

Mini corso geometria solida

info@joaogas.it

13 gennaio 2012



- 1 Indice
- 2 Premessa
- 3 Per iniziare un po' di teoria
 - Dal piano allo spazio
 - Semipiani semispazi, angoli e diedri
 - Angoloidi
 - Alla ricerca delle proprietà dei poliedri
 - Le proprietà in sintesi
- 4 I poliedri ... in "pratica"
 - Arrivano p e q
- 5 Al lavoro!!!
- 6 Problema guidato
- 7 C'è da lavorare
 - Soluzioni
- 8 Riferimenti Biblio-Sitografici



Cosa faccio in questo mini-corso

- introduco in modo rapido e "sportivo" la geometria dello spazio
- cerco di ricavare alcuni importanti risultati sui i poliedri
- applico i risultati trovati a problemi relativi la classificazione e costruzione di poliedri particolari (*regolari, uniformi, quasi-regolari*)

Cosa **non** faccio in questo mini-corso

- un corso "serio" di geometria solida
- dimostrazioni dettagliate

Materiali . . . oggi

- questa premessa
- formule importanti e problemi assegnati
- soluzione
- bibliografia e sitografia
- . . . *se avanza tempo e comunque per casa*



Dal piano allo spazio

- **Piano** dati due punti nel piano esiste una sola retta a cui questi punti appartengono
- **Spazio** dati tre punti dello spazio non allineati, esiste un solo piano a cui questi punti appartengono
- **Piano** le rette del piano possono essere incidenti o parallele
- **Spazio** nello spazio le rette possono essere incidenti parallele o sghembe.
le rette incidenti e parallele sono complanari



Dal piano allo spazio

- **Piano** dati due punti nel piano esiste una sola retta a cui questi punti appartengono
- **Spazio** dati tre punti dello spazio non allineati, esiste un solo piano a cui questi punti appartengono
- **Piano** le rette del piano possono essere incidenti o parallele
- **Spazio** nello spazio le rette possono essere incidenti parallele o sghembe.
le rette incidenti e parallele sono complanari



Dal piano allo spazio

- **Piano** dati due punti nel piano esiste una sola retta a cui questi punti appartengono
- **Spazio** dati tre punti dello spazio non allineati, esiste un solo piano a cui questi punti appartengono
- **Piano** le rette del piano possono essere incidenti o parallele
- **Spazio** nello spazio le rette possono essere incidenti parallele o sghembe.
le rette incidenti e parallele sono complanari



Dal piano allo spazio

- **Piano** dati due punti nel piano esiste una sola retta a cui questi punti appartengono
- **Spazio** dati tre punti dello spazio non allineati, esiste un solo piano a cui questi punti appartengono
- **Piano** le rette del piano possono essere incidenti o parallele
- **Spazio** nello spazio le rette possono essere incidenti parallele o sghembe.
le rette incidenti e parallele sono complanari



Semipiani semispazi, angoli e diedri

- **definizione di angolo nel piano** l'intersezione di due semipiani
- **definizione di diedro nello spazio** l'intersezione di due semispazi

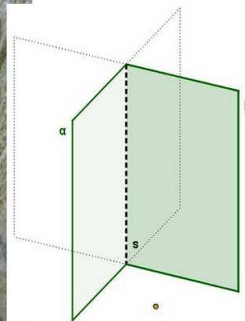


Semipiani semispazi, angoli e diedri

- **definizione di angolo nel piano** l'intersezione di due semipiani
- **definizione di diedro nello spazio** l'intersezione di due semispazi

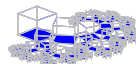
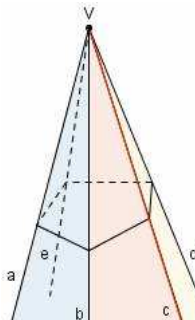


Diedro ...



Angoloide

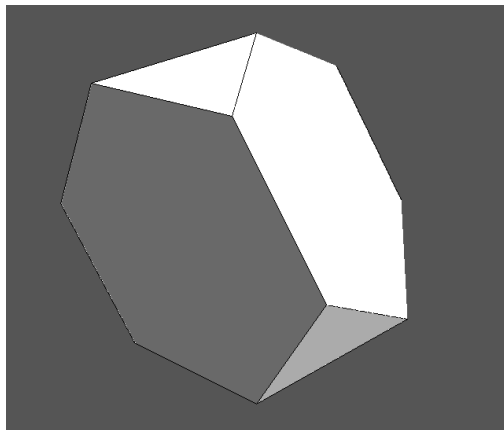
definizione di Angoloide date in un certo ordine n semirette aventi origine comune, a tre a tre non complanari, e tale che il piano individuato da due semirette consecutive lasci tutte le altre da una stessa parte. L'intersezione degli n semispazi che hanno per origine quei piani e che contengono le $n - 2$ semirette restanti è detto **Angoloide**



...vai col gesso



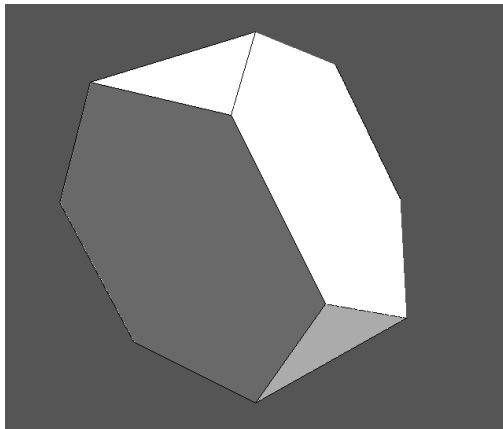
Prime definizioni . . . semplici proprietà



- **V** numero vertici
- **F** numero facce
- **S** numero spigoli
- $\sum \alpha_i < 2\pi V$



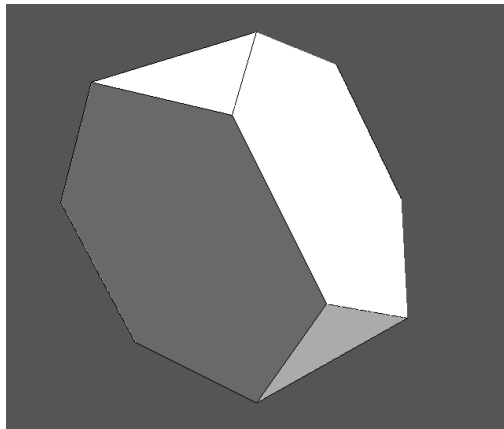
Prime definizioni . . . semplici proprietà



- **V** numero vertici
- **F** numero facce
- **S** numero spigoli
- $\sum \alpha_i < 2\pi V$



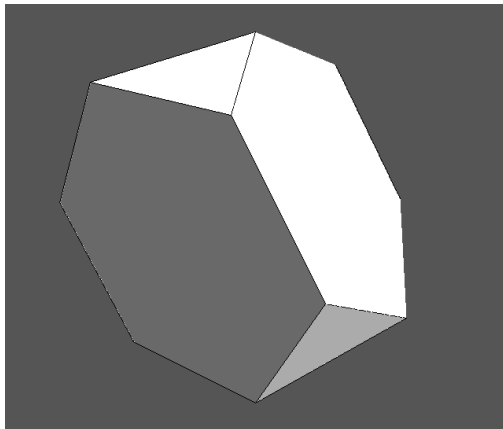
Prime definizioni . . . semplici proprietà



- **V** numero vertici
- **F** numero facce
- **S** numero spigoli
- $\sum \alpha_j < 2\pi V$



Prime definizioni . . . semplici proprietà



- **V** numero vertici
- **F** numero facce
- **S** numero spigoli
- $\sum \alpha_i < 2\pi V$



Alla ricerca delle proprietà dei poliedri . . . intanto i poligoni

Due interessanti proprietà dei poligoni convessi di n lati:

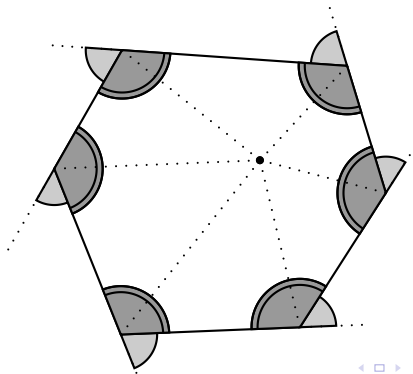
$$\sum Angolo_{interno} = \pi(n - 2) \quad \sum Angolo_{esterno} = 2\pi$$



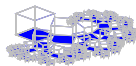
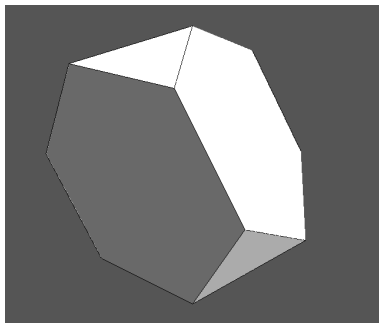
Alla ricerca delle proprietà dei poliedri ... intanto i poligoni

Due interessanti proprietà dei poligoni convessi di n lati:

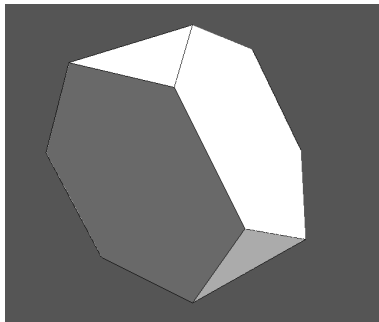
$$\sum Angolo_{interno} = \pi(n - 2) \quad \sum Angolo_{esterno} = 2\pi$$



Alla ricerca delle proprietà dei poliedri



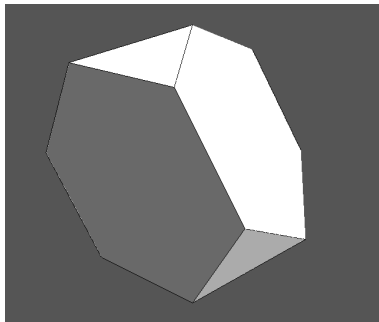
Alla ricerca delle proprietà dei poliedri



$$\sum \alpha_i = \sum_{i=1}^F \pi (l_i - 2)$$



Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

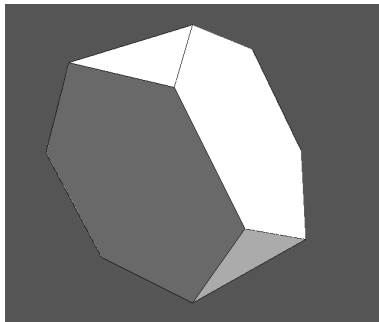


$$\sum \alpha_i = \sum_{i=1}^F \pi (l_i - 2)$$

$$\sum \alpha_i = \pi \sum_{i=1}^F l_i - 2\pi F$$



Alla ricerca delle proprietà dei poliedri



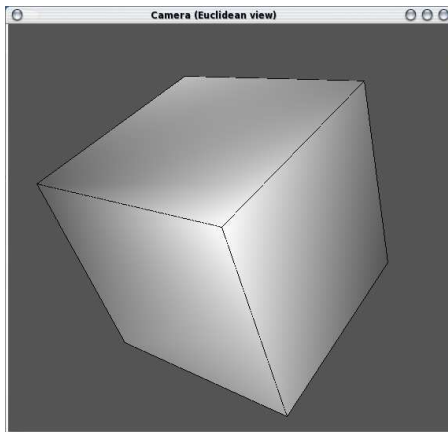
$$\sum \alpha_i = \sum_{i=1}^F \pi (l_i - 2)$$

$$\sum \alpha_i = \pi \sum_{i=1}^F l_i - 2\pi F$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi S - 2\pi F = 2\pi (S - F)$$

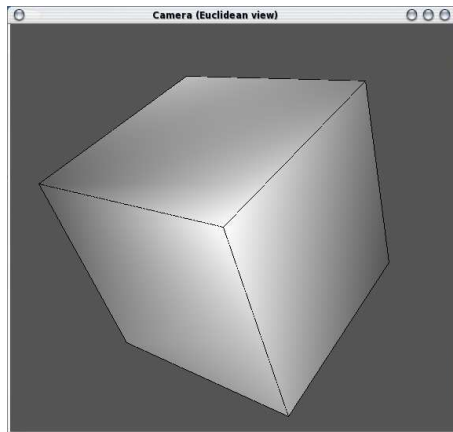


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

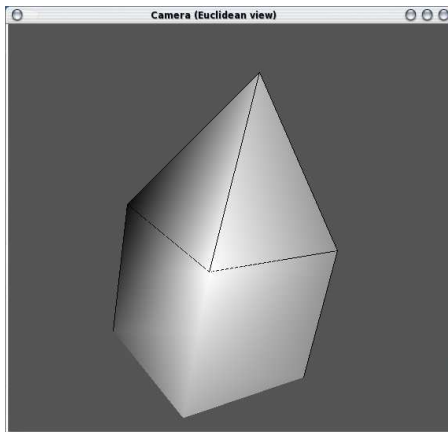


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

poliedro	$\sum \alpha_i$	$2\pi V$
cubo	12π	16π

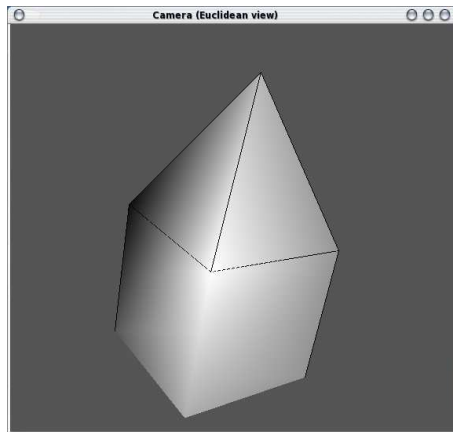


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

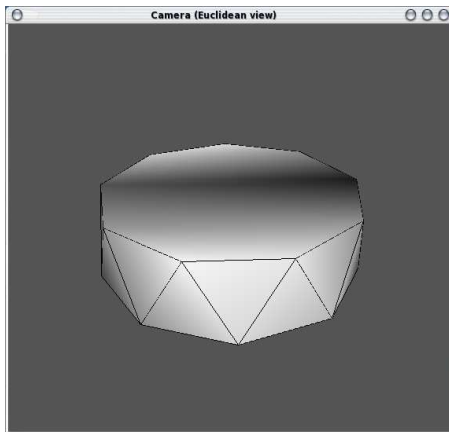


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

poliedro	$\sum \alpha_i$	$2\pi V$
cubo	12π	16π
torre	14π	18π

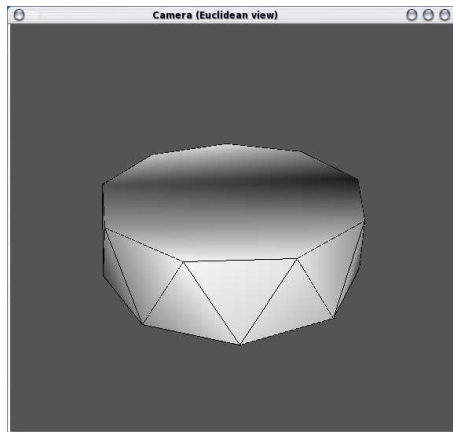


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

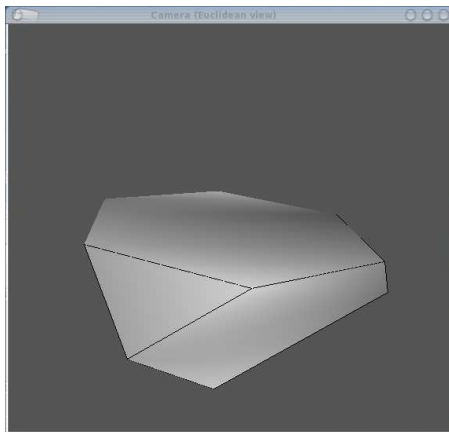


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

poliedro	$\sum \alpha_i$	$2\pi V$
cubo	12π	16π
torre	14π	18π
10-prisma	36π	40π

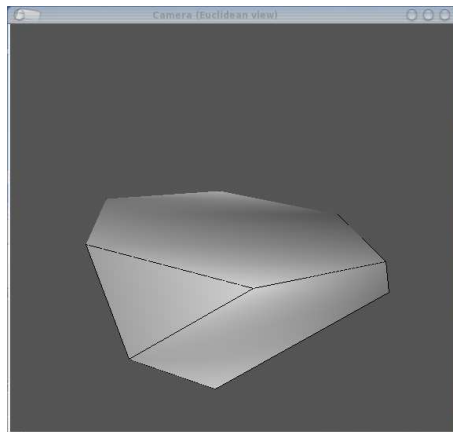


Alla ricerca delle proprietà dei poliedri



Alla ricerca delle proprietà dei poliedri

poliedro	$\sum \alpha_i$	$2\pi V$
cubo	12π	16π
torre	14π	18π
10-prisma	36π	40π
sezione	16π	20π



Formula di Eulero

$$\sum \alpha_i = 2\pi(S - F)$$



Formula di Eulero

$$\sum \alpha_i = 2\pi(S - F)$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$



Formula di Eulero

$$\sum \alpha_i = 2\pi(S - F)$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

Formula di Eulero

$$F + V - S = 2$$



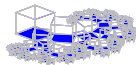
p e q

Sia p il numero medio dei lati dei poligoni che formano le facce del poliedro

$$p = \frac{2S}{F}$$

Sia q (*valenza*) il numero medio degli spigoli che concorrono su di un vertice

$$q = \frac{2S}{V}$$



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre



Alcune proprietà generali dei poliedri

- dato che $F = \frac{2S}{p}$ e $V = \frac{2S}{q}$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$
- $p \geq 3$ e $q \geq 3$
- in ogni poliedro c'è almeno un triangolo o un vertice di valenza tre

$$p \geq 4 \wedge q \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$$



Teoremini sui poliedri

- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$
- $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$, $(p - 2)F = 2V - 4$,
 $(q - 2)V = 2F - 4$
- non esiste un poliedro con sette spigoli



Teoremini sui poliedri

- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$
- $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$, $(p - 2)F = 2V - 4$,
 $(q - 2)V = 2F - 4$
- non esiste un poliedro con sette spigoli



Teoremini sui poliedri

- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$
- $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$, $(p - 2)F = 2V - 4$,
 $(q - 2)V = 2F - 4$
- non esiste un poliedro con sette spigoli



Teoremini sui poliedri

- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$
- $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$, $(p - 2)F = 2V - 4$,
 $(q - 2)V = 2F - 4$
- non esiste un poliedro con sette spigoli



Teoremini sui poliedri

- $F \leq 2V - 4$ e $V \leq 2F - 4$
- $pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$, $(p - 2)F = 2V - 4$,
 $(q - 2)V = 2F - 4$
- non esiste un poliedro con sette spigoli

$S = 7$ $F + V = 9$, quindi primo caso $F = 5 \wedge V = 4$

utilizzando $F \leq 2V - 4$ si ha $5 \leq 2 \cdot 4 - 4 = 4$

secondo caso $F = 4 \wedge V = 5$:

utilizzando $V \leq 2F - 4$ si ha $5 \leq 2 \cdot 4 - 4 = 4$



Costruire poliedri

I poliedri regolari: facce poligoni regolari uguali; valenza fissa:

$$p = 3, q = 3$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = 2$$



Costruire poliedri

I poliedri regolari: facce poligoni regolari uguali; valenza fissa:

$$p = 3, q = 3$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 6, F = 4, V = 4$$



Costruire poliedri

I poliedri regolari: facce poligoni regolari uguali; valenza fissa:

$$p = 3, q = 3$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 6, F = 4, V = 4$$

$$p = 3, q = 4$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{4} - S = 2$$



Costruire poliedri

I poliedri regolari: facce poligoni regolari uguali; valenza fissa:

$$p = 3, q = 3$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 6, F = 4, V = 4$$

$$p = 3, q = 4$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{4} - S = 2$$

$$S = 12, F = 8, V = 6$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$

$$S = 30, F = 20, V = 12$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$

$$S = 30, F = 20, V = 12$$

$$p = 4, q = 3$$

$$\frac{2S}{4} + \frac{2S}{3} - S = 2$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$

$$S = 30, F = 20, V = 12$$

$$p = 4, q = 3$$

$$\frac{2S}{4} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 12, F = 6, V = 8$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$

$$S = 30, F = 20, V = 12$$

$$p = 4, q = 3$$

$$\frac{2S}{4} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 12, F = 6, V = 8$$

$$p = 5, q = 3$$

$$\frac{2S}{5} + \frac{2S}{3} - S = 2$$



Costruire poliedri

$$p = 3, q = 5$$

$$\frac{2S}{3} + \frac{2S}{5} - S = 2$$

$$S = 30, F = 20, V = 12$$

$$p = 4, q = 3$$

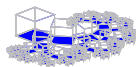
$$\frac{2S}{4} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 12, F = 6, V = 8$$

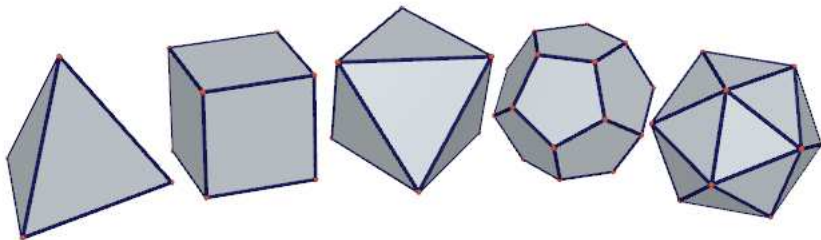
$$p = 5, q = 3$$

$$\frac{2S}{5} + \frac{2S}{3} - S = 2$$

$$S = 30, F = 12, V = 20$$



I poliedri regolari



I poliedri uniformi

I poliedri uniformi: facce poligoni regolari; valenza fissa:
osservazioni preliminare: il tipo di poliedro viene indicato da una n -upla (p_1, p_2, \dots, p_q) dove p_i indica il numero dei lati dei poligoni che concorrono su un generico vertice.
Esempio: dodecaedro $(5, 5, 5)$



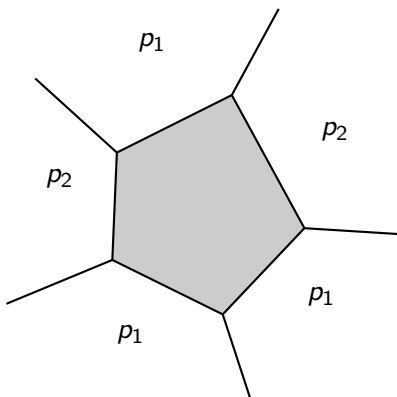
I poliedri uniformi

se un poliedro ha valenza 3 e uno dei p_k è dispari allora gli altri due poligoni sono uguali



I poliedri uniformi

se un poliedro ha valenza 3 e uno dei p_k è dispari allora gli altri due poligoni sono uguali



Un esempio ... noto

Un oggetto "interessante" ... il "vecchio" pallone da calcio



numero esagoni E
numero pentagoni P
 $q = 3$



Un esempio . . . noto



- il pallone da calcio è, con le convenzioni usate, $(5, 6, 6)$
- osserviamo che essendo la valenza 3, con un pentagono, gli altri due poligoni sono uguali



Un esempio . . . noto



- il pallone da calcio è, con le convenzioni usate, $(5, 6, 6)$
- osserviamo che essendo la valenza 3, con un pentagono, gli altri due poligoni sono uguali



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$

... calcoli ▶ Pallone



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$

... calcoli ► Pallone $V = 60$



Quanti sono E e P?

formule utili:

$$F + V - S = 2$$

$$\sum \alpha_i = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

... calcoli $P = 12$

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$

... calcoli ▶ Pallone $V = 60 \quad V = \frac{2S}{q} \Rightarrow S = 90$



formule utili:

$$\sum \alpha_j = 2\pi V - 4\pi$$

$$\frac{2S}{p} + \frac{2S}{q} - S = 2$$

$$E + P + \frac{5P + 6E}{3} - \frac{5P + 6E}{2} = 2$$

...calcoli $P = 12$

$$\sum \alpha_i = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{3}{5}\pi \right) V = 2\pi V - 4\pi$$

...calcoli ▶ Pallone $V = 60 \quad V = \frac{2S}{q} \Rightarrow S = 90$

$$F = 32 \Rightarrow E = 20$$



Quanti sono, e come sono fatti i poliedri uniformi?

- determinare il **numero** dei poliedri uniformi
- scriverli nella forma (p_1, p_2, \dots, p_q)
- calcolare per ciascuno F , V ed S
- calcolare il numero delle specifiche facce



Quanti sono, e come sono fatti i poliedri uniformi?

- determinare il **numero** dei poliedri uniformi
- scriverli nella forma (p_1, p_2, \dots, p_q)
- calcolare per ciascuno F , V ed S
- calcolare il numero delle specifiche facce



Quanti sono, e come sono fatti i poliedri uniformi?

- determinare il **numero** dei poliedri uniformi
- scriverli nella forma (p_1, p_2, \dots, p_q)
- calcolare per ciascuno F , V ed S
- calcolare il numero delle specifiche facce



Quanti sono, e come sono fatti i poliedri uniformi?

- determinare il **numero** dei poliedri uniformi
- scriverli nella forma (p_1, p_2, \dots, p_q)
- calcolare per ciascuno F , V ed S
- calcolare il numero delle specifiche facce



Caratteristiche dei poliedri uniformi

prisma $P_n (4, 4, n)$; antiprisma $P'_n (3, 3, 3, n)$

q	poliedro	V	S	F	facce specifiche
3	(3, 6, 6)	12	18	8	$T = 3, E = 6$
	(3, 8, 8)	24	36	14	$T = 8, O = 6$
	(3, 10, 10)	60	90	32	$T = 20, D = 12$
	(4, 6, 6)	24	36	14	$E = 8, Q = 6$
	(4, 6, 8)	48	72	26	$E = 8, Q = 12, O = 6$
	(4, 6, 10)	120	180	62	$Q = 40, E = 20, D = 12$
	(5, 6, 6)	60	90	32	$P = 12, E = 20$
4	(3, 4, 3, 4)	12	24	14	$T = 8, Q = 6$
	(3, 4, 4, 4)	24	48	26	$T = 8, Q = 18$
	(3, 5, 3, 5)	30	60	32	$T = 8, P = 12$
	(3, 4, 5, 4)	60	120	62	$T = 20, P = 12, Q = 30$
5	(3, 3, 3, 3, 4)	24	60	38	$T = 32, Q = 6$
	(3, 3, 3, 3, 5)	60	150	92	$T = 80, P = 12$



Quanti sono ...

Consegna:

- determinare il **numero** dei poliedri non regolari costruiti con poligoni regolari uguali ma con valenza non costante
- calcolare per ciascuno F , V ed S



Quanti sono ...

Consegna:

- determinare il **numero** dei poliedri non regolari costruiti con poligoni regolari uguali ma con valenza non costante
- calcolare per ciascuno F , V ed S



Bibliografia e Sitografia



Maria Dedò, *Forme*, Zanichelli



George Polya, *La scoperta matematica*, Feltrinelli



L. Cateni R. Fortini C. Bernardi, *Il nuovo pensiero geometrico*,
Le Monnier



<http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros-e.htm>



<http://mathworld.wolfram.com/topics/PlatonicSolids.html>





► Presentazione

