

Problema 1. Data la funzione $f(x) = \log(e^{-x} + 1)$:

- 1) studia f e costruisci il suo grafico $\mathcal{G}_f$;
- 2) dimostra che f è invertibile nel dominio di definizione;
- 3) ricava che il grafico $\mathcal{G}_g$ della funzione $g(x) = -\log(e^x - 1)$ è, nello stesso riferimento xOy , quello della funzione inversa di f ;
- 4) dimostra che la bisettrice del II e IV quadrante ($y = -x$) è l'asintoto obliquo della funzione f ;
- 5) ricava che $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ si intersecano in A la cui ascissa è $\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema 2. Fra tutti i prismi esagonali regolari inscritti nella medesima sfera di raggio di misura r , qual è quello di volume massimo?

Quesito 1. Dimostra che se una funzione ha derivata sempre nulla è costante.

Quesito 2. Dimostra che la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ammette un solo zero.⁽¹⁾

Quesito 3. Sia

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}_a + \underbrace{\frac{e^\xi x^4}{4!}}_b \quad (1)$$

i) come sono definiti a e b ?

ii) se per calcolare $\sqrt[3]{e}$ utilizzo la (??) che errore commetto? (Spiega i calcoli)

Quesito 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

Dimostra che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = 0$.

Problema 3. Data la funzione $k(x) = e^x - 2(x + 1)$:

- 1) dimostra che esistono $\alpha \in [-1, 0]$ e $\beta \in [1, 2]$ tali che $k(\alpha) = k(\beta) = 0$;
- 2) dimostra che α e β sono gli unici zeri della funzione k ;
- 3) stima α a meno di $\frac{1}{100}$.

Problema 1. Considera la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 1}$

- a) studia la funzione;
- b) detta $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ calcola $g'(x)$;
- c) calcola $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^3}$

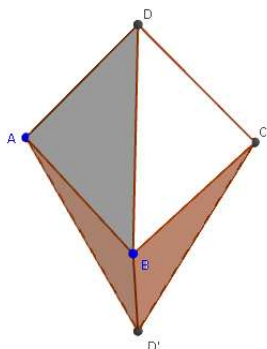


Figura 1: Poliedro formato da sei **triangoli equilateri** di lato $2l$

Quesito 1. Dimostra che la funzione

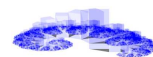
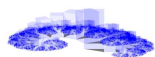
$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log|x| - 1} & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$

Quesito 2. In una moneta truccata, testa esce con probabilità p . Si lancia la moneta due volte. Quanto deve valere p affinché la probabilità che esca due volte croce sia del 50%?

Quesito 3. Considera il solido di figura ???. Costruisci al suo interno il prisma di volume massimo avente per base la sezione del solido ottenuta con un piano parallelo al piano ABC e l'altra simmetrica rispetto lo stesso piano.

¹ $\exists! \xi : f(\xi) = 0$



Quesito 4. Calcola l'angolo diedro formato dai piani BCD e BCD' (figura ??).

Quesito 5. Abbiamo un segmento e lo suddividiamo in tre parti prendendo due punti a caso. Qual è la probabilità che i tre segmenti possano formare un triangolo?

Quesito 6. Sia $h = j^{-1}(1)$, sapendo che: $j(0) = -1$, $j'(0) = 3$ calcola $h'(-1)$.

Quesito 7. Individua i punti del piano di Gauss per cui: $z^2 - (z^*)^2 = i$.

Quesito 8. Determina H e α tali che $A \cos(3x) + B \sin(3x) = H \sin(\alpha + 3x)$

Quesito 9. Dimostra, indicando i teoremi usati, che la seguente disequazione è soddisfatta nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$e^x > \sin x + \cos x$$

Quesito 10. Discuti, indicando i teoremi usati, al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$e^x - x = k$$

Quesito 11. Dimostra, indicando i teoremi usati, che l'equazione

$$\sin x = x - 1$$

ammette una e una sola soluzione in $\xi \in \mathbb{R}$. Stima ξ con quattro cifre significative.

Non solo coppie al lavoro

D'Andrea Modolo Vitale	Gerolami Papapietro	Lazzarin Gabelli	Miotto Marigliano	Pielli Santarossa	Romano Bongiovanni
------------------------------	------------------------	---------------------	----------------------	----------------------	-----------------------

Problema 1. Studia la funzione

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

Quesito 1. Un cono è inscritto in una sfera di raggio R . Determina l'altezza h del cono che minimizza la somma della superficie laterale e della base del cono.

Quesito 2. Un serbatoio a forma di cono (senza coperchio) deve avere un volume di $100\pi \text{ m}^3$. Il costo del materiale è di 20 €/m^2 per la base e 10 €/m^2 per la superficie laterale. Trova le dimensioni che minimizzano il costo.

Quesito 3. In un centralino telefonico arrivano in media 3 chiamate al minuto. Calcola la probabilità che:

- a) In un minuto non arrivi nessuna chiamata.
- b) In 2 minuti arrivino esattamente 4 chiamate.

Quesito 4. Quanti triangoli si possono formare con 8 punti distinti nello spazio, sapendo che 3 di essi sono allineati?

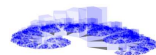
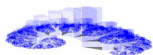
Quesito 5. Dati i punti $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 0, -1)$, e $C = (2, 1, 0)$:

- a) Trova l'equazione del piano passante per i tre punti.
- b) Calcola l'equazione della sfera di centro $O = (0, 0, 0)$ tangente al piano trovato.
- c) Calcola l'equazione della sfera di raggio minimo che passa per A, B, C .

Quesito 6. Sia $f(x) = e^x \cos x$ definita su $[0, \pi]$.

- a) Dimostra che esiste almeno un punto $c \in (0, \pi)$ in cui la tangente alla curva $y = f(x)$ è parallela alla retta secante passante per i punti $(0, f(0))$ e $(\pi, f(\pi))$.

¹ j^{-1} funzione inversa di j



b) Utilizza il Teorema di Lagrange per stimare e^π .

Problema 2. La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni $f(x), g(x)$ e delle loro derivate $f'(x), g'(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-1
-2	0	-3	5	-2
-1	-2	4	6	0
0	1	-1	3	-1
1	-2	-3	-1	-4
2	0	-3	2	1
3	-4	-6	-2	4

a) Calcola nel punto $x_0 = 1$ la derivata della funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$;

b) calcola nel punto $x_0 = 0$ la derivata della funzione composta $f(g(x))$;

c) calcola nel punto $x_0 = -1$ la derivata della funzione quoziente $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Quesito 7. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3^{\sin^2 x} - 1}{x \operatorname{tg} x} & \text{se } x < 0 \\ \log(1 + \sqrt{a+x}) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

trova $a \in \mathbb{R}$ per cui f è continua nello 0.