



Problema 1. Considera la famiglia di funzioni reali di variabile reale $f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k}$, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$.

- 1) Verifica che, al variare di $k \in \mathbb{R}^+$ la funzione f_k ammette due punti di flesso che appartengono alla curva di equazione $y = \frac{1}{4x^2}$. Verifica, inoltre, che il grafico $\mathcal{G}_{f_k}$ della funzione f_k è tangente alla circonferenza $\mathcal{C}_k$ di equazione $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} = 0$ e studiare il numero di intersezioni tra le due curve al variare di $k \in \mathbb{R}^+$.
- 2) Dopo aver studiato la funzione $f_1(x)$, traccia il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Determina per quale valore di b l'area compresa fra il grafico della funzione $f_1(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, b]$ è uguale a quella del cerchio $\mathcal{C}_1$ di equazione $x^2 + y^2 - y \leq 0$.

Problema 2. L'interno di un serbatoio, (capacità 32 litri) senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di resina sintetica. Tenendo conto che sul fondo vengono applicate due mani di resina⁽¹⁾, quali devono essere le sue dimensioni affinché la quantità di resina utilizzata sia minima?

Quesito 1. Calcola la lunghezza del segmento di minima distanza che congiunge le rette:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + h \\ z = 2 - h \end{cases}$$

Quesito 2. È noto che la probabilità che un uomo sia daltonico è del 7%, mentre la probabilità che una donna sia daltonica è solo dello 0.5%. Considerato un gruppo di 30 persone costituito da 10 uomini e 20 donne scelti a caso:

- a) Qual è la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche?
- b) Qual è la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica?

Quesito 3. Sapendo che $\int_0^1 f(x)dx = 3$ calcola $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$

Se avanza tempo e ...

Quesito 4. Dimostra che $\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ⁽²⁾

¹In pratica il fondo richiede doppia quantità di resina rispetto alle pareti

² $0 < b < a$