

1 Problemi

Problema 1. Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

a) $|x^2 - x^4| + 2x^4 \leq 0;$

c) $\cos(x) + \sin(2x) \geq 0 \quad x \in [0, 2\pi];$

b) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} \leq x + 1;$

d) $(*) (\log_{\frac{1}{\pi}}(x))^{\sqrt{x}} + 1 \geq 0$

Problema 2. Nello spazio, considera i punti $P = (1, 1, 0)$ e $P' = (1, 2, 3)$ e le direzioni $v = (2, -1, \sqrt{2})$ e $v' = (1, 3, 2)$. Determina: l'equazione della retta r passante per P e di direzione v , l'equazione della retta s passante per P' e di direzione v' .

Dimostra che r ed s sono sghembe. Determina due piani paralleli π e π' tali che $r \subset \pi$ ed $s \subset \pi'$.

Problema 3. Nello spazio, considera in dipendenza dal parametro $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Determina, se esistono, i valori di k tale per cui r ed s sono complanari.

Problema 4. Una semiretta r interseca in O un piano α e forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con esso. Traccia la semiretta s , proiezione di r su α , e la semiretta $t \in \alpha$ di origine O che forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con s . Indica con P il punto di r tale che $\overline{OP} = 2a$, siano: H la proiezione di P su α , A il punto di t tale che $OA = OH$. Calcola l'ampiezza dell'angolo $\widehat{POA}$.

2 Quesiti

Quesito 1. Dimostra la formula $\sum \alpha_i = 2\pi(S - F)$.

Quesito 2. Dimostra, usando il principio di induzione, che:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \text{ è vera per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quesito 3. In figura 1 è rappresentato lo sviluppo di un poliedro le cui facce sono tutte triangoli equilateri:

- spiega perché non è un poliedro regolare;
- calcola l'angolo che il piano della faccia ABV_1 forma con il piano della faccia ABV_2
- se lo spigolo misura 2, quanto vale il volume del solido?

Quesito 4. Uno studente deve sostenere un esame. Se studia passa con probabilità 99 %, ma se va alla festa da ballo la sera prima la sua probabilità di promozione si riduce al 50 %. Deciderà di andare alla festa se esce testa lanciando una moneta equa. Se egli supera l'esame qual è la probabilità che sia andato a ballare?

Quesito 5. Dimostra che non esiste un poliedro con sette spigoli.^(a)

^aNoto che $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$

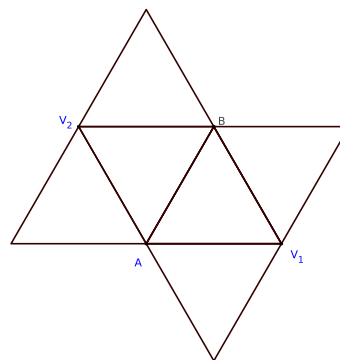


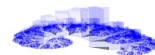
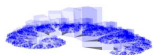
Figura 1: Poliedro non regolare

2.1 In alternativa

Nuovi quesiti 2 e 5 :

Quesito 2. Calcola i seguenti limiti:

*attenti questa disequazione è un po' birichina



i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[12]{x^{11} + x^{24}}}{4x - 7x^2};$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x + 3;$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 4} - x + 3.$

Quesito 5. Dimostra che la funzione $f(x) = 3 - x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

3 Un po' di limiti per iniziare

Problema 1. Calcola, se esistono, i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1};$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x};$
2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1};$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\log(2x + 1)}.$

4 Ora una funzioncina

Problema 2. Studia la funzione: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

5 Geo3D

Problema 3. Data la circonferenza di equazione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$$

calcola:

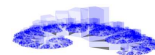
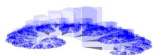
- a) la distanza fra il centro della circonferenza e il centro della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$;
b) l'equazione parametrica della retta tangente alla circonferenza nel punto di coordinate $(0, 0, -2)$.

6 Quesiti non solo teoria

Quesito 1. Dopo aver enunciato e dimostrato il teorema del confronto (due carabinieri), riporta una sua applicazione.

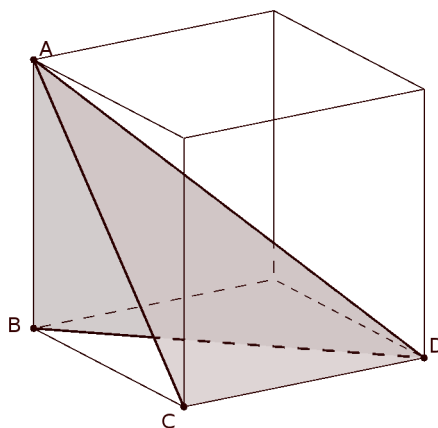
Quesito 2. Data la funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{se } x \neq 0 \\ 2025 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ spiega perché la funzione non è continua in $x = 0$

ma ammette limite per $x \rightarrow 0$.



7 Geometria nello spazio

Problema 4. AB, BC, CD sono tre spigoli di un cubo di diagonale AD . Ricava che l'angolo diedro delimitato dai piani ABD e ACD misura $\frac{\pi}{3}$.



Quesito 1. Dimostra che il campo elettrico $\vec{E}$, generato da una lastra conduttrice carica, è uniforme.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2. Può una carica q rimanere sospesa all'interno di un condensatore carico? Motiva la risposta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 3. Ricava la capacità di un condensatore piano.

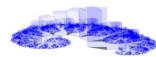
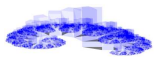
.....

.....

.....

.....

.....



Problema 1. Sui vertici di un tetraedro regolare, di spigolo ℓ metri, sono posizionate quattro cariche positive aventi la stessa intensità q misurata in Coulomb.

Calcola il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto P che si trova nel semispazio che non contiene il tetraedro, appartiene alla retta perpendicolare al piano contenente una faccia del tetraedro, passante per il baricentro della faccia, ad una distanza d metri dal baricentro. (figura 2)

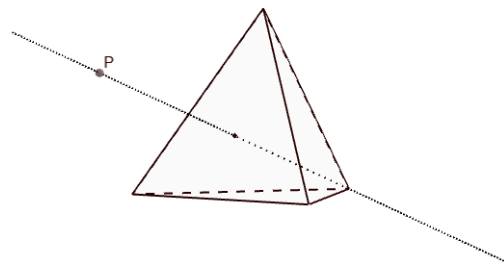


Figura 2: Tetraedro con cariche