

Problema 1. È data la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = e^{-2x} - (3+k)e^{-x} + 3k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Indicato con $\mathcal{G}_k$ il grafico di f_k .

a) Prova che esiste un unico punto A , comune a tutte le curve $\mathcal{G}_k$.

b) studia la funzione $f_1(x)$ ($k=1$).

Considera la sua limitazione $g(x) = f(x)|_{[\log 2, +\infty)}$:

c) g è invertibile? Motiva in modo dettagliato.

d) Quale condizione deve soddisfare k affinché esista su $\mathcal{G}_k$ un punto $I = (x_0, y_0)$ tale che: $f'_k(x_0) = 0$? In tale situazione determina, in funzione di k , le coordinate del punto I .

e) Determina per quali valori di k esiste una regione finita di piano compresa fra $\mathcal{G}_k$ e l'asse delle ascisse.

f) Calcola l'area della regione finita di piano compresa fra $\mathcal{G}_e^{(1)}$ e l'asse delle ascisse

Quesito 1. Enuncia e dimostra il teorema della media.

Quesito 2. Sia $ABCD A' B' C' D'$ un cubo di lato unitario e AC' e BD' due sue diagonali. Dopo aver scelto un opportuno riferimento ortonormale $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si scrivi le equazioni dei due piani per A' e per C paralleli ad entrambe le rette AC' e BD' .

Quesito 3. Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcola la probabilità che il bersaglio venga colpito:

a) 4 volte;

b) le prime 4 volte.

Quesito 4. Stabilisci per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k ?

Quesito 5 (*). Risolvi il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + x^3 y = 3x^3 e^{-x^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 1. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la funzione la cui legge è $\gamma(x) = |\sin(x)|$, dopo aver rappresentato un grafico approssimativo, spiega la seguente affermazione: « γ è continua nel dominio ma non è derivabile in un insieme numerabile di punti».

Problema 2. Sia δ la funzione la cui legge è $\delta(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, dimostra che:

1) è limitata;

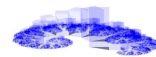
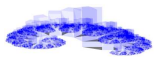
2) è invertibile se ristretta alla semiretta $x \geq 1$;

Dopo aver calcolato le primitive di δ ricava l'area della regione di piano compresa fra la curva l'asse delle ascisse e le rette $x = -3$ e $x = 1$.

Problema 3. Fra i rettangoli aventi come somma dei lati e di una diagonale una lunghezza ℓ , ricerca quello di area massima.

Problema 4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano dello spazio euclideo $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considera il piano $\pi : y - z = 0$ e la retta $s : \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ Dato il vettore $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$, determinane altri due, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, rispettivamente paralleli a π ed s , tali che $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$.

¹ $\mathcal{G}_e$ è il grafico di $f_e(x) = e^{-2x} - (3+e)e^{-x} + 3e$



Quesito 1. Di un lucchetto a combinazione con sei cifre ho scoperto che la combinazione che permette di aprirlo non contiene zeri, ha due 1 e due 2, quanti tentativi devo fare in media per poterlo aprire?

Quesito 2. Sia $F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$. Calcola $F'(x)$.

Quesito 3. Una funzione F è definita, per ogni $x \geq 1$ dal seguente integrale: $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, dimostra che $F(x) \geq \log(x)$.

Quesito 4. Calcola $\int_0^1 x f(x^2) dx$ sapendo che detta $F(x)$ una primitiva di f si ha: $F(0) = -2$ e $F(1) = 4$

Problema 1. Calcola i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 3}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \pi x)}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1}$

Problema 2. Trova massimi e minimi della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

Problema 3. Calcola le primitive delle seguenti funzioni:

1) $f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

2) $f_2(x) = \cos(x) \sin^5(x)$;

3) $f_3(x) = x^3 e^x$.

Problema 4. Tra tutte le pentole cilindriche senza coperchio con superficie⁽²⁾ pari a S , determinare raggio e altezza in modo da massimizzare il volume.

Problema 5. Uno studente completamente impreparato deve rispondere a 13 quiz per ciascuno dei quali sono suggerite 3 risposte, una sola delle quali corretta. Lo studente tira a indovinare.

i) Con quale probabilità risponderà esattamente 12 volte?

ii) E con quale probabilità sbaglierà tutte le risposte?

Problema 6. Calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \arctg x dx \quad \int \log^3(x) dx \quad \int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx \quad \int \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} dx \quad \int \frac{x^3}{1 + x^8} dx$$

Problema 7. Calcola le primitive delle seguenti funzioni:

1) $g_1(x) = \arctg(x)$;

2) $g_2(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)}$.

Problema 8. Luca partecipa a un torneo di scacchi dove giocherà 4 partite. A ogni partita si estrae a sorte con una moneta truccata (la probabilità che venga testa è $\frac{1}{3}$) chi gioca coi pezzi bianchi e chi coi neri: se esce testa Luca gioca coi pezzi bianchi, se esce croce gioca coi neri.

i) Qual è la probabilità che Luca giochi almeno una partita del torneo coi neri?

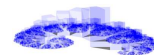
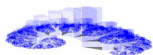
Luca sa che se gioca coi bianchi ha il 20% di probabilità di perdere e il 50% di pattare, mentre coi neri ha il 50% di probabilità di perdere e il 40% di pattare. Egli vince le prime due partite del torneo.

ii) Qual è la probabilità che le abbia giocate entrambe coi neri?

Quesito 1. Dimostra $\forall x \in [-1, 1]$ la seguente identità:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

²superficie laterale più base (fondo della pentola)



Quesito 2. Data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cosa succede alle due radici se, tenendo fissati b e c si fa il limite per $a \rightarrow \infty$?

Quesito 3. Verifica la seguente identità :

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Quesito 4. Dimostra la seguente identità :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx \quad \forall a > 0$$

1 I problemi

Problema 1. Per stimare l'andamento nel tempo della numerosità della popolazione di pesci di un allevamento viene utilizzato il modello malthusiano, secondo il quale

$$x'(t) = ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

dove $x_0 > 0$ è la numerosità della popolazione all'istante iniziale $t = 0$, $x(t)$ è la numerosità dopo t anni dall'istante iniziale, a è il potenziale biologico, definito come il rapporto tra l'incremento annuo della popolazione e la numerosità totale.

- 1) Il candidato individui le dimensioni fisiche del potenziale biologico, che viene assunto positivo e costante nel tempo; determini la funzione $x(t)$ soluzione di 1 e ne studi l'andamento, spiegando perché tale modello non è realistico su intervalli di tempo lunghi;
- 2) per ottenere una descrizione più realistica, il modello malthusiano può essere modificato aggiungendo all'equazione differenziale un termine che contrasta la crescita della popolazione:

$$x'(t) = ax(t) - \frac{a}{m}x^2(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

dove m è una costante positiva. Si ottiene in questo modo un modello della dinamica della popolazione detto modello logistico. Il candidato verifichi che 2 ha come soluzione la funzione:

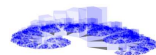
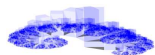
$$x(t) = \frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0}$$

Di questa funzione studi la monotonia e il valore asintotico nei tre casi seguenti: $x_0 < m$, $x_0 > m$ e $x_0 = m$, interpretando il significato della costante m , che prende il nome di capacità portante dell'ambiente.

- 3) In un dato allevamento al primo gennaio dell'anno 2023 si contano 1000 pesci e si stima un incremento annuale del 25 %; la capacità portante dell'allevamento è di 5000 pesci. Il candidato studi il grafico della funzione soluzione di 2, determinando in particolare in quale anno e semestre la crescita della popolazione incomincia a rallentare e in quale anno e semestre la popolazione raggiungerà il 95 % della capacità portante.
- 4) Per un altro allevamento si stima che nel quinquennio 2023-2028 la popolazione di pesci cresca con legge

$$x(t) = 5000 \frac{e^{\frac{t}{4}}}{\frac{3}{8}t + 5} \quad t \geq 0$$

dove, anche in questo caso, la durata è misurata in anni e si pone l'istante iniziale $t = 0$ in corrispondenza al primo gennaio 2023. Il candidato verifichi che, secondo quanto previsto dal modello, questo secondo allevamento supererà il primo in numerosità e determini in quale trimestre del quinquennio (gennaio-marzo, aprile-giugno, ...) avverrà il sorpasso. A questo proposito si assuma per semplicità che l'anno sia diviso in quattro trimestri di uguale durata.



Problema 2. Un architetto deve progettare una piscina la cui vasca ha superficie trapezoidale. Il trapezio è isoscele, ha base maggiore di lunghezza 30 m, base minore e altezza pari a 10 m. L'architetto deve confrontare due progetti:

- nel primo la cavità della vasca è il solido generato dalla rotazione di 90° del trapezio intorno alla sua base maggiore;
 - nel secondo la cavità è un solido le cui sezioni, ottenute perpendicolarmente alle basi del trapezio, sono tutte dei quadrati;
- 1) L'architetto deve scegliere il progetto in cui sia minimo il rapporto fra la capacità della piscina, cioè il volume massimo di acqua che questa può contenere, e l'area della superficie interna della vasca che andrà piastrellata e opportunamente impermeabilizzata. Quale progetto dovrà essere scelto?
 - 2) Una volta stabilito che il progetto da scegliere è il primo, e che il volume della piscina, approssimato alle centinaia, è $1.3 \cdot 10^3 \text{ m}^3$, l'architetto costruisce la piscina ed effettua delle prove di riempimento e svuotamento. In particolare si verifica che la funzione che descrive adeguatamente il contenuto della piscina durante lo svuotamento è la seguente: $f(t) = 1767(t^2 + 2t + 2)e^{-1-t}$, dove il tempo è espresso in ore. Si disegni il grafico della funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
 - 3) In quale istante, durante lo svuotamento della piscina, la velocità di deflusso dell'acqua è massima?
 - 4) La piscina si considera vuota quando il suo contenuto è minore di 100 ℓ . Quante ore e quanti minuti saranno necessari per svuotare la piscina?

Problema 3. Data la funzione: $g_\lambda(x) = \begin{cases} e^{2x-1} + x & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + \lambda \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

- 1) indica l'insieme dei valori di λ per cui la funzione è continua, esistono valori di λ per cui la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$?
- 2) per quali valori di λ la funzione ha massimo assoluto?
Assumi ora $\lambda = -1$
- 3) studia la funzione $g_{-1}(X)$;
- 4) calcola nel caso $\lambda = -1$ l'area della regione di piano intersezione fra il primo quadrante e il sottografico della funzione g

2 I quesiti

Quesito 1. Nella regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = 4x - x^2$ e l'asse delle ascisse viene inscritto un trapezio, calcola l'ascissa di A per cui l'area del trapezio è massima.

Quesito 2. L'interno di un serbatoio (capacità 32 litri), senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di vetroresina. Quali devono essere le dimensioni affinché la quantità di vetroresina da utilizzare sia minima.

Quesito 3. Spiega perché la funzione $f(x) = |x^3 - x^2|$ non è derivabile nel punto $x = 1$.

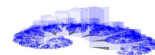
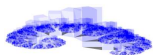
Quesito 4. La funzione $f(x) = |x^3 - x^2|$ è derivabile nel punto $x = 0$? (Motiva la risposta)

Quesito 5. Risolvi il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - xy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Quesito 6.

Definizione 1 (Γ di Eulero).

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$



- i) Calcola $\Gamma(2)$;
- ii) Dimostra che $\forall n > 0 \Gamma(n+1) = n!$

Quesito 7. Un'automobile in moto lungo una strada rettilinea ha in ogni istante di tempo una velocità direttamente proporzionale alla distanza dalla meta verso cui è diretta. L'automobile raggiungerà la meta? Argomentare esaurientemente la risposta fornita.

Quesito 8. Un poliedro convesso di volume V e superficie A è circoscritto ad una sfera di raggio R . Si dimostri che $R = 3\frac{V}{A}$.

Quesito 9. Si consideri un semicerchio di raggio r avente diametro AB . Una semiretta uscente da A divide il semicerchio in due parti equivalenti; essa forma con AB un angolo x . Si calcoli il valore di x con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

Quesito 10. Duecento anni fa, nel 1815, nasceva a Ostenfelde il grande matematico Karl Weierstrass. Il candidato enunci il teorema di Weierstrass e illustri la sua importanza nella dimostrazione del teorema di Rolle.

Quesito 11. Data l'equazione differenziale $y'' + 9y = 6e^{3x}$, la sua soluzione generale è:

- a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{3x}$;
- b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} \sin 3x$;
- c) $y = C_1 + C_2 e^{9x} + \frac{1}{3} e^{3x}$;
- d) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$.

Il candidato scelga la risposta corretta e argomenti sinteticamente ma in modo esauriente la procedura che si deve svolgere per ottenerla.

Quesito 12.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ è dato il piano α di equazione $3x + 3y + 4z - 12 = 0$. Si determini il volume del poliedro convesso racchiuso da α e dai tre piani xy , xz , yz formati dagli assi cartesiani e si calcoli la distanza del piano α dall'origine O .

Quesito 13. Enrico, Francesco, Davide e Alex stanno giocando con un mazzo di 40 carte. Nel gioco vengono distribuite 10 carte a testa.

- a) Qual è la probabilità che Francesco non abbia in mano nessuna carta di denari?
- b) Qual è la probabilità che Enrico abbia in mano almeno una carta di denari?
- c) All'inizio del gioco Davide esclama: "Non ho in mano nessuna carta di denari!". Qual è la probabilità che Alex non abbia in mano nessuna carta di denari?

3 ... anche per recupero

3.1 Studio di funzione

Problema 1. Studia la funzione: $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$.

Calcola l'equazione della retta r secante il grafico $\mathcal{G}_f$ in $A = (-1, f(-1))$ e in $M = \left(\frac{\log(3)}{2}, f\left(\frac{\log(3)}{2}\right)\right)$.

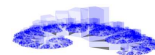
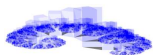
Calcola l'area della regione di piano compresa fra $\mathcal{G}_f$ e r .

3.2 MinMax

Quesito 1. Sia $\mathcal{P}$ la parabola di equazione $y = 4x - x^2$, dimostra che il punto di minima distanza da $A = (5, 4)$ a $\mathcal{P}$ è il punto $T = (3, 3)$.

3.3 Probabilità

Quesito 2. La probabilità che ha un atleta di biathlon di colpire il bersaglio è del 85%, qual è la probabilità che in cinque tiri consecutivi sbagli una sola volta?



3.4 Geo3D

Quesito 3. Trova la minima distanza fra le rette AB e CD dove $A = (-1, 0, 2)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (2, -1, 0)$.

3.5 Teoria

Quesito 4. Calcola la media integrale m della funzione $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x \in [-1, 0) \\ \sqrt{x+1} + 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$ Esiste un $\xi \in [-1, 1]$ tale che $f(\xi) = m$? Motiva la risposta.

4 Da affrontare solo dopo aver risolto “... anche per recupero”

Quesito 5. Sia $g(x)$ una funzione $C^2(3)$ nell'intervallo $I = [-3, 3]$. Sapendo che $g(-3) = g(-1)$ e $g(1) = g(3)$, dimostra che esiste in I un punto ξ tale che $g''(\xi) = 0$.

Quesito 6. Calcola i seguenti integrali:

$$\int \frac{x^{1012}}{1+x^{2026}} dx \quad \int x^2 \log(x^3) dx$$

Quesito 7. Discuti, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \beta x + \frac{\cos(3x) - 1}{3x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 49} - 7 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Quesito 8. Sia $f : [0, 3] \rightarrow [0, 2]$ strettamente crescente e derivabile con derivata continua. Calcola:

$$\int_0^3 f'(x) \log(1 + f(x)) dx$$

Quesito 9. Sia $f(x) = x + 2e^x$ e g la funzione inversa di f . Calcola l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di coordinate $(2, 0)$.

³derivabile con continuità fino all'ordine 2