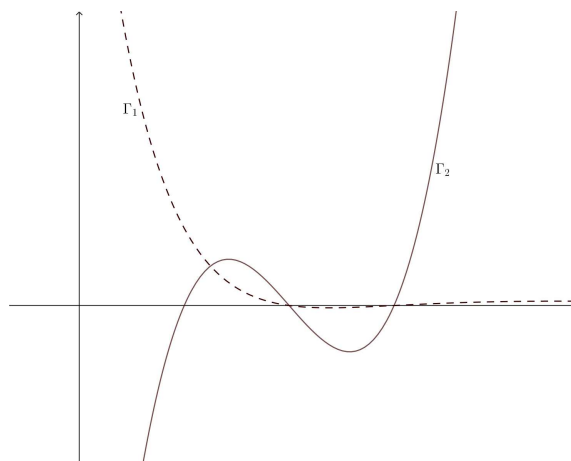


Figura 1

Quesito 1. Indica se le seguenti proposizioni sono vere o false, per quelle non vere, proponi opportuni controesempi.

- | | |
|--|---|
| i) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad (a = b)$ | iv) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad , \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ |
| ii) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad) \quad a = b$ | v) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad (f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b])$ |
| iii) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad , \quad a = b$ | vi) $\int_a^b f(x)dx = 0 \quad) \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ |

Quesito 2. Tra i cilindri inscritti in una sfera unitaria, determinare quello di superficie laterale massima.

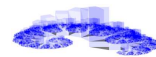
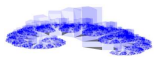
Quesito 3. Sia $f(x)$ continua su $[d, e]$ detti $a, b, c \in [d, e]$ ricava che $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

Quesito 4. Data la funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$ tale che $f(x) = |\sin(x)|$ calcola, se esiste, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Quesito 5. Calcola la derivata prima della funzione

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^2}{t^3 + 1} dt$$

Problema 1. Considera la famiglia di funzioni reali di variabile reale $f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k}$, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$.



- 1) Verifica che, al variare di $k \in \mathbb{R}^+$ la funzione f_k ammette due punti di flesso che appartengono alla curva di equazione $y = \frac{1}{4x^2}$. Verifica, inoltre, che il grafico $\mathbf{G}_{f_k}$ della funzione f_k è tangente alla circonferenza $\mathbf{C}_k$ di equazione $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} = 0$ e studiare il numero di intersezioni tra le due curve al variare di $k \in \mathbb{R}^+$.
- 2) Dopo aver studiato la funzione $f_1(x)$, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Determina per quale valore di b l'area compresa fra il grafico della funzione $f_1(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, b]$ è uguale a quella del cerchio $\mathbf{C}_1$ di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$.

Problema 2. L'interno di un serbatoio, (capacità 32 litri) senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di resina sintetica. Tenendo conto che sul fondo vengono applicate due mani di resina⁽¹⁾, quali devono essere le sue dimensioni affinché la quantità di resina utilizzata sia minima?

Quesito 1. Calcola la lunghezza del segmento di minima distanza che congiunge le rette:

$$\begin{cases} x = t & 1 \\ y = 1 & t \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + h \\ z = 2 - h \end{cases}$$

Quesito 2. È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:

- a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
- b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?

Quesito 3. Sapendo che $\int_0^1 f(x)dx = 3$ calcola $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$

Se avanza tempo e ...

Quesito 4. Dimostra che $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ⁽²⁾

Problema 1. È data la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = e^{-2x} - (3 + k)e^{-x} + 3k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Indicato con $\mathbf{G}_k$ il grafico di f_k .

- a) Prova che esiste un unico punto A , comune a tutte le curve $\mathbf{G}_k$.
- b) studia la funzione $f_1(x)$ ($k = 1$).
Considera la sua limitazione $g(x) = f(x)|_{[\log 2, +\infty)}$:
 - c) g è invertibile? Motiva in modo dettagliato.
 - d) Quale condizione deve soddisfare k affinché esista su $\mathbf{G}_k$ un punto $I = (x_0, y_0)$ tale che: $f'_k(x_0) = 0$? In tale situazione determina, in funzione di k , le coordinate del punto I .
 - e) Determina per quali valori di k esiste una regione finita di piano compresa fra $\mathbf{G}_k$ e l'asse delle ascisse.
 - f) Calcola l'area della regione finita di piano compresa fra $\mathbf{G}_e$ ⁽³⁾ e l'asse delle ascisse

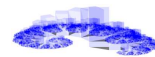
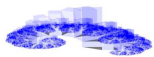
Quesito 1. Enuncia e dimostra il teorema della media.

Quesito 2. Sia $ABCD A'B'C'D'$ un cubo di lato unitario e AC' e BD' due sue diagonali. Dopo aver scelto un opportuno riferimento ortonormale (O, i, j, k) . Si scrivi le equazioni dei due piani per A' e per C' paralleli ad entrambe le rette AC' e BD' .

¹In pratica il fondo richiede doppia quantità di resina rispetto alle pareti

² $0 < b < a$

³ $\mathbf{G}_e$ è il grafico di $f_e(x) = e^{-2x} - (3 + e)e^{-x} + 3e$



Quesito 3. Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcola la probabilità che il bersaglio venga colpito:

- a) 4 volte;
- b) le prime 4 volte.

Quesito 4. Stabilisci per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k ?

Quesito 5 (*). Risolvi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + x^3 y = 3x^3 e^{-x^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 1. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la funzione la cui legge è $\gamma(x) = |\sin(x)|$, dopo aver rappresentato un grafico approssimativo, spiega la seguente affermazione: « γ è continua nel dominio ma non è derivabile in un insieme numerabile di punti».

Problema 2. Sia δ la funzione la cui legge è $\delta(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, dimostra che:

- 1) è limitata;
- 2) è invertibile se ristretta alla semiretta $x \geq 1$;

Dopo aver calcolato le primitive di δ ricava l'area della regione di piano compresa fra la curva l'asse delle ascisse e le rette $x = -3$ e $x = 1$.

Problema 3. Fra i rettangoli aventi come somma dei lati e di una diagonale una lunghezza ℓ , ricerca quello di area massima.

Problema 4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera il piano $\pi : y - z = 0$ e la retta $s : \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$. Dato il vettore $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$, determinane altri due, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, rispettivamente paralleli a π ed s , tali che $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$.

Quesito 1. Di un lucchetto a combinazione con sei cifre ho scoperto che la combinazione che permette di aprirlo non contiene zeri, ha due 1 e due 2, quanti tentativi devo fare in media per poterlo aprire?

Quesito 2. Sia $F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$. Calcola $F'(x)$.

Quesito 3. Una funzione F è definita, per ogni $x \geq 1$ dal seguente integrale: $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, dimostra che $F(x) \geq \log(x)$.

Quesito 4. Calcola $\int_0^1 x f(x^2) dx$ sapendo che detta $F(x)$ una primitiva di f si ha: $F(0) = -2$ e $F(1) = 4$

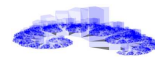
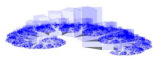
Problema 1. Calcola i seguenti limiti:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 3}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \pi x)}{x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1}$

Problema 2. Trova massimi e minimi della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

Problema 3. Calcola le primitive delle seguenti funzioni:



$$1) f_1(x) = \frac{x}{x+1};$$

$$2) f_2(x) = \cos(x) \sin^5(x);$$

$$3) f_3(x) = x^3 e^x.$$

Problema 4. Tra tutte le pentole cilindriche senza coperchio con superficie⁽⁴⁾ pari a S , determinare raggio e altezza in modo da massimizzare il volume.

Problema 5. Uno studente completamente impreparato deve rispondere a 13 quiz per ciascuno dei quali sono suggerite 3 risposte, una sola delle quali corretta. Lo studente tira a indovinare.

- i) Con quale probabilità risponderà esattamente 12 volte?
- ii) E con quale probabilità sbaglierà tutte le risposte?

Problema 6. Calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \arctg x dx \quad \int \log^3(x) dx \quad \int \frac{1}{1+x} dx \quad \int \frac{x^3+x+1}{x-1} dx \quad \int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

Problema 7. Calcola le primitive delle seguenti funzioni:

$$1) g_1(x) = \arctg(x);$$

$$2) g_2(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}.$$

Problema 8. Luca partecipa a un torneo di scacchi dove giocherà 4 partite. A ogni partita si estrae a sorte con una moneta truccata (la probabilità che venga testa è $\frac{1}{3}$) chi gioca coi pezzi bianchi e chi coi neri: se esce testa Luca gioca coi pezzi bianchi, se esce croce gioca coi neri.

- i) Qual è la probabilità che Luca giochi almeno una partita del torneo coi neri?
Luca sa che se gioca coi bianchi ha il 20% di probabilità di perdere e il 50% di pattare, mentre coi neri ha il 50% di probabilità di perdere e il 40% di pattare. Egli vince le prime due partite del torneo.
- ii) Qual è la probabilità che le abbia giocate entrambe coi neri?

Quesito 1. Dimostra che $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ per $x \in [-1, 1]$ la seguente identità:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Quesito 2. Data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cosa succede alle due radici se, tenendo fissati b e c si fa il limite per $a \rightarrow 1$?

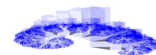
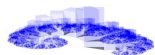
Quesito 3. Verifica la seguente identità :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

Quesito 4. Dimostra la seguente identità :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx \quad \text{se } a > 0$$

⁴superficie laterale più base (fondo della pentola)



9 I problemi

Problema 1. Per stimare l'andamento nel tempo della numerosità della popolazione di pesci di un allevamento viene utilizzato il modello malthusiano, secondo il quale

$$x'(t) = ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

dove $x_0 > 0$ è la numerosità della popolazione all'istante iniziale $t = 0$, $x(t)$ è la numerosità dopo t anni dall'istante iniziale, a è il potenziale biologico, definito come il rapporto tra l'incremento annuo della popolazione e la numerosità totale.

- 1) Il candidato individui le dimensioni fisiche del potenziale biologico, che viene assunto positivo e costante nel tempo; determini la funzione $x(t)$ soluzione di 1 e ne studi l'andamento, spiegando perché tale modello non è realistico su intervalli di tempo lunghi;
- 2) per ottenere una descrizione più realistica, il modello malthusiano può essere modificato aggiungendo all'equazione differenziale un termine che contrasta la crescita della popolazione:

$$x'(t) = ax(t) - \frac{a}{m}x^2(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

dove m è una costante positiva. Si ottiene in questo modo un modello della dinamica della popolazione detto modello logistico. Il candidato verifichi che 2 ha come soluzione la funzione:

$$x(t) = \frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0}$$

Di questa funzione studi la monotonia e il valore asintotico nei tre casi seguenti: $x_0 < m$, $x_0 > m$ e $x_0 = m$, interpretando il significato della costante m , che prende il nome di capacità portante dell'ambiente.

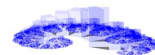
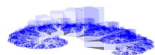
- 3) In un dato allevamento al primo gennaio dell'anno 2023 si contano 1000 pesci e si stima un incremento annuale del 25 %; la capacità portante dell'allevamento è di 5000 pesci. Il candidato studi il grafico della funzione soluzione di 2, determinando in particolare in quale anno e semestre la crescita della popolazione incomincia a rallentare e in quale anno e semestre la popolazione raggiungerà il 95 % della capacità portante.
- 4) Per un altro allevamento si stima che nel quinquennio 2023-2028 la popolazione di pesci cresca con legge

$$x(t) = 5000 \frac{e^{\frac{t}{4}}}{\frac{3}{8}t + 5} \quad t \in [0, 5]$$

dove, anche in questo caso, la durata è misurata in anni e si pone l'istante iniziale $t = 0$ in corrispondenza al primo gennaio 2023. Il candidato verifichi che, secondo quanto previsto dal modello, questo secondo allevamento supererà il primo in numerosità e determini in quale trimestre del quinquennio (gennaio-marzo, aprile-giugno, ...) avverrà il sorpasso. A questo proposito si assuma per semplicità che l'anno sia diviso in quattro trimestri di uguale durata.

Problema 2. Un architetto deve progettare una piscina la cui vasca ha superficie trapezoidale. Il trapezio è isoscele, ha base maggiore di lunghezza 30 m, base minore e altezza pari a 10 m. L'architetto deve confrontare due progetti:

- nel primo la cavità della vasca è il solido generato dalla rotazione di 90° del trapezio intorno alla sua base maggiore;
 - nel secondo la cavità è un solido le cui sezioni, ottenute perpendicolarmente alle basi del trapezio, sono tutte dei quadrati;
- 1) L'architetto deve scegliere il progetto in cui sia minimo il rapporto fra la capacità della piscina, cioè il volume massimo di acqua che questa può contenere, e l'area della superficie interna della vasca che andrà piastrellata e opportunamente impermeabilizzata. Quale progetto dovrà essere scelto?
 - 2) Una volta stabilito che il progetto da scegliere è il primo, e che il volume della piscina, approssimato alle centinaia, è $1.3 \cdot 10^3 \text{ m}^3$, l'architetto costruisce la piscina ed effettua delle prove di riempimento e svuotamento. In particolare si verifica che la funzione che descrive adeguatamente il contenuto della piscina durante lo svuotamento è la seguente: $f(t) = 1767(t^2 + 2t + 2)e^{-1-t}$, dove il tempo è espresso in ore. Si disegni il grafico della funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.



- 3) In quale istante, durante lo svuotamento della piscina, la velocità di deflusso dell'acqua è massima?
- 4) La piscina si considera vuota quando il suo contenuto è minore di 100 ℓ . Quante ore e quanti minuti saranno necessari per svuotare la piscina?

Problema 3. Data la funzione: $g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{2x-1} + x & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \lambda \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

- 1) indica l'insieme dei valori di λ per cui la funzione è continua, esistono valori di λ per cui la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$?
- 2) per quali valori di λ la funzione ha massimo assoluto?
Assumi ora $\lambda = -1$
- 3) studia la funzione $g_{-1}(X)$;
- 4) calcola nel caso $\lambda = -1$ l'area della regione di piano intersezione fra il primo quadrante e il sottografico della funzione g

10 I quesiti

Quesito 1. Nella regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = 4x - x^2$ e l'asse delle ascisse viene inscritto un trapezio, calcola l'ascissa di A per cui l'area del trapezio è massima.

Quesito 2. L'interno di un serbatoio (capacità 32 litri), senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di vetroresina. Quali devono essere le dimensioni affinché la quantità di vetroresina da utilizzare sia minima.

Quesito 3. Spiega perché la funzione $f(x) = |x^3 - x^2|$ non è derivabile nel punto $x = 1$.

Quesito 4. La funzione $f(x) = |x^3 - x^2|$ è derivabile nel punto $x = 0$? (Motiva la risposta)

Quesito 5. Risolvi il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - xy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Quesito 6.

Definizione 1 (Γ di Eulero).

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

- i) Calcola $\Gamma(2)$;
- ii) Dimostra che $\Gamma(n+1) = n!$

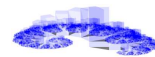
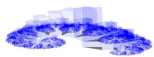
Quesito 7. Un'automobile in moto lungo una strada rettilinea ha in ogni istante di tempo una velocità direttamente proporzionale alla distanza dalla meta verso cui è diretta. L'automobile raggiungerà la meta? Argomentare esaurientemente la risposta fornita.

Quesito 8. Un poliedro convesso di volume V e superficie A è circoscritto ad una sfera di raggio R . Si dimostri che $R = 3 \frac{V}{A}$.

Quesito 9. Si consideri un semicerchio di raggio r avente diametro AB . Una semiretta uscente da A divide il semicerchio in due parti equivalenti; essa forma con AB un angolo x . Si calcoli il valore di x con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

Quesito 10. Duecento anni fa, nel 1815, nasceva a Ostenfelde il grande matematico Karl Weierstrass. Il candidato enunci il teorema di Weierstrass e illustri la sua importanza nella dimostrazione del teorema di Rolle.

Quesito 11. Data l'equazione differenziale $y'' + 9y = 6e^{3x}$, la sua soluzione generale è:



- a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{3x}$; c) $y = C_1 + C_2 e^{9x} + \frac{1}{3} e^{3x}$;
b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} \sin 3x$; d) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$.

Il candidato scelga la risposta corretta e argomenti sinteticamente ma in modo esauriente la procedura che si deve svolgere per ottenerla.

Quesito 12.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ è dato il piano α di equazione $3x + 3y + 4z - 12 = 0$. Si determini il volume del poliedro convesso racchiuso da α e dai tre piani xy , xz , yz formati dagli assi cartesiani e si calcoli la distanza del piano α dall'origine O .

Quesito 13. Enrico, Francesco, Davide e Alex stanno giocando con un mazzo di 40 carte. Nel gioco vengono distribuite 10 carte a testa.

- a) Qual è la probabilità che Francesco non abbia in mano nessuna carta di denari?
b) Qual è la probabilità che Enrico abbia in mano almeno una carta di denari?
c) All'inizio del gioco Davide esclama: "Non ho in mano nessuna carta di denari!". Qual è la probabilità che Alex non abbia in mano nessuna carta di denari?

11 ... anche per recupero

11.1 Studio di funzione

Problema 1. Studia la funzione: $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$.

Calcola l'equazione della retta r secante il grafico G_f in $A = (-1, f(-1))$ e in $M = \left(\frac{\log(3)}{2}, f\left(\frac{\log(3)}{2}\right)\right)$.

Calcola l'area della regione di piano compresa fra G_f e r .

11.2 MinMax

Quesito 1. Sia P la parabola di equazione $y = 4x - x^2$, dimostra che il punto di minima distanza da $A = (5, 4)$ a P è il punto $T = (3, 3)$.

11.3 Probabilità

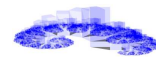
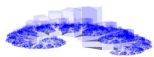
Quesito 2. La probabilità che ha un atleta di biathlon di colpire il bersaglio è del 85%, qual è la probabilità che in cinque tiri consecutivi sbagli una sola volta?

11.4 Geo3D

Quesito 3. Trova la minima distanza fra le rette AB e CD dove $A = (-1, 0, 2)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (2, -1, 0)$.

11.5 Teoria

Quesito 4. Calcola la media integrale m della funzione $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{x+1} + 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$ Esiste un $\xi \in [-1, 1]$ tale che $f(\xi) = m$? Motiva la risposta.



12 Da affrontare solo dopo aver risolto “... anche per recupero”

Quesito 5. Sia $g(x)$ una funzione C^2 ⁽⁵⁾ nell'intervallo $I = [-3, 3]$. Sapendo che $g(-3) = g(-1)$ e $g(1) = g(3)$, dimostra che esiste in I un punto ξ tale che $g''(\xi) = 0$.

Quesito 6. Calcola i seguenti integrali:

$$\int \frac{x^{1012}}{1+x^{2026}} dx \quad \int x^2 \log(x^3) dx$$

Quesito 7. Discuti, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \beta x + \frac{\cos(3x)}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x^2 + 49} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Quesito 8. Sia $f : [0, 3] \rightarrow [0, 2]$ strettamente crescente e derivabile con derivata continua. Calcola:

$$\int_0^3 f'(x) \log(1 + f(x)) dx$$

Quesito 9. Sia $f(x) = x + 2e^x$ e g la funzione inversa di f . Calcola l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di coordinate $(2, 0)$.

Quesito 1. Calcola:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right)$$

Quesito 2. Detto P un punto interno al lato AB di un parallelogramma $ABCD$, dimostra che la somma dei due triangoli ACP , PDB è equivalente alla metà del parallelogramma $ABCD$.

Quesito 3. Date le rette: $r : \begin{cases} x & y = 0 \\ z & 2x = 5 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x & y = 6 \\ x & 2y + z = 6 \end{cases}$ $t : \begin{cases} 3x & 2z + 2 = 0 \\ 3y + z & 4 = 0 \end{cases}$

- scrivi le equazioni della retta l incidente r ed s e parallela a t ;
- trova l'equazione della sfera Σ passante per i punti $A = (1, 1, 2)$ e $B = (2, 1, 1)$ e tangente alla retta t nel punto $C = (0, 1, 1)$.

Quesito 4. In un contenitore ci sono molte palline di diversi colori, il 60 % sono rosse. Si estraggono con reinserimento 5 palline. Dopo aver estratto una pallina, in un secondo contenitore inizialmente vuoto viene inserita una pallina identica a quella estratta.

Terminate le 5 estrazioni viene pescata dal secondo contenitore una sola pallina:

- qual è la probabilità che sia rossa?
- Se è stata estratta una pallina rossa, qual è la probabilità che nel contenitore ci siano 3 palline rosse?

Quesito 5. Calcola, se esistono, i seguenti integrali:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + e} dx \quad \text{b) } \int_2^5 \frac{x}{x-1} dx \quad \text{c) } \int_1^5 \frac{x}{x-1} dx$$

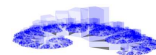
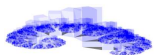
Quesito 6. Mostra che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 3^{-x} + x^3 = 2\}$ è limitato.

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

1) Studia la funzione e traccia il grafico G_f .

2) Calcola l'equazione della tangente t a G_f nel punto T di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

⁵derivabile con continuità fino all'ordine 2



- 3) Spiega perché f non è invertibile nell'intervallo $\left[\frac{p}{3}, \frac{p}{3} \right]$, mentre è invertibile nell'intervallo $I = \left[0, \frac{p}{3} \right]$.
- 4) Sia t' la tangente a G_f nel punto T' di ascissa $\frac{p}{3}$. Dopo aver ricavato una primitiva di f , calcola l'area della regione finita di piano compresa fra G_f e le due tangenti t, t' .
- 5) Ricava la legge della funzione g inversa di $\tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1)$.⁽⁶⁾

Quesito 1. Ricava le dimensioni del cilindro retto di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R .

Quesito 2. Un mazzo di “tarocchi”⁽⁷⁾ è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette “Arcani maggiori”, 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estrahendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un “Arcano maggiore”?

Quesito 3. Dati i punti $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (1, -1, 2)$ e $D = (-3, 0, 0)$, scrivi in forma parametrica le equazioni delle rette AB e CD , verifica che sono sghembe, calcola la loro minima distanza.

13 Risolvi uno dei due problemi seguenti

Problema 1. Considera la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = (x^3 - kx)e^{-kx^2}$$

- a) dimostra che tutte le $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono dispari;
- b) dimostra che tutte le $f'_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono pari;
- c) dimostra che tutte le $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hanno un flesso nell'origine del sistema di riferimento;
- d) studia la funzione

$$f_1(x) = (x^3 - x)e^{-x}$$

- e) calcola

$$\int_0^{+\infty} |f_1(x)| dx$$

Problema 2. Il paraboloide $\mathcal{P}$ in figura 2 ha equazione $z = a(x^2 + y^2)$, ricava il valore di a sapendo che il suo fuoco è nel punto di coordinate $(0, 0, 2)$.

Il paraboloide viene, internamente ricoperto da un bagno d'argento, per renderlo riflettente. Sapendo che il bagno d'argento ha uno spessore di $10\mu m$, il paraboloide, di equazione $z = a(x^2 + y^2)$, ha diametro $2m$ ed è profondo $40cm$. Calcolare il costo del bagno di argento (densità argento: $10500 \frac{kg}{m^3}$, costo dell'argento 16.5 € al grammo).

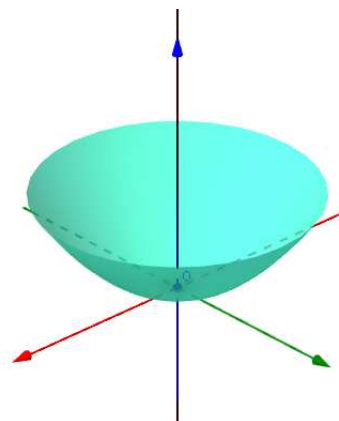
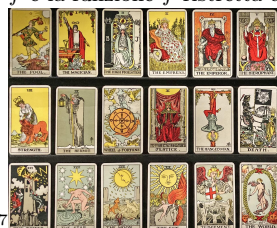
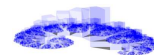
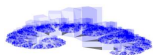


Figura 2: La superficie $\mathcal{P}$

⁶ $\tilde{f}$ è la funzione f ristretta a $\mathbb{R}_0^+$



⁷



14 Risolvi almeno tre dei seguenti quesiti

Quesito 1. Si scrivono su 11 foglietti di carta le lettere della parola **ABRACADABRA**, una per foglietto, e le si pongono in un contenitore. Si estraggono poi, a caso, i foglietti.

Qual è la probabilità che le lettere, nell'ordine estratto, diano di nuovo la stessa parola?

Quesito 2. Il numero di meteoriti che colpisce un satellite durante ogni sua orbita si distribuisce come una variabile casuale di Poisson di parametro λ . Nel compiere la sua orbita il satellite impiega 1 giorno, ed è mediamente colpito da 3 meteoriti.

Calcola la probabilità che nel percorrere 5 orbite il numero di meteoriti che colpiscono il satellite sia minore o uguale a 3.

Quesito 3. Quante sono le sfere di raggio uguale a 5 la cui sezione con il piano $z = 3$ è la circonferenza di centro $O = (1, 1, 3)$ e raggio uguale a 3?

Calcola le equazioni cartesiane.

Quesito 4. Determinare centro e raggio della circonferenza: $C: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

Per quali valori di h il piano $x + y + z = h + 1$ interseca la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ in una circonferenza?

Quesito 5. Sia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{4+x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ Determina la primitiva di f che si annulla per $x = 0$.

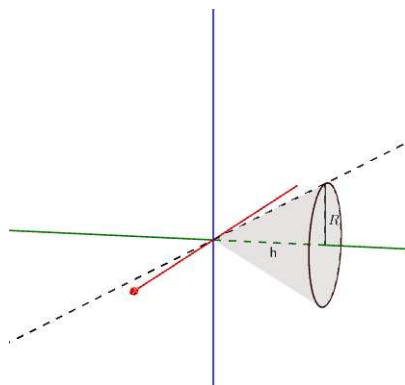


Figura 3

Quesito 6. Dimostra, utilizzando il calcolo integrale, che il volume di un cono è $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Vedi figura 3

15 M ateprob

Problema 1. Sia $f(x) = x \log \left(\frac{x}{x-1} \right)$

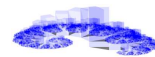
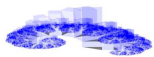
1) dimostra che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$;

2) come si dimostra, sapendo che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge ad e , che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$?

3) Studia la funzione.

4) Detta $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, ricava che $F(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 \log \left(\frac{x}{x-1} \right) + x + \log |x-1| \right)$.

5) La regione di piano, situata nel II quadrante, compresa fra il grafico di f e il suo asintoto orizzontale non è misurabile, spiega perché.



16 EdCiv

Quesito 1. Data una variabile aleatoria continua X con distribuzione $N_{(10,4)}^{(8)}$ determina la probabilità che X assuma un valore:

- a) inferiore a 8; b) superiore a 13; c) compreso fra 9 e 10.7.

Quesito 2. La probabilità p di uscita del numero 18 in una estrazione del lotto è $\frac{1}{18}$.

a) Spiega perché $p = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}}$.

- b) Usando l'approssimazione normale, stima la probabilità che il numero 18 sia uscito almeno 12 volte nelle ultime 100 estrazioni.

17 M ate quesiti due a scelta

Quesito 3. Siano Γ la sfera di raggio $\sqrt{3}$ e centro nel punto $C = (1, 1, 1)$; r la retta per l'origine di direzione $B - A$ ($A = (1, 0, 0)$ $B = (0, 1, 1)$):

- i) individua le coordinate del punto $D = r \cap \Gamma$; iii) calcola l'angolo che la direzione della retta DC forma con la normale al piano xy .
ii) calcola l'equazione parametrica della retta DC ;

Quesito 4. In figura 4 sono rappresentate due funzioni le cui leggi sono $x \mapsto \frac{1}{16}(2x^2 - 7x + 4)$ e $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$.

- a) Indica, motivando la risposta quale legge corrisponde ad f_1 e quale ad f_2 .
b) Calcola il volume del solido generato, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, della regione di piano rappresentata in figura.

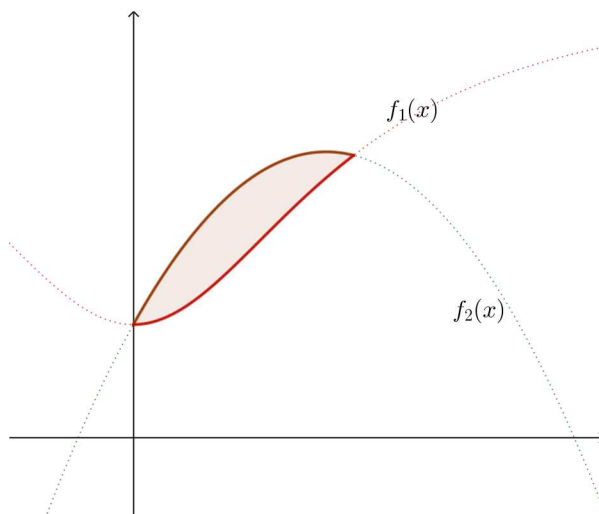


Figura 4

Quesito 5. Data la funzione $f_3(x) = \frac{\sqrt{\log(x) + 2}}{1 - x^4}$

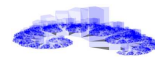
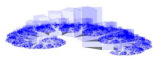
- i) indica il dominio di $f_3(\cdot)$;
ii) quali fra i seguenti limiti si possono calcolare:

$$ii_1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x); \quad ii_2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x); \quad ii_3) \lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x); \quad ii_4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e^2}} f_3(x); \quad ii_5) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_3(x);$$

motiva dettagliatamente la risposta, indicando in particolare in quali casi l'operatore limite è stato usato anche se la funzione in quel punto risulta già definita continua.

- iii) calcola $f_3'(x)$.

⁸significa distribuzione normale con media 10 e varianza 4



Quesito 6. Data la funzione $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}}{x}$

- i) calcola, se esistono, i limiti a $\pm\infty$, motivando con cura il calcolo;
- ii) verifica che la funzione ha come asintoto obliquo la bisettrice del I e III quadrante. Spiega come è stata ricavata la formula per il calcolo dell'asintoto obliquo.