

1 Problemi

1.1 Riscaldamento obbligatorio

Problema 1. Dopo aver calcolato il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

1) $f_1(x) = \log(\sqrt{x-x^2} - 2x + 1)$

4) $f_4(x) = \log(\arcsin(x^2))$

2) $f_2(x) = \log(\cos(\pi x) - \sin(\pi x) - 1)$

3) $f_3(x) = 3^{\log(e^x - 1)}$

5) $f_5(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

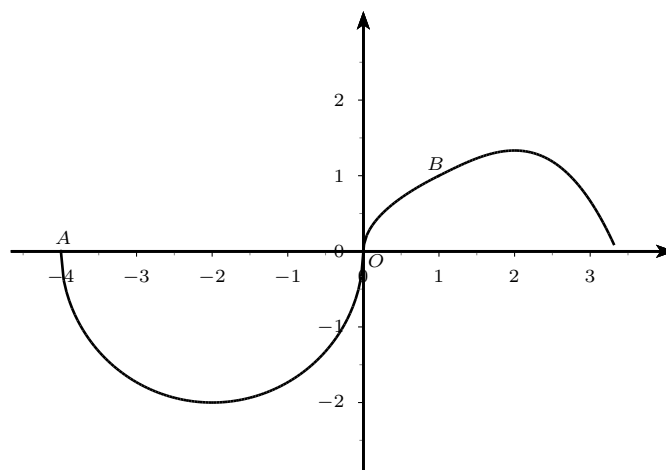
indica, motivando, quali funzioni sono limitate e quali non lo sono.

1.2 A scelta uno fra questi due

Problema 2. Considera la funzione $f(x) = x \log(x^2)$:

- i) dimostra che esiste una funzione g definita $\forall x \in \mathbb{R}$ che coincide con $f \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e vale 0 nello 0 ed è ovunque continua;
- ii) dimostra che g è dispari;
- iii) calcola l'equazione della tangente al grafico $\mathcal{G}_g$ di g in $O = (0, 0)$;
- iv) verifica che O è flesso per g .

Problema 3. 1) Scrivi l'equazione algebrica della funzione continua f rappresentata in figura:



dove $A = (-4, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$. Nell'intervallo di estremi A e O la curva è una semicirconferenza, nell'intervallo di estremi O e B la curva è un arco parabolico con asse l'asse delle ascisse e vertice in O mentre nella parte finale la curva è una cubica $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ha un flesso in B e ammette punto di massimo relativo in $x = 2$, inoltre f è derivabile in $x = 1$.

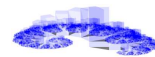
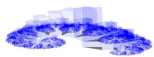
- 2) Studia la derivabilità di f .
- 3) Stima le coordinate del punto in cui $\mathcal{C}$ interseca l'asse delle ascisse.

2 Quesiti

2.1 A scelta almeno due

Quesito 1. In una ditta i costi per la produzione sono suddivisi i costi fissi 1000 € e costi variabili secondo la quantità q di merce prodotta. I costi variabili seguono la legge $(C(q) = 12q^2 - 960q)$ €. Il ricavo rispetto alla merce venduta v è dato da $(R(v) = 10v^2)$ €.

Supponendo che la quantità di merce venduta sia pari alla quantità prodotta ($v = q$), calcola la quantità di merce che deve essere prodotta per avere massimo guadagno.



Quesito 2. Nel piano α è dato il triangolo AOB rettangolo in O con $AO = 2OB$. Sia β il piano passante per AB che forma con α un angolo la cui tangente vale $\sqrt{5}$.

Detta h la perpendicolare ad α in O , sia C l'intersezione di h con β .

Calcola il volume del solido $AOBC$, nel caso $\overline{OB} = 1$

Quesito 3. Siano C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4 cinque contenitori indistinguibili: C_0 e C_1 contengono 10 palline rosa e 4 azzurre, mentre C_2, C_3 e C_4 contengono 4 palline rosa e 10 azzurre. Sapendo che estraendo contemporaneamente 5 palline da un contenitore scelto a caso ho ottenuto 3 rosa e 2 azzurre, qual è la probabilità che il contenitore scelto contenga 10 palline rosa e 4 azzurre?

Quesito 4. Sapendo che f è continua in x_0 e che esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$ dimostra che $\ell = f'(x_0)$.

3 Chi ... Domini

- i) $\frac{5x^4 - 6x^2 + 2}{x^2 - 12x + 36}$
- ii) $5^{-\sqrt[3]{x-2}}$;
- iii) $\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^{\sin(x)}$;
- iv) $\sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$;
- v) $(\sin(x) - \cos(x))^{\log \sqrt{2 \sin(x) - 1}} \quad x \in [0, 2\pi]$;
- vi) $\frac{x^2 + 1 + \sqrt{8 - x^3}}{\sqrt{3 - x} + 3 - x}$;
- vii) $\log_3(3 - |x - 3| - |x - 2|)$;
- viii) $\sqrt{x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}}$.

4 Chi ... non solo Funzione

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- a) Traccia il grafico $\mathcal{G}_f$;
- b) calcola l'equazione della tangente a $\mathcal{G}_f$ nel punto di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- c) Spiega perché la funzione f non è invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, mentre è invertibile nell'intervallo $I = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.
- d) Ricava la legge della funzione g inversa di $\tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1)$.

Quesito 1. Ricava le dimensioni del cilindro retto di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R .

5 Per tutti, se avanza tempo

Problema 2. Calcola i seguenti integrali:

- i) $\int \frac{x+4}{x+5} dx$;
- ii) $\int \frac{x+4}{x^2+5} dx$;
- iii) $\int x \log(x) dx$;
- iv) $\int x^2 e^{-x^3} dx$.