

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \log(e^{-x} + 1)$:

- 1) studia f e costruisci il suo grafico $\mathcal{G}_f$;
- 2) dimostra che f è invertibile nel dominio di definizione;
- 3) ricava che il grafico $\mathcal{G}_g$ della funzione $g(x) = -\log(e^x - 1)$ è, nello stesso riferimento xOy , quello della funzione inversa di f ;
- 4) dimostra che la bisettrice del II e IV quadrante ($y = -x$) è l'asintoto obliquo della funzione f ;
- 5) ricava che $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ si intersecano in A la cui ascissa è $\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema 2. Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?

Quesito 1. Dimostra che se una funzione ha derivata sempre nulla è costante.

Quesito 2. Dimostra che la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ammette un solo zero.⁽¹⁾

Quesito 3. Sia

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}_a + \underbrace{\frac{e^\xi x^4}{4!}}_b \quad (1)$$

- i) come sono definiti a e b ?
- ii) se per calcolare $\sqrt[3]{e}$ utilizzo la (1) che errore commetto? (Spiega i calcoli)

Quesito 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

Dimostra che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = 0$.

Problema 3. Data la funzione $k(x) = e^x - 2(x + 1)$:

- 1) dimostra che esistono $\alpha \in [-1, 0]$ e $\beta \in [1, 2]$ tali che $k(\alpha) = k(\beta) = 0$;
- 2) dimostra che α e β sono gli unici zeri della funzione k ;
- 3) stima α a meno di $\frac{1}{100}$.

Problema 1. Nella figura è riportata un'istantanea scattata in una camera a bolle. L'apparecchiatura, come è noto, permette di visualizzare le tracce di particelle che attraversano la camera che è immersa in un campo di induzione magnetico $\vec{B}$. Supponi che il campo $\vec{B}$ sia uniforme e orientato perpendicolarmente alla camera con verso uscente.

- i) Descrivi le forze agenti sulle particelle che attraversano la camera a bolle;
- ii) analizza alcune traiettorie rappresentate, facendo le opportune ipotesi sulla natura delle particelle che hanno generato la traccia.

Un pione π^- ⁽¹⁾ entra con velocità $v = 0.3c$ nella camera a bolle, nell'ipotesi che $|\vec{B}| = 2.0T$:

- i) calcola la legge oraria del moto e ricava l'equazione della traiettoria.

¹ $\exists! \xi : f(\xi) = 0$

¹massa $139.6 \frac{MeV}{c^2}$

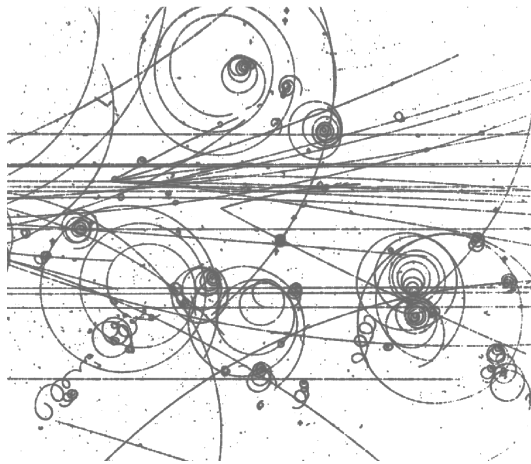
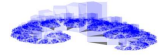
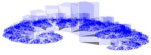
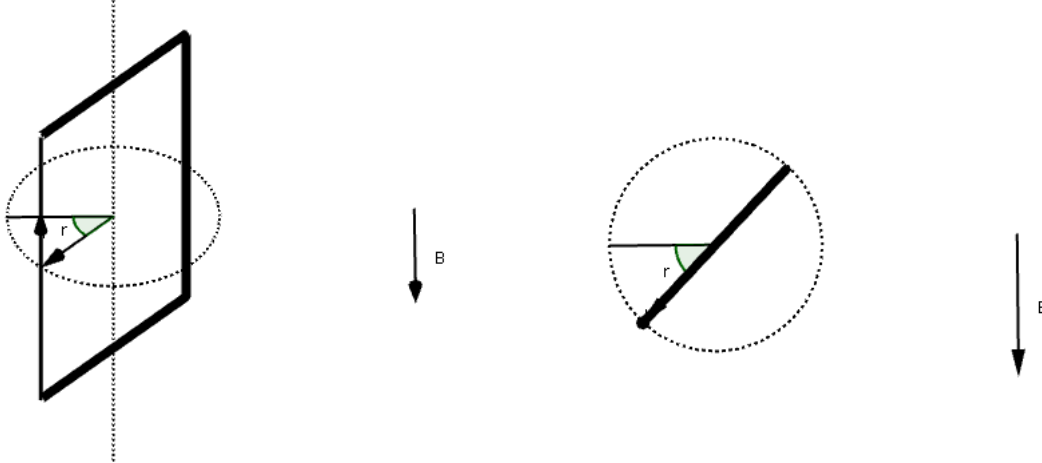
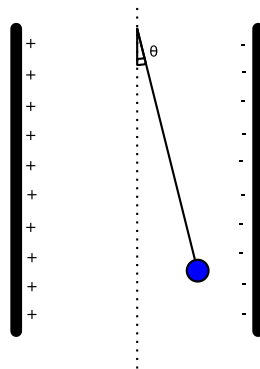


Figura 1: Camera a bolle fonte CERN

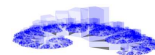
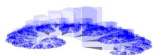
Problema 2. Dopo aver spiegato come si ricava $\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$, calcola il momento delle forze che agiscono sulla spira quadrata di figura, nell'ipotesi che $i = 2.0 \text{ A}$, $B = 0.025 \text{ T}$, $r = 10 \text{ cm}$.



Problema 3. In figura è rappresentato un condensatore piano le cui armature rettangolari hanno, ciascuna, dimensioni 50 cm e 20 cm e sono poste ad una distanza di 10 cm .

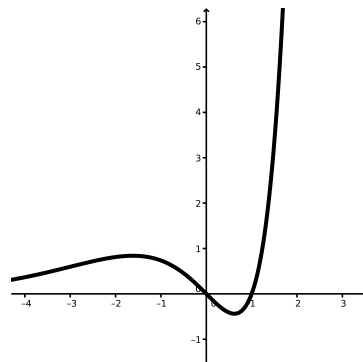


- 1) Calcola la capacità del condensatore;
- 2) sapendo che la massa è in equilibrio calcola il segno e la quantità di carica su di essa presente nell'ipotesi che $m = 20 \text{ g}$, $\ell = 30 \text{ cm}$, $\theta = 6^\circ$ e che hai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale di 25 V .



Problema 4. Dopo aver studiato la funzione $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$, costruisci, motivando con cura i passaggi, la funzione $g(x) = e^{f(x)}$

Problema 5. In figura è riportato il grafico $\mathcal{G}_k$ di una funzione $k(x)$. Proponi una possibile legge per k motivando con cura le scelte.



Quesito 1.

calcola la derivata nello 0 della funzione $t(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Quesito 2. Ricava, utilizzando il teorema della derivata della funzione inversa, $h'(x)$ dove $h(x) = \arcsin(x)$.

Quesito 3. Sia $\mathcal{I}$ l'icosaedro di lato 2, in un opportuno riferimento cartesiano $Oxyz$ le coordinate dei suoi punti si possono così scrivere: $I_{1,2} = \left(1, 0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $I_{3,4} = \left(-1, 0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$I_{5,6} = \left(\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 0\right), I_{7,8} = \left(\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1, 0\right)$$

$$I_{9,10} = \left(0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right), I_{11,12} = \left(0, \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

Sai spiegare come sono state ricavate?

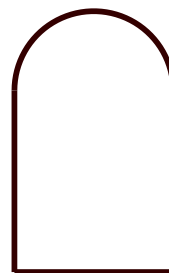
Quesito 4. In quanti modi si può colorare un dodecaedro utilizzando 12 colori?

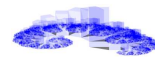
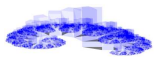
Problema 6. L'interno di un serbatoio, (capacità 32 litri) senza coperchio e dal fondo quadrato, deve essere rivestito di resina sintetica. Quali devono essere le sue dimensioni affinché la quantità di resina utilizzata sia minima?

1 Mateprob

Problema 1. Studia la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{e^{2x}}$. Sia $\mathcal{G}_f$, il suo grafico, calcola l'equazione della tangente a $\mathcal{G}_f$ nel punto in cui la curva interseca l'asse delle ordinate.

Problema 2. Si vuole costruire una finestra rettangolare sormontata da un semicerchio, quali sono le dimensioni della finestra che permettono, a parità di luce (superficie), il minor costo per il telaio (perimetro minimo).

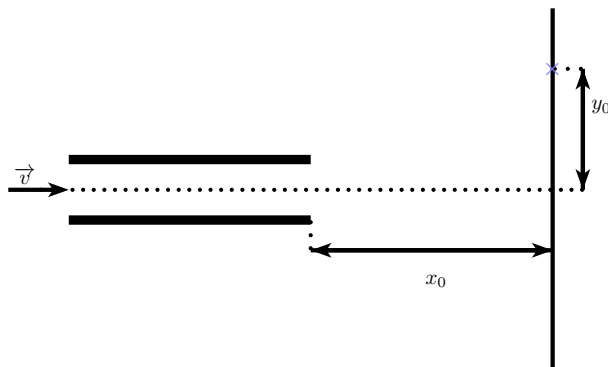




2 $\mathcal{F}$ isprob

Problema 3. Un elettrone in moto rettilineo uniforme con velocità $v = 20 \frac{km}{s}$ attraversa una regione dello spazio dove è presente un campo magnetico $\vec{B}$, $|\vec{B}| = 11 \cdot 10^{-4} T$ perpendicolare alla traiettoria iniziale dell'elettrone. Determinare il raggio, il periodo e la frequenza del moto circolare che la particella stabilisce.

Problema 4. Un pione π^- ^(a) viene iniettato con velocità v , nel condensatore in figura, le cui armature sono quadrate di lato ℓ e poste ad una distanza d . Noti $|\vec{v}|$, x_0 ed y_0 ,



- indica l'armatura positiva;
- calcola l'intensità del campo elettrico fra le armature del condensatore.

^aIn fisica delle particelle il pione, o mesone Pi, è la particella mediatrice dell'interazione forte fra nucleoni. È il più leggero tra i mesoni ed esiste in tre stati: π^- , π^+ , π^0 . Fu il primo mesone ad essere teorizzato nel 1935 da Hideki Yukawa e rilevato nel 1947 nei raggi cosmici; ha carica elettrica: $\pm e$ e massa $139.6 \frac{MeV}{c^2}$

3 Quesiti $\mathcal{M}$ ate $\mathcal{F}$ is

3.1 Uno a scelta

Quesito 1. Siano $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ e $C = (0, 0, -1)$ tre punti dello spazio $\mathcal{S}$ in cui è definito un sistema ortonormale $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- calcola l'equazione del piano $\pi = ABC$;
- calcola il baricentro del triangolo ABC ;
- scrivi l'equazione parametrica e algebrica della retta perpendicolare a π in A ;

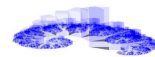
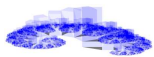
Quesito 2. Data la funzione: $j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ calcola, se esiste la derivata prima di j in $x = 0$.

3.2 Uno a scelta

Quesito 3. Il tema dell'esame di stato prevede 2 problemi e 8 quesiti, il candidato deve svolgere 1 problema e 4 quesiti.

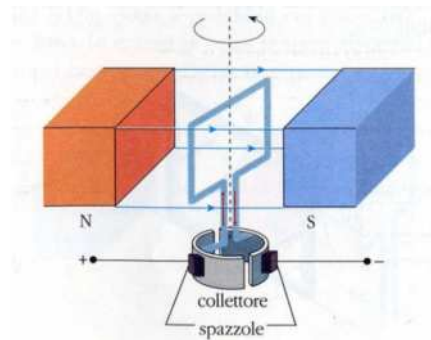
- Quanti sono i possibili compiti diversi?
- In pratica però il candidato deve svolgere al più un problema e al più cinque quesiti. In questa ipotesi quanti sono i compiti diversi?

Quesito 4. Siano $A = (2, 1, 0)$, $B = (1, -1, 3)$, $C = (2, 2, 3)$ e $D = (-8, 2, 2)$ i vertici di un tetraedro, calcola il volume.



3.3 Uno a scelta

Quesito 5. Spiega cosa accade alla spira riportata in figura. La spira rettangolare ha dimensioni a b ed è percorsa da una corrente i , ed immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ uniforme.



Quesito 6. Spiega come, grazie agli esperimenti di J.J. Thomson e R. Millikan si è riusciti a determinare la massa e la carica dell'elettrone

4 Mate prob

Problema 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione la cui legge è $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$. Ricava che:

- a) la retta $x = 2$ è asintoto verticale;
- b) la retta $y = x + 2$ è asintoto obliquo.

Problema 2. Studia la funzione: $g(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

Problema 3. È dato un tetraedro qualunque $VABC$; lo si tagli ad una certa altezza con un piano parallelo alla base ABC in modo che risulti massimo il volume del tetraedro $V'A'B'C'$ avente per base la sezione determinata e il vertice V' in un punto qualunque della base del primo (Vedi figura 2). Ricava il rapporto fra le altezze dei due tetraedri.

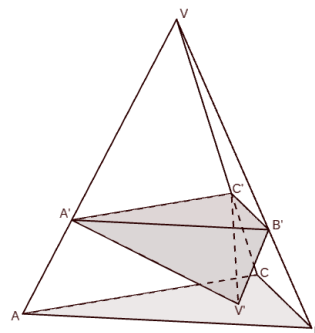


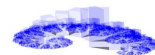
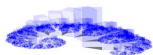
Figura 2: I tetraedri $VABC$ e $V'A'B'C'$

5 Fis prob

Problema 4. Un positrone ⁽¹⁾ entra con velocità v_0 perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico $\vec{B}$ ⁽²⁾ uniforme. Se descrive una traiettoria circolare di raggio 10 cm , quanto vale v_0 ? Se $v_0 = 7.03 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$ quanto vale il modulo della velocità del positrone dopo che ha compiuto un giro completo?

¹ e^+ carica $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$

² $B = 1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$



Problema 5. Un carica $-q$ entra in un campo magnetico descrivendo la traiettoria mostrata in figura 3.

Dopo aver fatto le opportune ipotesi, ricava l'equazione della traiettoria.

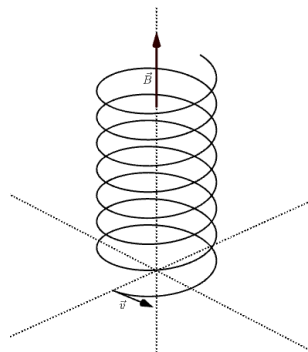


Figura 3: Traiettoria di q

Quesito 1. Maria va in vacanza e chiede ad Anna la sua vicina di casa, la cortesia di innaffiarle la piantina di rose durante la sua assenza. Maria infatti pensa che senza acqua la piantina muoia con probabilità pari a 0.8 mentre se viene innaffiata tale probabilità si riduca a 0.15. La fiducia che Maria ripone sul fatto che Anna effettivamente innaffierà la pianta è pari a 0.9.

- 1) Qual è la probabilità che Maria trovi la piantina viva al ritorno.
- 2) Se invece, al ritorno dal viaggio, la ritrova appassita, qual è la probabilità che Anna si sia dimenticata di innaffiarla?

Quesito 2. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (0, 0, 2)$.

1. Verifica che A , B , C non sono allineati;
2. Determina le equazioni parametriche della retta r passante per A e ortogonale a entrambi i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.
3. Trova le coordinate del punto D tale che $ABDC$ risulti un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).
4. Calcola l'area del triangolo di vertici A, B, C .

