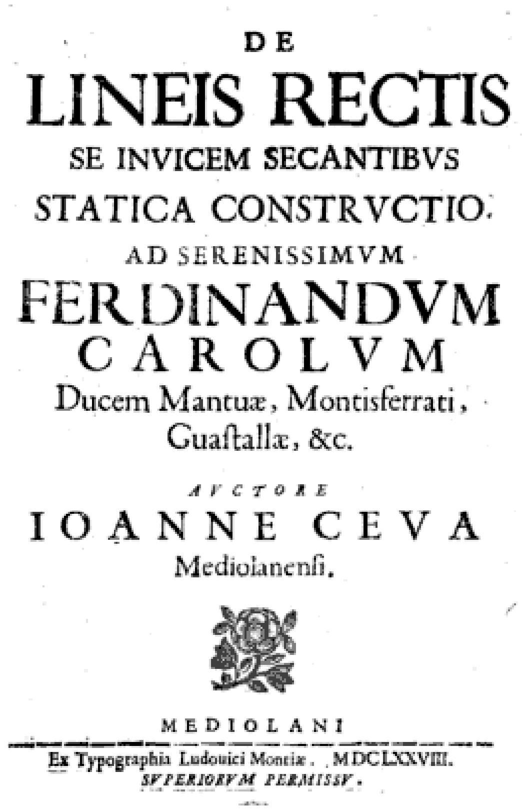
Appunti della lezione del prof. Giuseppe Bruno
sabato 7 febbraio 2009

Preparazione alle gare di matematica

I teoremi di Ceva

Giovanni Ceva: nasce il 7 dicembre 1647 a Milano fu educato a milano in una scuola di gesuiti, frequentò gli studi universitari a Pisa, divenuto professore di matematica lavorò presso l'Università di Mantova. Si interessò di geometria, pubblicò nel 1678 un trattato " ***De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio***" in cui espose i teoremi qui riportati. Diede anche importanti contributi nello studio di problemi di idraulica. Morì a Mantova il 15 giugno 1734.



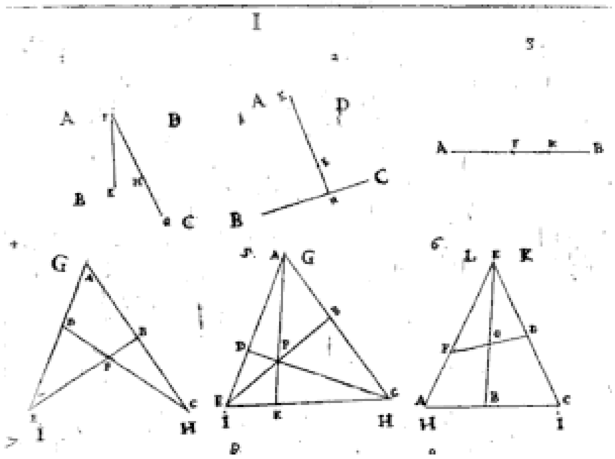
DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guaſtallæ, &c.
AVCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanenſi.

MEDIOLANI
Ex Typographia Ludouici Montiæ. MDCLXXVIII.
SVPERIORVM PERMISSV.

8 STATICÆ CONSTRVCTIONIS

tab. 1. fig. 4. Dentur igitur primò duæ rationes EF ad FB, & CF ad FI prior ſit vt 2 ad 1, altera autem vt 3 ad 2; debemus modo manifeſtare reliquas duas rationes CB ad BA, & ED ad DA.

Quoniam pondus B (aggregatum videlicet ex AC) ad C eſt (ex præmiſſo tertio lemmate) vt recta AC ad AB: componitur verò ratio ponderis B ad C ex rationibus ponderum B ad F, & F ad C: vt verò B ad F, ita EF ad EB, & vt F ad C, ita DC ad DF; erit ratio AC ad AB compoſita ex rationibus EF ad EB, & DC ad DF: quoniam verò EF ad FB eſt vt 2 ad 1, componendo autem, indè per conuerſionem rationis, & conuertendo, EF ad EB eſt vt 2 ad 3, fuitque etiam CF ad FD, vt 3 ad 2, & componendo CD ad FD, vt 5 ad 2; erit recta AC ad AB compoſita ex rationibus 2 ad 3, & 5 ad 2, ſeu ex his, 2 ad 3, & 3 ad 1 $\frac{4}{5}$; hoc eſt eadem AC ad AB, vt 2 ad 1 $\frac{1}{5}$, ſeu vt 10 ad 6; quare diuidendo erit CB ad BA, vt 4 ad 6, ſeu vt 2 ad 3. Eadem ratione, quia pondus D ad E, componitur ex rationibus ponderum D ad F, & F ad E, rectarum vid. CF ad CD, atque EB ad BF; idem pondus D ad E, hoc eſt AE ad DA componetur ex rationibus 3 ad 5, & 3 ad 1: ex his verò rationibus componitur illa 3 ad 1 $\frac{2}{3}$, hoc eſt 9 ad 5; ergo AE ad DA eſt vt 9 ad 5, ſed diuidendo ED ad DA erit vt 4 ad 5, eſt ergo CB ad BA, vt 2 ad 3, & ED ad DA, vt 4 ad 5, quod erat faciendum.

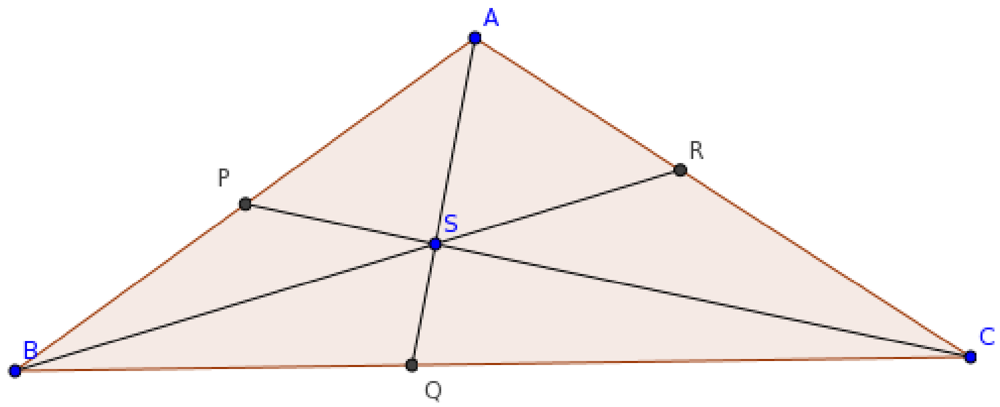


http://books.google.it/

Definizione: un segmento che congiunge un vertice di un triangolo con un punto qualsiasi del lato opposto è detto **segmento ceviano** o semplicemente **ceviana.**

Definizione: tre rette o tre segmenti si dicono **concorrenti** se passano per lo stesso punto.

Teorema di Ceva



Sia ABC un generico triangolo, costruite le ceviane AQ, BR e CP, se le ceviane sono concorrenti si ha che: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$

Dimostrazione: si utilizza la seguente proprietà: le aree di triangoli con altezze congruenti sono proporzionali. Consideriamo il lato BC applicando la precedente proprietà si ha:

$\frac{BQ}{QC}=\frac{Area_{ABQ}}{Area_{AQC}}=\frac{Area_{SBQ}}{Area_{SQC}}=\frac{Area_{ABQ}-Area_{SBQ}}{Area_{AQC}-Area_{SQC}}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}}$ procedendo in modo analogo sui lati CA e AB si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{CR}{RA}=\frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}}\quad,\quad\frac{AP}{PB}=\frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}}$$

Moltiplicando membro a membro le tre eguaglianze ricavate si ha:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}}\cdot\frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}}\cdot\frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}}=1\quad\text{q.e.d.}$$

Teorema di Ceva inverso

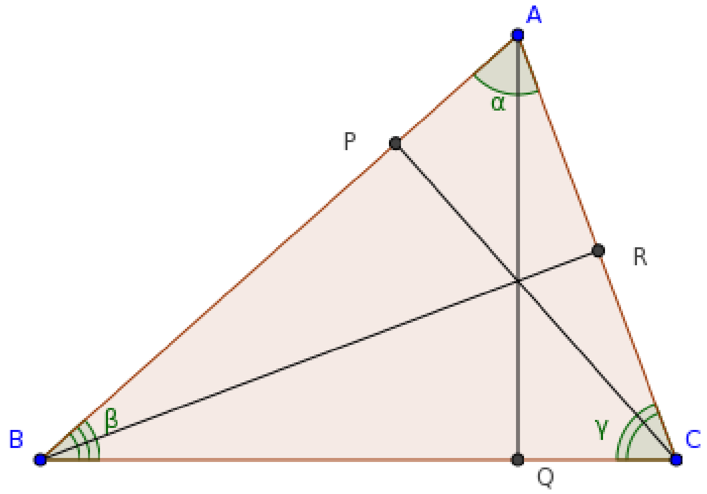
Se tre ceviane AQ, BR, CP sodisfano alla relazione: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$ allora sono concorrenti.

Dimostrazione: si ragiona per assurdo; supponiamo che esista un punto $P'\neq P$ tale che, se le prime due ceviane si intersecano in S, la ceviana CP' passa per S. Si ha quindi:
$\frac{AP'}{P'B}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$ ma essendo $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$ segue che $\frac{AP'}{P'B}=\frac{AP}{PB}$ da cui $P'=P$ assurdo.

Applicazioni dei teoremi di Ceva

In base al teorema di Ceva segue immadiatamente che le **mediane di un triangolo sono concorrenti** in un punto (il baricentro). Infatti, essendo in questo caso P, Q ed R i punti medi dei lati del triangolo ABC, si ha: AP=PB, BQ=QC e CR=RA e quindi $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$

Dimostriamo ora che **le altezze di un triangolo** (pure loro ceviane) **sono concorrenti** (ortocentro)

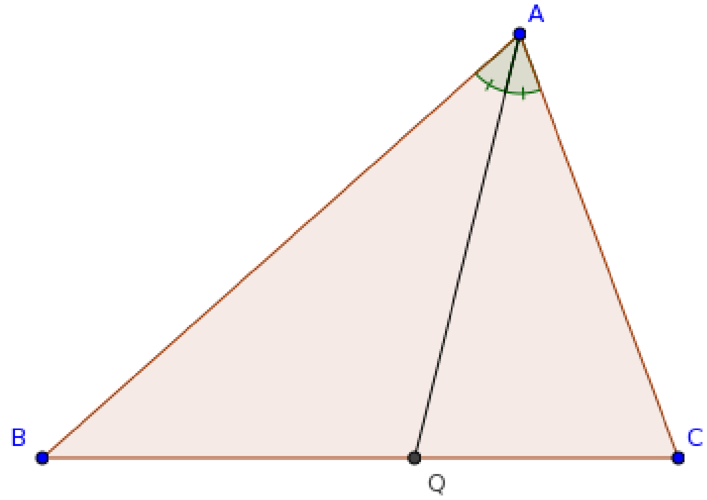


Come è noto risulta: $AP = AC\cos\alpha$, $PB = BC\cos\beta$, $BQ = AB\cos\beta$, $QC = AC\cos\gamma$, $CR = BC\cos\gamma$ $RA = AB\cos\alpha$ sostituendo quanto ricavato nel prodotto $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}$ si ottiene: $\frac{AC\cos\alpha}{BC\cos\beta}\cdot\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\gamma}\cdot\frac{BC\cos\gamma}{AB\cos\alpha}=1$

<u>Attenzione</u>: *poiché l'ortocentro può essere esterno al triangolo si segnala che il teorema di Ceva rimane valido anche quando le ceviane intersecano i prolungamenti dei lati del triangolo.*

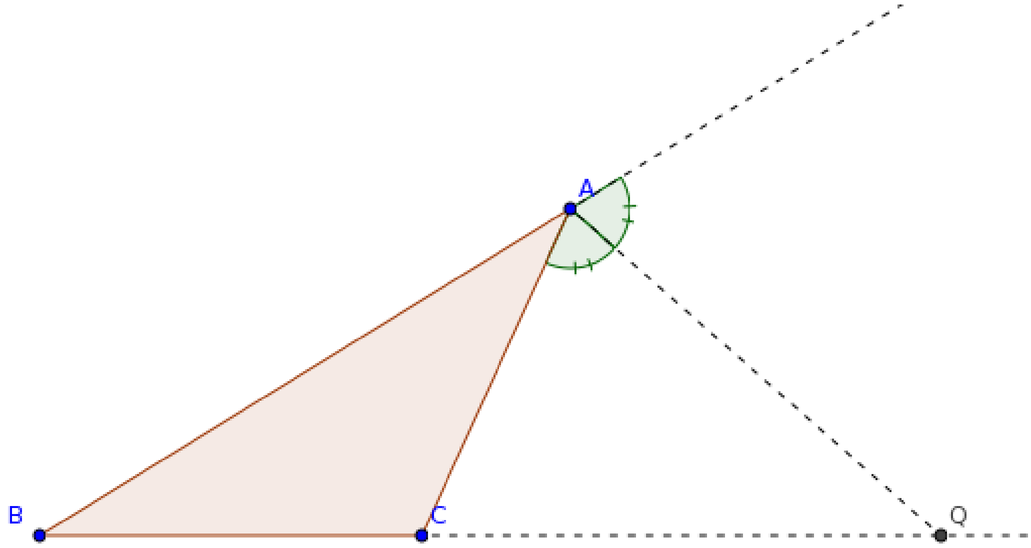
Anche le bisettrici di un triangolo sono concorrenti (nell'incentro). Per dimostrarlo utilizzando il teorema di Ceva, sono necessari i seguenti teoremi:

Th.1: la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.[i]



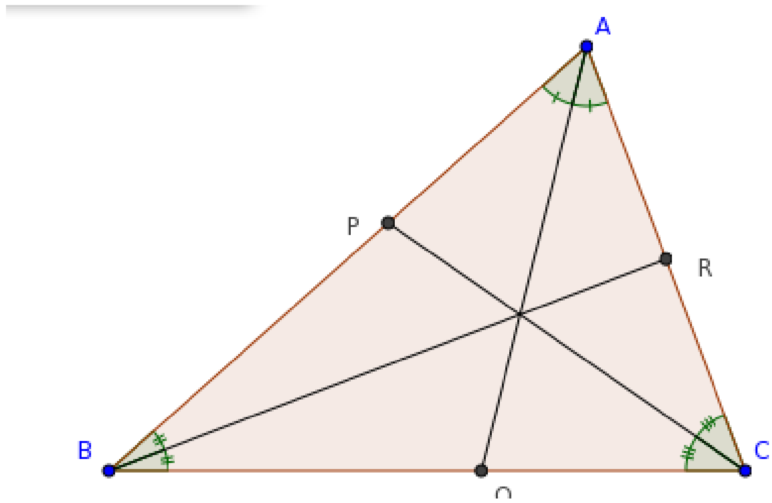
$$\frac{BQ}{QC}=\frac{AB}{AC}$$

Th.2: la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo interseca il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi di questo lato sono proporzionali agli altri due lati e viceversa.



$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{AB}{AC}$$

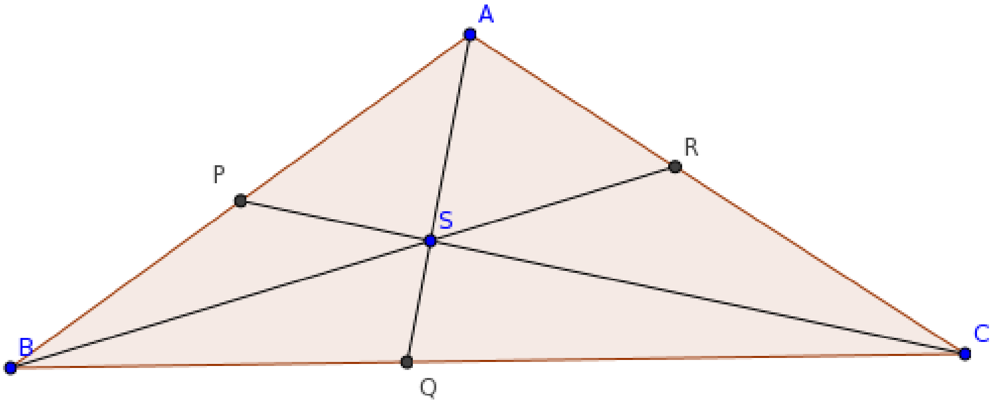
Dimostriamo ora che le **bisettrici sono concorrenti**.



$\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{BC}$, $\frac{BQ}{QC}=\frac{AB}{AC}$, $\frac{CR}{RA}=\frac{BC}{AB}$ quindi $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$

Rapporto nel quale il punto di concorrenza divide ogni ceviana

Nel triangolo ABC, AQ, BR e CP sono ceviane, concorrenti in S.



Da quanto visto nella dimostrazione del teorema di Ceva si sa che: $\frac{BQ}{QC}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{CAS}}$,

$\frac{CR}{RA}=\frac{Area_{CBS}}{Area_{ABS}}$, $\frac{AP}{PB}=\frac{Area_{CAS}}{Area_{BCS}}$ sapendo che le aree di segmenti con altezza congruente sono nello stesso rapporto delle basi si ricava: $\frac{AS}{SQ}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{SBQ}}$, $\frac{AS}{SQ}=\frac{Area_{ASC}}{Area_{SQC}}$ quindi

$$\frac{AS}{SQ}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{SBQ}}=\frac{Area_{ASC}}{Area_{SQC}}\Rightarrow\frac{AS}{SQ}=\frac{Area_{ABS}+Area_{ASC}}{Area_{SBQ}+Area_{SQC}}=\frac{Area_{ABS}+Area_{ASC}}{Area_{BCS}}=\frac{Area_{ABS}}{Area_{BCS}}+\frac{Area_{ACS}}{Area_{BCS}}$$ e quindi

$$\frac{AS}{SQ}=\frac{RA}{CR}+\frac{AP}{PB}$$

<u>Attenzione</u>:se i tre segmenti ceviani sono le maediane del triangolo, si ha $RA=CR$ e $AP=PB$ $\frac{AS}{SQ}=\frac{RA}{CR}+\frac{AP}{PB}=1+1=2$ come noto.

Teorema delle mediane

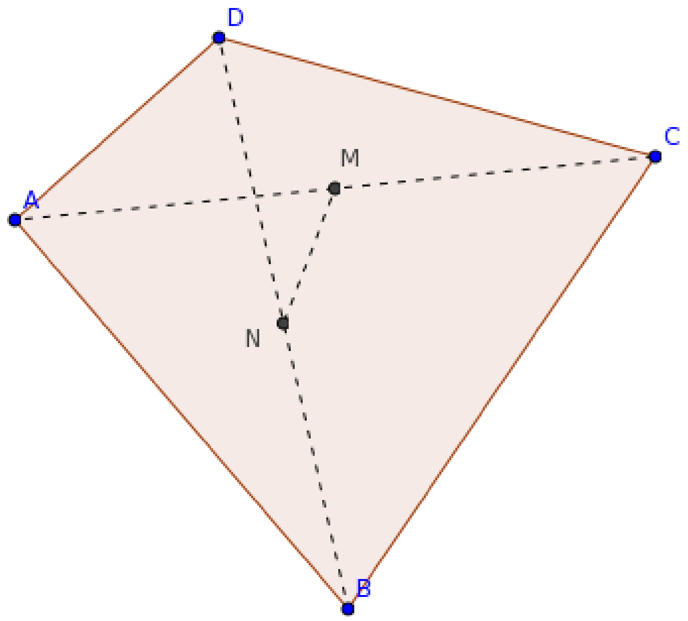
Dette m_A , m_B ed m_C le mediane uscenti dai vertici A, B e C. Risulta:

$m_A=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_B=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$ $m_C=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ essendo $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{AB}=c$ [ii]

Teorema di Eulero

Sia ABCD un quadrilatero, siano M ed N i punti medi delle diagonali AC e BD. Allora:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{MN}^2$$



Applicando il teorema delle mediane ai triangoli ABC, ACD e BDM:

$$4\overline{BM}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)-\overline{AC}^2$$

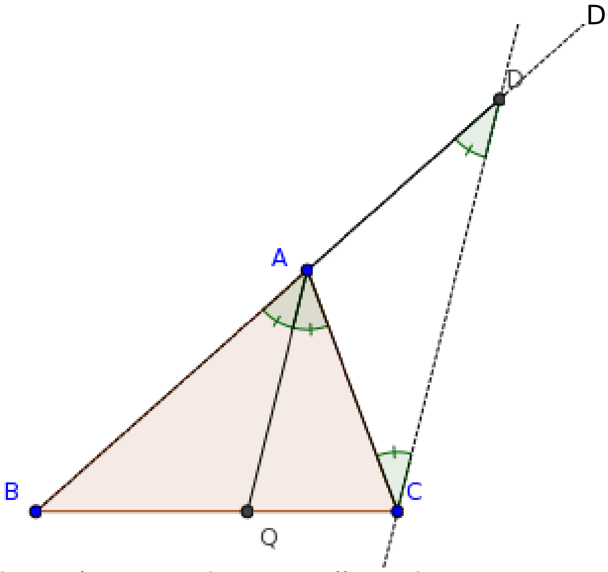
$$4\overline{DM}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)-\overline{AC}^2$$

$$4\overline{MN}^2=2(\overline{DM}^2+\overline{BM}^2)-\overline{BD}^2$$

$$4\overline{MN}^2=2\overline{DM}^2+2\overline{BM}^2-\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-\frac{1}{2}\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\frac{1}{2}\overline{AC}^2-\overline{BD}^2$$ da cui la tesi.

i

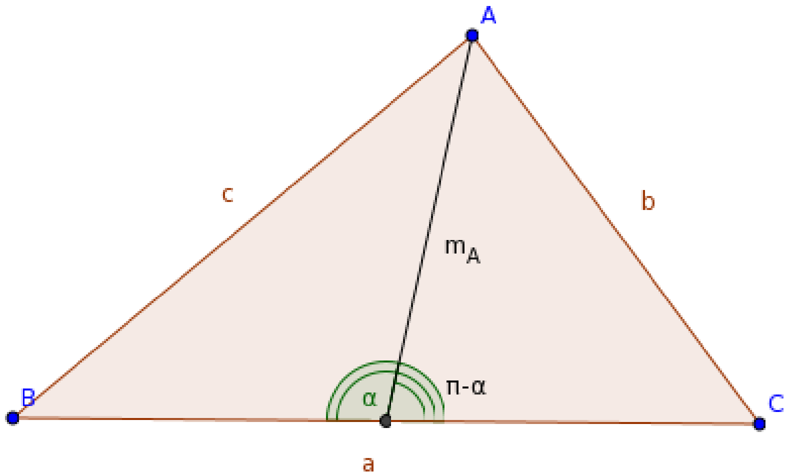
DC parallela a ad AQ, si ricava AD=AC si



applica Talete per giungere alla tesi

ii

Utilizzando il teorema del



coseno si ottiene: $m_A^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2m_A\frac{a}{2}\cos\alpha=c^2$ e anche $m_A^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2m_A\frac{a}{2}\cos(\pi-\alpha)=b^2$

sommando membro a membro si ottiene la tesi