

Problema 1. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali sono fissati due punti $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ con $0 < a < b$. Ricava il punto P del semiasse positivo delle ascisse per il quale risulta massimo l'angolo $\widehat{APB}$. Come devono essere scelti A e B affinché tale angolo misuri $\frac{\pi}{4}$?

Quesito 1. Determina per quali valori di α la disuguaglianza $(1+x)^\alpha > 1+x^\alpha$ è verificata nel dominio di definizione.

Problema 2. Studia la funzione

$$f(x) = x \log \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

Problema 3. Un'urna A contiene n palline tutte Rosse. Un'urna B contiene r palline Rosse ed $n-r$ Nere. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una serie di estrazioni con rimpiazzo.

- Qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa;
- qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi;
- quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa.
- Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna scelta sia A ? Supponiamo che $n = 12$ e $r = 4$, quanto grande dovrà essere k perché si possa concludere che l'urna scelta è proprio A con una probabilità del 99%?

Problema 4. Siano Γ la sfera di raggio $\sqrt{3}$ e centro nel punto $C = (1, 1, 1)$; r la retta per l'origine di direzione $B - A$ ($A = (1, 0, 0)$ $B = (0, 1, 1)$):

- individuare le coordinate del punto $D = r \cap \Gamma$;
- calcola l'equazione parametrica della retta DC ;
- calcola l'angolo che la retta DC forma con il piano xy .

Problema 1. Data la funzione $f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^6}}{x}$

- calcola il limite a $\pm\infty$, motivando con cura il calcolo;
- calcola l'equazione dell'asintoto obliquo, spiegando l'origine delle formule usate.

Problema 2. Data la funzione $f_3(x) = \frac{\sqrt{1+\log(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$

- indica il dominio di $f_3(\cdot)$;
- calcola i limiti nei punti di discontinuità;
- calcola la derivata prima.

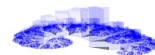
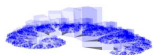
Quesito 1. Spiega come si è ricavata la formula del numero delle combinazioni di n elementi presi k a k ($C_{n,k} = \binom{n}{k}$)

Quesito 2. Calcola in $\mathbb{C}$ le radici dell'equazione $z^4 - 2i = 0$.

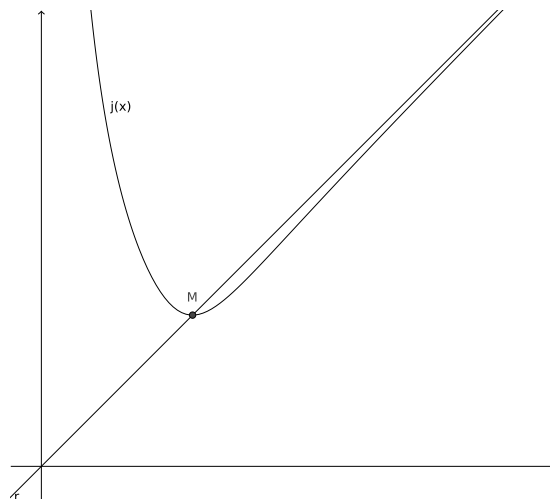
Quesito 3. Dopo aver scritto l'equazione in forma parametrica delle rette AB ($A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, 0, 0)$) e CD ($C = (-1, -1, 0)$, $D = (1, 0, 3)$), verifica che sono sghembe.

Problema 1. Data la funzione $f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}}{x}$

- calcola, se esistono, i limiti a $\pm\infty$, motivando con cura il calcolo;
- verifica che la funzione ha come asintoto obliquo la bisettrice del I e III quadrante. Spiega come è stata ricavata la formula per il calcolo dell'asintoto obliquo.



Problema 2. In figura 1 è riportato il grafico $(\mathcal{G}(j))$ della funzione $j(x)$ e della retta r suo asintoto obliquo. Spiega, qualora ti fosse nota la legge di j , come potresti dimostrare che la retta r , nel semipiano delle ascisse positive, non ha altre intersezioni con il grafico di j oltre a M .

Figura 1: $\mathcal{G}(j)$ e r

Problema 3. Data la funzione $f_3(x) = \frac{\sqrt{\log(x) + 2}}{\sqrt{1 - x^4}}$

i) indica il dominio di $f_3(\cdot)$;

ii) quali fra i seguenti limiti si possono calcolare:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x)$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x)$;

(e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f_3(x)$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x)$;

(d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e^2}} f_3(x)$;

motiva dettagliatamente la risposta, indicando in particolare in quali casi l'operatore limite è stato usato anche se la funzione in quel punto risulta già definita continua.

iii) calcola $f'_3(x)$.

Problema 1. Sia $\tilde{f} : \left[-1, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ la cui legge è $\tilde{f}(x) = |x^3 - x^2|$, dimostra che $\tilde{f} \in C^2_{\left[-1, \frac{1}{2}\right]} \text{ } ^{(1)}$

Considera ora la funzione $g(x) = e^{x^2 - x^3}$

a) studia la funzione fino a determinare i massimi e minimi relativi;

b) senza studiare la derivata seconda, indica, motivando la risposta, quanti sono e dove sono posizionati i flessi.

Problema 2. Nella regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = x - \frac{x^2}{2}$ e l'asse delle ascisse, considera un trapezio isoscele $OABC$, avente come base maggiore il segmento di vertici $O = (0, 0)$ e $A = (2, 0)$ e come base minore i punti C, D appartenenti alla parabola.

Determina le coordinate del punto C , per cui il volume del solido ottenuto da una rotazione di 2π del trapezio, attorno all'asse delle ascisse, è massimo.

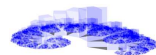
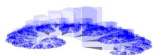
1 Quesiti

Quesito 1. Spiega perché alla funzione $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |1 - x^2|$, non è applicabile il teorema di Rolle.

Ricava una restrizione di f in cui è possibile applicare il teorema.

Quesito 2. Da un rilevamento statistico è noto che una certa popolazione è composta per il 40% da fumatori abituali. È noto inoltre che il 5% dei decessi avviene a causa di un certo tipo di tumore. Infine, si è constatato che tra quanti sono deceduti a causa di quel tipo di tumore il 60% erano fumatori abituali. Calcolare la probabilità per i fumatori abituali di morire per un tumore di quel tipo.

¹ C^2 l'insieme delle funzioni derivabili due volte con continuità nell'insieme indicato a pedice



Quesito 3. Dati nello spazio il piano $\pi : kx + 2y - (3 + k)z + 41 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ determina, se esistono, i valori di k e per i quali:

- a) r è incidente a π ; b) r è parallela a π ; c) r è perpendicolare a π .

Problema 3. In un tetraedro $ABCD$ le facce ABC e CDA sono triangoli rettangoli ($\widehat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{D} = \frac{\pi}{2}$), detti M ed N i punti medi dei segmenti BD e AC , si ha che $AM = MC$. Dimostra che MN è il segmento di minima distanza fra AC e BD .

Quesito 1. Verificare che la funzione: $f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione: $g(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

Quesito 2. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione: $\alpha \quad x - 3y + z - 5 = 0$ e $\beta \quad x + 2y - z + 3 = 0$. Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x - y + z + 1 = 0$.

Quesito 3. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

Quesito 4. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$ e il piano π di equazione: $x + 2y - z + 2 = 0$, determinare per quale valore di k la retta r e il piano π sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Quesito 5. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico $\mathcal{G}_f$ di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.